This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

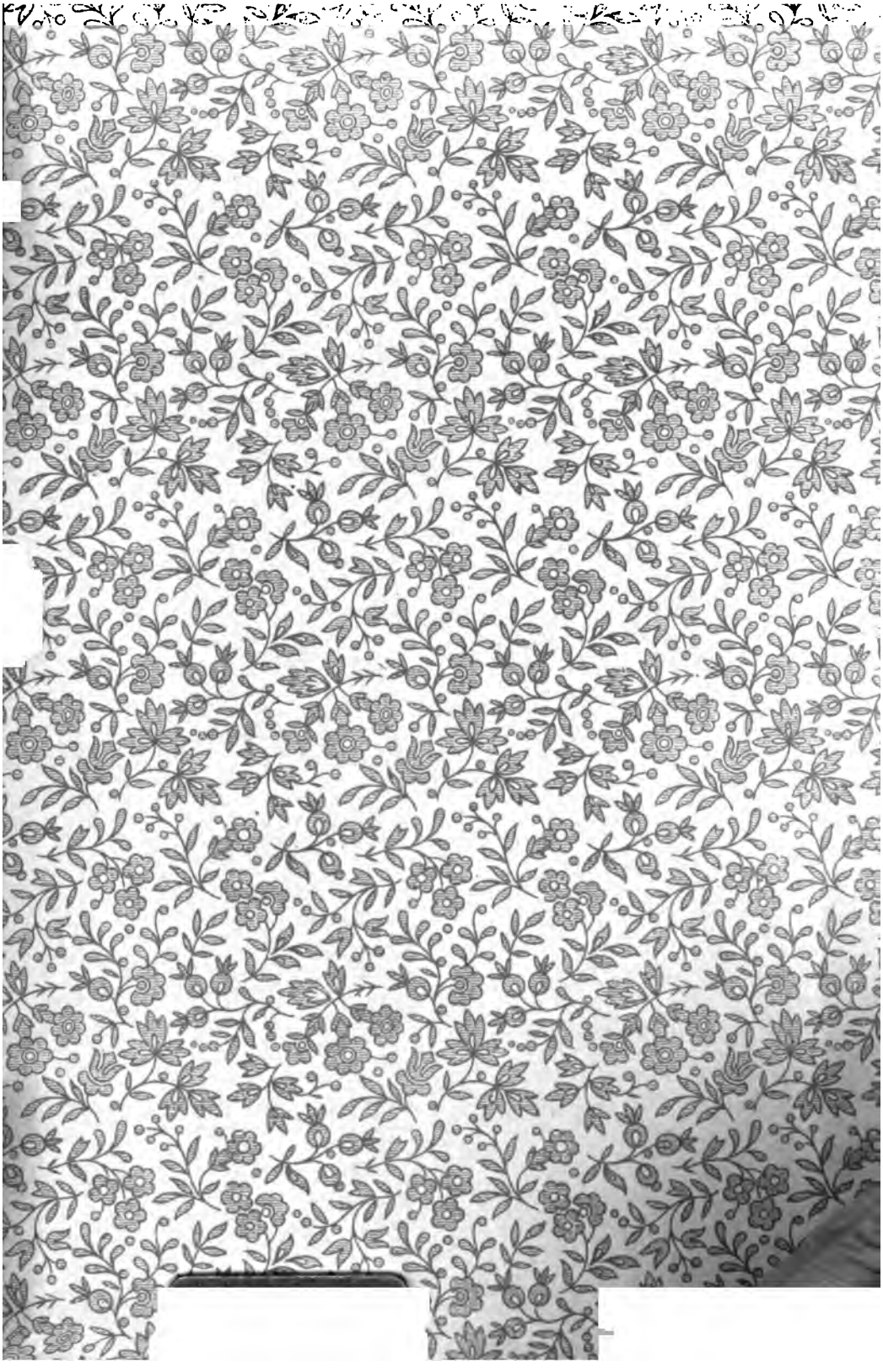
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 133



MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. F. KLEIN zu München,
Prof. A. MAYER zu Leipzig, Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig,

gegenwärtig herausgegeben

von

Carl Neumann,
Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

VIII. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28303

Inhalt des achten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Du Bois-Reymond, in Tübingen. Ueber asymptotische Werke, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen 363

——— Nachträge zur vorstehenden Abhandlung 574

Braun, in Passau. Ueber Lissajous' Curven 567

Brill, in München. Ueber Systeme von Curven und Flächen 534

Cayley, in Cambridge. On the group of Points $G\frac{1}{4}$ on a sextic curve with five double points 359

Frahm, in Tübingen. Note über die Rotation eines starren Körpers . . . 31

——— Ueber gewisse Differentialgleichungen 35

Gundelfinger, in Tübingen. Ueber geometrische Deutung algebraischer Formen, die in der Theorie der Curven dritter Ordnung auftreten 136

Hankel, †. Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen 453

——— Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen . 471

Krause, in Heidelberg. Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen 539

Lie, in Christiania. Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen 215

Lüroth, in Carlsruhe. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie 145

Meutzner, in Meissen. Untersuchungen im Gebiete der logarithmischen Potentiales 319

Mayer, in Leipzig. Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen. Zusatz zur Lie'schen Abhandlung 304

——— Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode . . . 313

Neumann, in Leipzig. Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz. (Auszug aus den Abhandl. der Königl. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1874, S. 79) 555

Nöther, in Erlangen. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Zweiter Aufsatz 495

Stolz, in Insbruck. Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven 415

Voss, in Göttingen. Zur Theorie der windschiefen Flächen 54

Weber, in Zürich. Neuer Beweis des Abel'schen Theorems 49

Weber, in Rostock. Notiz über die Flächen constanten Potentiales . . . 45

Wiederhold, in Giessen. Ueber binäre Formen, welche Polaren einer Form sind 444

Zeuthen, à Copenhague. Études des propriétés de situation des surfaces cubiques 1

Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques*).

Par H. G. Zeuthen.

I. Projection stéréographique de la surface.

1. Dans un article, inséré dans les „Annalen" vol. VII, p. 410, sur *les formes des courbes planes du quatrième ordre*, j'ai démontré qu'une courbe quartique sans points multiples a, à côté des tangentes communes à deux branches, *quatre tangentes doubles dont tous les deux points de contact se trouvent sur la même branche ou sont imaginaires*, et que les branches de la courbe se trouvent soit dans les quatre triangles, soit dans les trois quadrilatères, formés par ces quatre tangentes doubles, 1 ou 0, ou 2 dont l'une est interne à l'autre, dans chacune de ces parties du plan. J'appelais ces quatre tangentes doubles dont nous venons de parler tangentes doubles de *première espèce*, et les tangentes communes à deux branches, tangentes doubles de *seconde espèce*.

Grâce à la circonstance, dont M. Geiser a fait le premier des applications sérieuses, que le contour d'une surface cubique, projetée d'un point de la surface sur un plan, est une courbe quartique, je pouvais appliquer les propriétés des quartiques que j'avais trouvées à démontrer les théorèmes de M. Schläfli sur les nombres des droites et plans tangents triples *réels* des surfaces cubiques, et leur division en espèces qui en résulte. Je trouvais en même temps que les contours des surfaces de la 1re, 2me, 3me, 4me espèce**), sont composés de 4, 3, 2, 1 branches externes l'une à l'autre, et que celui d'une surface de la 5me espèce, est composé de deux branches dont l'une est interne à l'autre si le centre de projection se trouve sur la nappe d'ordre impair, et qu'il n'existe pas s'il se trouve sur la nappe d'ordre pair.

2. Les derniers intéressants mémoires de MM. Schläfli***) et Klein†) sur les surfaces cubiques contiennent plusieurs autres résul-

*) Die diesen Aufsatz begleitende Figur findet man am Ende des Aufsatzes. Anm. d. Red.

**) L'usage actuel des noms de 4me et 5me espèce, dont on se sert à présent ordinairement, est inverse à celui que j'en ai fait dans mon article précédent.

***) Annali di Matematica t. V.

†) Mathematische Annalen t. VI.

tats qu'il est facile de déduire, grâce à la représentation de ces surfaces dont je viens de parler, des propriétés des courbes quartiques. Appliquons par exemple ce procédé à démontrer *la transition d'une espèce à l'espèce suivante par une surface douée d'un point conique.* Il faut qu'au moment de transition le contour de la surface projetée d'un point d'elle-même ait un point double, à tangentes réelles ou imaginaires; car le nombre de branches du contour s'altère par la transition. Ce point double n'est pas un point de la trace du plan tangent au centre de projection; car dans ce cas, qui a lieu toutes les fois qu'une droite de la surface passe par le centre de projection, le contour aurait après la transition le même nombre de branches qu'avant elle. Or un point double du contour qui n'est pas placé sur la trace du plan tangent est nécessairement la projection d'un point conique de la surface; car la droite joignant le centre de projection au point double ne peut avoir deux contacts avec la surface cubique. Donc etc.

3. Avant d'appliquer la représentation de la surface, qui est une sorte de *projection stéréographique,* à d'autres exemples il sera commode de lui donner une forme plus déterminée. Je prends pour centre de projection un point de la surface où la courbure est elliptique, ce qui n'est impossible que dans un cas limite*), auquel il n'est pas nécessaire d'avoir égard dans la discussion générale. En effet, la courbe à courbure parabolique de la surface, déterminée par son intersection avec sa surface hessienne, a toujours des branches réelles, parce que l'hessienne contient des droites réelles (droites d'intersection des plans réels ou des plans imaginaires conjugués du pentaèdre), et qu'une droite rencontre toujours la surface donnée**).

Je prends pour plan de projection un plan parallèle au plan tangent au centre de projection. Alors le contour de la projection *(Uebergangscurve)* sera une quartique ayant la droite à l'infini pour tangente double à contacts imaginaires, et, par conséquent, de première espèce; les autres tangentes doubles du contour sont les projections des droites de la surface. Un point du plan, externe aux branches fermées et finies dont le contour est composé, ou interne à deux branches (5^{me} espèce), représente *deux* points de la surface, pendant qu'un point interne à une seule branche n'en représente aucun point réel. La surface est donc représentée par deux feuilles planes et coïncidentes qui sont

---

*) La *surface diagonale* dont les propriétés conduisent M. Klein à celles des surfaces générales. Dans ce cas la courbe parabolique ne consiste qu'en points isolés.

**) On peut aussi prouver l'existence réelle de la courbe parabolique en montrant qu'il y a toujours sur la surface des droites à „points doubles" réels. Voir le n° 5.

réunies par le contour. Nous appellerons *visible* la feuille qui représente la partie de la surface qui est rencontrée la première par des droites menées du centre de projection, dirigées du même côté, par rapport au plan tangent, où se trouvent les points de la surface voisins du centre de projection, et continuées, s'il est nécessaire, par l'infini jusqu'à leur retour au centre de projection. L'autre feuille est *invisible*.

Le centre de projection est le seul point „fondamental" de la surface, c'est à dire point auquel correspondent tous les points d'une ligne: à ce point correspond la droite à l'infini de la feuille visible. Les courbes de la surface qui passent par le centre de projection sont donc les seules dont les projections s'étendent à l'infini sur la feuille visible. Le plan de projection ne contient aucun point fondamental, ce qui contribue à rendre notre représentation d'une surface cubique plus intuitive que les représentations sur des plans simples.

Ayant donné à la droite à l'infini dans le plan de projection un rôle particulier, nous pourrons parler des tangentes communes *externes* et *internes* de deux branches, dire qu'une droite *sépare* les branches etc.

Nous donnons sur une table suivant à cet article (p. 30) une image *schématique* de la représentation d'une surface de première espèce (à 27 droites). Il est indifférent, dans la plupart des recherches auxquelles nous appliquerons notre représentation, si les contacts des trois tangentes doubles de première espèce qui ne s'éloignent pas à l'infini sont réels ou imaginaires; dans notre figure tous ces contacts sont imaginaires. Les quatre branches du contour se réduisent donc à des ovales, qui doivent être renfermés dans les quatre triangles que forment les quatre tangentes doubles de première espèce. Les formes exactes de ces ovales étant indifférentes ici, nous les avons remplacés par des cercles. Les lignes pointées appartiennent à la feuille invisible*).

Si l'on veut avoir une image schématique de la représentation d'une surface de la deuxième espèce, il faut effacer un des ovales et les droites qui y sont tangentes. Toutefois il faut qu'on se rappelle, que dans ce cas les trois branches du contour peuvent se trouver dans les trois quadrilatères formés par les tangentes doubles de première espèce. On doit donc regarder comme indifférentes des altérations de la situation de l'une de ces tangentes doubles par rapport aux autres pourvu qu'elle garde sa situation par rapport aux ovales. Il est indifférent, pour cette raison, si l'on a effacé l'ovale interne ou un des trois ovales externes.

*) Les quatre branches correspondent dans nos recherches, à plusieurs égards, aux quatre points coniques de M. Klein, les trois droites représentées par des tangentes doubles de première espèce, aux droites qui ne sont pas arêtes du tétraèdre de ce savant.

On peut de même appliquer la figure de notre table à la discussion des propriétés des surfaces de la 3^{me} ou 4^{me} espèce, et de celles de la nappe d'ordre impair de la surface de la 5^{me} espèce.

II. Distribution des droites de la surface et des branches de sa courbe parabolique.

4. Nous avons dit que, dans notre représentation d'une surface cubique, les tangentes doubles du contour à l'exception de la droite à l'infini sont les projections des droites de la surface. Si leurs points de contact sont réels, elles y passent de l'une des deux feuilles à l'autre. Il suffit donc, pour trouver quels sont les segments visibles, de remarquer que les segments qui passent à l'infini sont invisibles, parce que les lignes passant à l'infini sur la feuille visible représentent des lignes de la surface qui passent par le centre de projection. Les tangentes doubles à contacts imaginaires (regardées comme des projections de droites de la surface) appartiennent en entier à la feuille invisible. Deux droites de la surface se rencontrent si le point d'intersection de leurs projections appartient, sur toutes ces deux droites, à la même feuille. En pointant les parties qui appartiennent à la feuille invisible, on peut *voir quelles sont les droites de la surface qui se rencontrent.*

Les propriétés des quartiques planes y fournissent un autre moyen. En effet, deux ou trois droites de la surface se trouvent dans le même plan tangent triple, si les points de contact de leurs projections avec le contour se trouvent sur une conique passant par les points de contact (imaginaires et à l'infini dans la représentation actuelle) de la trace du plan tangent à la surface au centre de projection. Cette conique est la projection de la courbe d'intersection du plan tangent triple avec la quadrique polaire du centre de projection. Or on sait (voir les n^{os} 8 et 9 de mon article sur les formes des quartiques) que les points de contact de trois ou quatre tangentes doubles d'une quartique plane se trouvent sur une conique si leur situation ne le rend pas impossible d'une *manière visible.* Dans le cas actuel la conique, devant passer par deux points imaginaires à l'infini, est une ellipse. Donc, *deux ou trois droites de la surface se trouvent dans le même plan tritangent, si les points de contact de leurs projections forment des quadrilatères ou des hexagones convexes,* y compris ceux où des sommets imaginaires se trouvent sur des droites qui ne séparent pas les sommets réels.

5. On pourrait appliquer les règles du n° 4 à déduire de notre représentation les théorèmes connus sur les intersections des droites de la surface. Au lieu d'y insister, nous démontrerons ici plusieurs résultats dont M. Klein a obtenu ceux qui ont égard aux surfaces de

la première espèce*), par un procédé indirecte, en les cherchant pour une surface particulière (la surface diagonale), et en démontrant ensuite qu'ils ne sont pas altérés, tant que toutes les 27 droites restent réelles.

On sait qu'un plan quelconque par une des droites de la surface y est tangente en deux points, réels ou imaginaires, de la droite, et que la série des couples de points de contact est en involution. Les points d'intersection de la droite avec les deux autres droites d'un plan tangent triple passant par elle en forment un couple, et ses**) points de contact avec le contour, un autre. Les points doubles de l'involution sont imaginaires ou réels suivant que deux couples se séparent (dans le sens projectif de ce mot), ou non. Il n'est donc pas difficile de trouver, par notre représentation, les droites de la surface où ces points doubles sont réels, et celles où elles sont imaginaires.

Les points doubles des trois droites dont les projections sont des tangentes doubles de première espèce sont évidemment réels; car les points de contact de ces tangentes doubles, s'ils sont réels, interceptent un segment qui n'est rencontré par aucune des autres tangentes doubles.

Quant aux autres tangentes doubles, on voit que chacun des deux couples de tangentes communes à deux branches, l'externe et l'interne, représente un couple de droites de la surface qui se trouvent dans un plan passant par la droite représentée par la tangente double de première espèce qui ne sépare pas les deux branches. Une tangente commune externe rencontre cette tangente double et l'autre tangente commune externe en des points qui ne séparent pas ses points de contact; ses points doubles sont donc réels. Mais une tangente double interne rencontre la tangente double de première espèce et l'autre tangente commune interne en des points qui séparent les points de contact; ses points doubles sont donc imaginaires. Nous avons donc prouvé que les *tangentes communes internes représentent les droites dont les points doubles sont imaginaires.*

Il y a donc sur une surface cubique de la 1re, 2me, 3me, 4me, 5me espèce 12, 6, 2, 0, 0 droites dont les points doubles sont imaginaires.

Si la surface est de la *première espèce,* les 12 droites à points doubles imaginaires se trouvent dans six plans qui passent deux à deux par les trois droites représentées par les tangentes doubles de première espèce; car pour chacune de celles-ci il y a deux couples de branches

---

*) Voir le § 11. du mémoire cité. M. Klein fait observer que son procédé est aussi applicable aux surfaces des autres espèces.

**) Où nous ne sommes pas exposés à causer des malentendus nous ne ferons aucune distinction des parties de la surface et de leurs projections.

du contour qu'elle ne sépare pas. On voit sans difficulté qu'il n'y a pas trois de ces 12 droites qui se trouvent dans le même plan tangent triple. On voit donc que *les droites à points doubles imaginaires d'une surface de la première espèce forment un double-six.* Comme ce double-six se distingue de tous les autres, il est naturel de le prendre pour base de la notation des droites de la surface ce que nous avons fait dans notre figure à la page 30*).

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{array}$$

est le double-six dont il s'agit, pendant que les notations des autres droites sont composées de deux chiffres.

Les six droites à points doubles imaginaires d'une surface de la *deuxième espèce* se trouvent en trois plans passant par les trois droites d'un plan tangent triple. Elles seront *les 6 droites réelles de deux doubles-six imaginaires* (voir le n° 24).

Les *deux* droites à points doubles imaginaires d'une surface de la *troisième espèce* sont les deux droites de l'un des trois plans tangents triples qui passent par la septième droite réelle de la surface.

6. Il n'est pas difficile à présent de trouver la situation des différentes branches de la courbe parabolique. Commençons par les surfaces de la *première espèce.*

On sait que la courbure de la surface est hyperbolique en tous les points de ses droites, à l'exception des points doubles dont nous venons de parler, et que ces points doubles sont des points de contact avec la courbe parabolique. La courbure étant elliptique à notre centre de projection, il faut que la partie de la surface, décomposée par ses droites, où se trouve ce centre renferme une partie de la courbe parabolique. Le périmètre (fini ou infini) de cette partie de la surface a pour projection celui du triangle formé par les trois tangentes communes qui renferme toutes les branches du contour [les droites 14, 36, 52 de la figure], et sa propre projection se trouve en partie au dehors de ce dernier périmètre sur la feuille visible, et en partie au dedans de lui sur la feuille invisible. Nous appelons cette partie de la surface un *triangle.* Chacun de ses côtés contient un des points doubles, ou points de contact avec la courbe parabolique, dont nous avons parlé; car le segment interne intercepté sur une de ces droites par ses points de contact avec le contour n'est rencontré par aucune autre droite de la surface.

Comme le centre de projection n'est assujéti à d'autres conditions que celle de se trouver en un point où la courbure est elliptique, nous

*) Nous nous servons ici des mêmes notations que M. Klein.

voyons que toutes les parties de la surface qui contiennent des parties de la courbe parabolique sont des triangles, dont chaque côté a un contact avec cette courbe. Il s'ensuit que, réciproquement, tous les points doubles réels de la surface se trouvent sur les côtés de ces triangles. Puis, en observant que les parties du plan qui ont des côtés communs avec le triangle renfermant le centre de projection sont, suivant la figure, des pentagones [un de ces pentagones est dans notre figure limité par les droites 1′, 2, 52, 36, 14], on voit qu'un segment contenant un des points doubles n'est côté que d'un seul des triangles, qui doit contenir, par conséquent, la branche de la courbe parabolique tangente au segment.

La partie de la courbe parabolique renfermée dans un des triangles est une seule branche d'ordre pair. En effet, une branche d'ordre impair serait coupée par le plan des côtés du triangle, et s'il y avait deux branches d'ordre pair on pourrait, évidemment, trouver des droites rencontrant cette partie de la surface en quatre points.

Selon le n° précédent 15 (= 27 — 12) droites ont des points doubles réels. Il y aura donc 30 points doubles, et le nombre des triangles qui nous occupent devient 10.

. *La courbe parabolique d'une surface cubique de la première espèce est composée de 10 branches d'ordre pair inscrites à 10 triangles formés par les droites de la surface.*

7. Avant de chercher pour les autres espèces de surfaces cubiques les branches de la courbe parabolique nous continuerons l'étude de la *décomposition de la surface de la première espèce par ses 27 droites.*

Commençons par regarder les 20 parties attenantes aux 10 segments d'une droite à points doubles réels. Nous désignerons par a les deux segments où se trouvent ces points doubles, par b, les quatre qui y aboutissent, et par c, les quatre segments qui restent encore. Il suffit de regarder les parties de la surface attenantes à une seule suite de trois segments a, b, c; car on peut projeter une quelconque de ces suites de manière que, dans notre représentation de la surface, le segment a ait pour projection un côté du triangle qui renferme les quatre branches du contour (par exemple son côté 36).

Nous savons déjà qu'un segment a est côté d'un triangle, dont les deux autres côtés sont aussi des segments a, et d'un pentagone. Les autres côtés de ce pentagone sont deux segments b et deux segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre des pentagones est donc égal à celui des segments a, ou égal à 30.

Un segment b est côté d'un pentagone et d'un tétragone, dont les autres côtés sont: un nouveau segment b, adjacent au premier, et deux segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre des seg-

ments b étant égal à 60, on trouve 30 de ces tétragones que nous appellerons *tétragones de première espèce.* [Exemple: la figure limitée par 36, 14, 1′, 6.]

Un segment c est côté de deux tétragones, dont les autres côtés sont: un nouveau segment c, adjacent au premier, et deux segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre de ces tétragones, que nous appellerons *tétragones de la seconde espèce*, est égal à celui des segments c, ou à 60. [Exemple: la figure limitée par 36, 6, 1′, 15.]

60 des côtés de nos 30 pentagones, 60 des côtés de nos 30 tétragones de première espèce et 120 des côtés de nos 60 tétragones de seconde espèce, sont des segments de droites à points doubles imaginaires. Le nombre total des segments de ces 12 droites étant 120, aucune des parties de la surface n'est limitée exclusivement de droites à points doubles imaginaires. Nous avons donc épuisé toutes ces parties.

Tous les segments d'une droite à points doubles imaginaires sont côtés de tétragones de seconde espèce, et elles sont en même temps soit côtés de pentagones (segments d), soit côtés de tétragones de première espèce (segments e). Chacun des 5 segments interceptés sur une de ces droites par les 5 autres droites à points doubles imaginaires qui la rencontrent, sépare deux tétragones de seconde espèce d'un pentagone et d'un tétragone de première espèce. Il est donc composé d'un segment d et d'un segment e; mais l'ordre de ces deux segments, — ou celui du pentagone et du tétragone de première espèce qu'ils limitent — peut varier indépendemment de celui des autres segments d et e de la même droite, ce qu'on voit en faisant varier dans la figure les grandeurs des ovales. Au moment où se fait un changement de cet ordre un des triangles se réduit à zéro.

Les 27 droites d'une surface cubique de la première espèce la décomposent en 10 triangles circonscrits à la courbe parabolique (3 côtés a), *en 30 pentagones* (1 côté a, 2 côtés b, 2 côtés d), *en 30 tétragones de première espèce* (2 côtés b et 2 côtés e) *et en 60 tétragones de seconde espèce* (2 côtés c et 2 côtés d ou 2 côtés e ou 1 côté d et 1 côté e). Dans les pentagones les côtés b sont adjacents au côté a, dans les tétragones les côtés du même nom sont adjacents l'un à l'autre.

8. La décomposition de la surface de la *deuxième espèce* par ses 15 droites, et la composition de sa courbe parabolique, se trouvent de la même manière. Nous nous contenterons d'indiquer les résultats de cette recherche.

Soit a le nom des deux segments des 9 droites à points doubles réels qui contiennent ces points, et b celui des quatre autres segments des mêmes droites. Alors les deux a d'une droite sont séparés, dans tous les deux sens de la droite, par deux b. *Les 15 droites décomposent la*

surface en 6 triangles, circonscrits aux branches de la courbe parabolique, et ayant pour côtés 3 segments *a*, en *18 pentagones,* ayant pour côtés 1 segment *a* et, adjacents à lui, 2 segments *b*, et en *18 tétragones,* ayant pour côtés, adjacents l'un à l'autre, deux segments *b*. Les autres côtés des pentagones et des tétragones sont des segments des droites à points doubles imaginaires: on peut en trouver qui sont côtés communs à deux pentagones, à deux tétragones ou à un pentagone et un tétragone; mais cette distribution peut varier un peu. Un segment *b* est toujours côté commun à un pentagone et un tétragone.

9. Il y a sur une surface de la *troisième espèce* 1° une droite qui rencontre les six autres et dont les deux segments *a*, séparés dans tous les deux sens de la droite par deux autres *b*, contiennent des points doubles, 2° deux couples de droites se rencontrant, l'une l'autre, et rencontrant la première droite, et dont tous les deux segments *c* contiennent des points doubles, et 3° un couple de droites se rencontrant, l'une l'autre, et rencontrant la première droite, et à points doubles imaginaires (deux segments *d*). Ces droites ont respectivement pour projections dans notre représentation: 1° la tangente double de première espèce externe aux deux branches du contour, 2° le couple des deux autres tangentes doubles de première espèce et le couple des tangentes communes externes, 3° le couple des tangentes communes internes.

La partie de la surface où se trouve le centre de projection est un triangle limité par la première des droites énumérées et par celles qui ont pour projections les tangentes doubles externes, ou bien par un segment *a* et deux segments *c*. La surface contient 4 de ces triangles. Les segments *c* sont encore côtés de hexagones, limités 1° par deux segments *c* adjacents l'un à l'autre, 2° par deux segments *b* adjacents aux deux segments *c*, et 3° par deux segments *d*. On voit qu'une seule droite contient deux côtés (les segments *b*) de chacun de ces hexagones. Le nombre de ces hexagones est égal à 4.

Le centre de projection étant un point quelconque où la courbure est elliptique, on voit que les branches de la courbe parabolique se trouvent dans les 4 triangles, qu'elles touchent leurs côtés *c*, et que la branche renfermée dans l'une ou l'autre des deux triangles attenants au même segment *a*, est tangente à ce côté commun.

Les 7 droites d'une surface cubique de la troisième espèce la décomposent en 4 triangles (1 côté *a*, 2 côtés *c*), *qui renferment les branches de la courbe parabolique, et dont les deux y sont circonscrits pendant que les périmètres des autres ne touchent les branches qui s'y trouvent qu'en deux points* (sur les côtés *c*), *et en 4 hexagones* (2 côtés *c*, 2 côtés *b* et 2 côtés *d*).

10. Quant à la surface de la *quatrième espèce,* et à la *nappe d'ordre*

impair de la surface de la *cinquième espèce*, on voit sans difficulté que *leurs 3 droites les divisent en 3 triangles qui renferment des branches de la courbe parabolique, et que chaque segment d'une droite est une fois tangente à cette courbe. — La courbure est elliptique en tous les points de la nappe d'ordre pair d'une surface de la 5me espèce.*

11. Si le centre de projection se meut sur toute la surface — et non seulement sur les parties où la courbure est elliptique — il est clair que la tangente double, trace du plan tangent au centre de projection, reste de la même espèce, tant que ce centre ne franchit aucune droite de la surface. Or elle est de la première espèce si la courbure est elliptique au centre de projection, et elle sera de la seconde espèce si le centre de projection est voisin d'une droite à points doubles imaginaires; car le contour aura un point isolé si le centre se trouve sur une de ces droites. On voit donc que *le contour de la surface, projetée d'un de ses points O, aura la trace du plan tangent en O pour tangente double de première espèce si O se trouve dans un des triangles qui renferment les branches de la courbe parabolique, mais pour tangente double de seconde espèce s'il se trouve dans une des autres parties de la surface.*

Si nous prenons, dans tous les cas, un plan de projection parallèle au plan tangent, le contour aura, pour un centre de projection placé sur la partie hyperbolique d'un des triangles, une branche qui se décompose en deux parties réunies par des points de contact avec la droite à l'infini, et, pour un centre de projection placé sur une autre des parties de la surface, deux branches paraboliques. Si nous regardons toujours comme visibles les points de la surface qui sont rencontrés les premiers par des droites menées par le centre de projection, et dirigées d'un côté déterminé par rapport au plan de projection, les points de contact avec le contour intercepteront sur la droite à l'infini deux segments: les points visibles de l'un seront les projections de points coïncidents avec le centre de projection, ceux de l'autre seront les projections d'autres points de la courbe d'intersection de la surface avec le plan tangent. Il faut donc pointer, dans la projection des droites de la surface, les segments qui rencontrent le premier des deux segments de la droite à l'infini, et non pas ceux qui en rencontrent le second.

III. Étude particulière des surfaces à 27 droites réelles.

12. Nous avons dit que nous prenons pour base de la notation des droites d'une surface de la premiere espèce le double-six composé des droites à points doubles imaginaires. Le périmètre d'un des 10 triangles de la surface est composé exclusivement de segments de droi-

tes à points doubles réels qui se trouvent dans un plan tangent triple. Ces 15 droites, dont les notations sont composées de deux chiffres, forment encore, à elles seules, 5 plans tangents triples, qui n'ont pas la propriété indiquée. Il sera utile d'avoir égard à cette différence dans la distribution des chiffres $1, 2 \cdots 6$ aux couples du double-six fondamental.

Si l'on place les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans leur ordre naturel sur une circonférence, les 15 groupes de trois cordes qui n'ont aucun bout commun appartiennent aux 5 classes suivantes:

2 groupes sont composés de cordes qui soustendent des arcs de $\frac{\pi}{3}$;

3 groupes sont composés d'un diamètre et de deux cordes, perpendiculaires à lui, qui soustendent des arcs de $\frac{2\pi}{3}$;

1 groupe est composé de trois diamètres;

6 groupes sont composés de deux cordes qui soustendent des arcs de $\frac{2\pi}{3}$, et d'une corde qui soustend un arc de $\frac{\pi}{3}$;

3 groupes sont composés d'un diamètre et de deux cordes, parallèles à lui, qui soustendent des arcs de $\frac{\pi}{3}$.

On peut obtenir que les cinq groupes appartenant aux deux premières classes

12, 34, 56 ou A,
16, 32, 54 ou B, et
14, 26, 53 ou C,
36, 42, 15 ou D,
52, 64, 31 ou E,

représentent des droites de la surface qui se trouvent en des plans tangents triples sans limiter des triangles de la surface, et que les autres dix groupes représentent les côtés des triangles de la surface. Alors la différence des deux premières classes de groupes entre elles, ainsi que celles des trois dernières classes, n'appartiennent pas à la surface, mais seulement au point de vue d'où elle est projetée dans la figure. Il est naturel de choisir pour notation du triangle où se trouve le centre de projection le groupe isolé

14, 36, 52;

alors les triangles désignés par des groupes de notations appartenant à une même classe présenteront une symmétrie, qui est plus complète qu'elle ne semble au premier abord, ce que nous verrons dans le n° suivant.

La figure (p. 30) montre la possibilité du système de notations que nous avons demandé. En effet, il suffit de donner aux tangentes internes communes à la branche interne et aux branches externes les noms de 1 et 2′, 3 et 4′, 5 et 6′. Alors les tangentes internes communes aux

deux autres branches externes auront, respectivement, les noms de 1′ et 2, 3′ et 4, 5′ et 6, etc. (Voir la figure.)

13. Nous ne devons pas regarder comme essentielles les différences des droites et des triangles qui se remplaceront entre eux dans le cas où le triangle 14, 36, 52 où se trouve le centre de projection, après s'être réduit à zéro, tourne sa convexité du côté opposé, ce qui aura lieu en même temps que, par une déformation de la surface, un des sommets du triangle franchit le côté opposé. [On s'imagine, au moyen de la figure, sans difficulté la déformation analogue d'un autre triangle de la surface, par exemple du triangle 54, 26, 31, et de ses alentours.]

Au moment de transition le contour de la surface se réduira à une courbe composée de la droite à l'infini et d'une cubique, dont les asymptotes seront parallèles aux droites 14, 36, 52 de la surface. Les trois branches externes du contour formeront la branche d'ordre impair de la cubique, et la branche interne sera son ovale. Les projections des droites 14, 36, 52 coïncideront avec la droite à l'infini, pendant que les projections des autres droites de la surface se confondront, deux à deux, dans les douze tangentes de la cubique qui sont parallèles à ses asymptotes: deux droites qui se trouvent dans un plan tangent triple passant par une des droites 14, 36, 52 auront la même projection.

On forme les notations de deux droites qui se couvrent ainsi, l'une de l'autre, en substituant à

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$$
$$4' \quad 5' \quad 6' \quad 1' \quad 2' \quad 3',$$

et réciproquement.

Comme la distinction des parties visibles et invisibles de la surface dépend du sens de la concavité, qui change par la transition dont il s'agit, on voit que les droites et les triangles qui se couvrent au moment de transition vont changer de rôle. Les tangentes doubles de la première espèce

$$12, \quad 34, \quad 56$$

du plan tangent triple A, prendront les places des tangentes communes externes des trois branches externes qui se trouvent de leur côté interne:

$$45, \quad 61, \quad 23$$

du plan tangent triple B. En même temps, chacun des trois autres plans tangents triples que nous avons énumérés dans le n° précédent garde sa situation, et il ne s'y fera qu'un changement de deux de ses droites.

14. Avant d'énumérer les dix triangles de la surface, nous étudierons quelques propriétés rendues visibles par la figure.

On aperçoit que les douze tangentes communes à une des branches du contour et aux trois autres forment un double-six. On trouve par exemple pour la branche interne les droites suivantes

$$1,\ 3,\ 5,\ 46,\ 62,\ 24,$$
$$35,\ 51,\ 13,\ 2',\ 4',\ 6',$$

qui forment un double-six que nous appellerons (avec M. Klein) 135, et, pour les branches externes avec des notations analogues, les doubles-six 524, 146, 362.

Un point interne à une branche est projeté par une droite qui ne rencontre la surface qu'au centre de projection: les branches du contour entourent donc *quatre ouvertures* de la surface qui se présentent à notre point de vue, et nous voyons que la partie de la surface qui entoure une des ouvertures contient des parties de toutes les droites d'un double-six*). Nous désignerons chaque ouverture par le nom du double-six qui l'entoure. On peut indiquer des limites assez naturelles de ces parties de la surface et des droites, en profitant des cinq plans tangents triples dont nous avons parlé dans le n° 12. On voit, par exemple, que les périmètres de l'un des triangles plans formés des droites 12, 34, 56, et de l'un des triangles formés des droites 16, 32, 54 (ceux qui ne sont pas rencontrés par le plan de l'autre), limitent une partie de la surface qui contient des segments des droites du double-six 135, et non pas des autres droites de la surface, et qui entoure l'ouverture 135. Nous appellerons cette partie de la surface la *paroi* de l'ouverture, et nous dirons que les deux triangles *ferment* l'ouverture. — On verra, dans ce qui suit, que les autres ouvertures sont limitées d'une manière analogue.

Une droite, ou une branche d'une courbe, *passe par une ouverture* si elle y entre par l'un et sort par l'autre des deux triangles qui la ferment, sans en rencontrer la paroi.

Une ouverture est visible de chaque point de la surface d'où sortent des droites qui ne rencontrent pas la surface en plusieurs points, et qui sont entourées d'une partie (du moins) de la paroi de l'ouverture. Celà peut avoir lieu si le point se trouve sur la paroi de l'ouverture; s'il ne s'y trouve pas on peut mener par le point des droites passant par l'ouverture. Du centre de projection de notre figure sortent des droites passant par l'ouverture 135; mais nous verrons (dans le n° 16, 8) que le centre de projection se trouve sur les parois des autres ouvertures visibles que nous avons nommées: 524, 146, 362.

La branche du contour qui entoure l'ouverture 135 se trouve, dans

*) M. Klein a indiqué dans sons mémoire déjà cité que la surface a dix ouvertures — ce que nous allons montrer aussi — et que chacune d'elles est entourée des droites d'un double-six.

notre figure, en entier sur la paroi de cette ouverture, parce que nous n'y avons donné des contacts réels à aucune des tangentes doubles de première espèce. Si une de ces tangentes avait eu des contacts réels avec la branche 135, l'arc rentrant de cette branche ne se trouverait plus sur cette paroi. Nous dirons que le *contour d'une ouverture est visible* d'un point de la surface, si une branche du contour de la surface, projeté de ce point, se trouve, à ses arcs rentrants près, sur la paroi de l'ouverture. Les contours des ouvertures 135, 524, 146 et 362 sont visibles dans notre figure, ce qu'on voit en regardant les limites de la paroi de l'ouverture 135, que nous avons déjà nommées, et celles des parois de 524, 146 et 362 que nous nommerons dans le n° suivant.

On voit par la figure que les droites dont les projections séparent la branche interne du contour d'une de ses branches externes forment un double-six entourant une ouverture de la surface, qui se trouve entre sa partie visible et sa partie invisible. Les trois ouvertures (doubles-six) qu'on trouve ainsi sont:

354 entre 135 et 524,
516 entre 135 et 146,
132 entre 135 et 362.

En appliquant ensuite à la surface la déformation dont nous avons parlé dans le n° 13, on aperçoit encore trois ouvertures. Cette déformation substituera au double-six abc qui contient aussi les droites $d'e'f'$ le double-six $d_1 e_1 f_1$, où $d_1 \equiv d + 3 \pmod 6$ etc. Cette substitution n'altère pas les doubles-six 135, 354, 516, 132; car l'ordre des chiffres qui forment une de ces notations est indifférente; mais les doubles-six

524, 146, 362

seront remplacés par

364, 526, 142.

Ces derniers doubles-six entoureront donc, du moins après la déformation, des ouvertures visibles du centre de projection. Au moment de transition les droites des deux doubles-six 146 et 526 se couvrent, et en même temps les deux ouvertures du même nom coïncident sans disparaître ou devenir invisibles. Il est donc clair, que toutes les deux ouvertures sont visibles soit avant, soit après la transition. [Dans notre figure (526) représente une branche de courbe d'ordre pair qui entoure l'ouverture 526.] Comme, dans la figure, la branche 146 du contour est tangente à plusieurs droites qui n'appartiennent ni au double-six 526, ni aux limites de l'ouverture 526, il est évident, que le contour de cette ouverture n'est pas visible avant la transition dont nous avons parlé. Il le devient après la transition en même temps que celui de 146 cesse d'être visible. Les mêmes remarques s'appliquent aux couples d'ouvertures 362 et 142, 524 et 364.

En résumé, *la surface a 10 ouvertures entourées de doubles-six: l'ouverture*

135,

et les trois couples d'ouvertures

524 *et* 364, 146 *et* 526, 362 *et* 142,

*sont visibles d'un point du triangle de la surface**) *limité par*

14, 36, 52,

les ouvertures

354, 516, 132,

invisibles.

Le contour de l'ouverture 135, *et ceux de l'un ou l'autre des deux triples d'ouvertures* 524, 146, 362 *et* 364, 526, 142, *sont visibles.*

Nous dirons que *l'ouverture* 135 *est opposée au triangle* que nous venons de nommer. *Elle est fermée de triangles formées des droites*

12, 34, 56
16, 32, 54

La figure montre que la paroi de l'ouverture 135 contient 9 points d'intersection de droites à points doubles imaginaires. Or, chacun de ces points est sommet commun à deux tétragones de la seconde espèce et à deux autres polygones de la surface, qui peuvent être — suivant la situation des triangles de la surface — des pentagones ou des tétragones de la première espèce (voir le n° 7). L'ouverture 135 pouvant être remplacée par une ouverture quelconque de la surface — ce que nous verrons dans le n° suivant — nous voyons que *la paroi d'une ouverture est composée de 18 tétragones de la seconde espèce et de*

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 *triangles*
6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 *pentagones* } *18 pentag. et tétrag.*
12, 11, 10, 9, 8, 7, 6 *tétragones de la première esp.* } *de la 1re esp.*

15. Les propriétés des 10 ouvertures, et leurs relations entre elles et avec les 10 triangles de la surface, se déduisent à présent par de simples substitutions. Remarquons que les chiffres 1, 3 et 5 que nous avons écrits les premiers dans les notations 14, 36 et 52 des côtés du triangle où se trouve notre point de vue, forment celle de l'ouverture 135 opposée à ce triangle, et que les noms des autres ouvertures visibles sont composés de celui d'un côté et du dernier chiffre d'un autre côté. Le triangle que nous avons regardé étant un quelconque des dix triangles de la surface, il faut qu'on retrouve partout ces mêmes propriétés. Regardons par exemple le triangle 15, 32, 64. Au nombre de ses ouvertures visibles (mais non pas opposées) appartiendront 516, 364 et 132, de façon que les chiffres 1, 3 et 6 doivent être les derniers

*) Aussi d'un point où la courbure est hyperbolique (voir le n° 11).

dans les noms des côtés du triangle. L'ordre des côtés du triangle n'ayant aucune signification*), on peut déduire les résultats qui ont rapport au triangle 51, 23, 46 de ceux qui ont rapport au triangle 14, 36, 52 en substituant

aux chiffres 1 2 3 4 5 6
les chiffres suivants 5 6 2 1 4 3.

On obtiendrait les mêmes résultats par la substitution $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&3&4&1&2&6\end{pmatrix}$ qui correspond à un autre ordre des côtés du nouveau triangle. Des applications successives de cette dernière substitution et de la substitution $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix}$, qui correspond à une permutation des côtés du triangle 14, 36, 52, pourraient conduire aux résultats qui ont rapport à tous les triangles de la surface.

Les résultats sont consignés dans la table suivante:

Triangle	Ouverture opposée	Couples d'ouvertures visibles			Ouvertures invisibles	Triangles fermant l'ouverture opposée
14, 36, 52	135	524 364	146 526	362 142	354, 516, 132	12, 34, 56 (*A*) 16, 32, 54 (*B*)
51, 23, 46	524	461 231	513 463	236 516	241, 453, 526	56, 21, 43 (*A*) 53, 26, 41 (*C*)
13, 45, 62	146	623 453	135 625	452 132	463, 615, 142	12, 43, 65 (*A*) 15, 42, 63 (*D*)
35, 61, 24	362	245 615	351 241	614 354	625, 231, 364	34, 65, 21 (*A*) 31, 64, 25 (*E*)
31, 65, 42	364	421 651	315 425	652 312	641, 435, 362	32, 61, 45 (*B*) 35, 62, 41 (*C*)
53, 21, 64	526	643 213	531 641	214 534	263, 651, 524	54, 23, 61 (*B*) 51, 24, 63 (*D*)
15, 43, 26	142	265 435	153 263	436 156	425, 213, 146	16, 45, 23 (*B*) 13, 46, 25 (*E*)
32, 56, 41	354	412 562	326 416	561 321	542, 436, 351	31, 52, 46 (*E*) 36, 51, 42 (*D*)
54, 12, 63	516	634 124	542 632	123 543	164, 652, 513	53, 14, 62 (*C*) 52, 13, 64 (*E*)
16, 34, 25	132	256 346	164 254	345 165	326, 214, 135	15, 36, 24 (*D*) 14, 35, 26 (*C*)

*) On aurait pu s'en servir pour indiquer le sens de la convexité du triangle de la surface, en donnant aux côtés l'ordre dans lequel ils se suivent vus d'un

Les ouvertures visibles énumerées dans la même ligne horizontale ont à la fois des contours visibles.

L'ordre des trois chiffres qui composent la notation d'une ouverture, et celui des trois côtés d'un triangle, sont indifférents. Mais l'ordre des deux chiffres qui composent la notation d'une droite nous fournit un moyen de distinguer, dans la dernière colonne, les quatre triangles d'un seul plan tangent triple, l'un de l'autre. En effet, chacune des droites du plan est décomposée par les deux autres en deux segments qu'on peut désigner différemment (par 12 et 21 etc.). Alors si 12, 34, 56 est un des quatre triangles du plan A, 12, 43, 65 en est celui dont le périmètre est composée du côté 12 du premier triangle et des segments supplémentaires à ses deux autres côtés etc. La figure nous montre qu'avec ces significations des notations la dernière colonne indique d'une manière juste, non seulement les plans fermant les ouvertures, mais aussi les triangles de ces plans.

16. La table du n° précédent nous montre qu'une ouverture donnée n'a pas les mêmes relations avec toutes les autres ouvertures, mais que celles-ci se divisent en deux classes: *six* dont les notations contiennent un seul des chiffres de celle de l'ouverture donnée, et *trois* dont les notations en contiennent deux. Nous commencerons par indiquer les *relations de deux ouvertures dont les notations ont un seul chiffre commun.* La table et les explications du n° 14. nous en montrent une partie, la figure, où, à cause de la symmétrie 10-tuple de la surface, il suffit de regarder les deux ouvertures: 135 et 524, les autres.

1°. L'une des ouvertures est visible du triangle opposé à l'autre.

2°. Elles forment par rapport à un des triangles de la surface un couple d'ouvertures visibles.

3°. Il y a encore deux triangles d'où elles sont visibles toutes deux. Alors, leurs contours sont visibles tous deux, ou aucun des contours n'est visibles.

4°. Il y a quatre triangles d'où l'une est visible, l'autre invisible. Chacune d'elles est visible des deux de ces triangles.

5°. Il y a un triangle d'où aucune d'elles n'est visible.

6°. *Un des triangles fermants de l'une est formé des mêmes droites que l'un des triangles fermants de l'autre. Dans le voisinage du côté commun à ces triangles, les deux ouvertures se trouvent de différents côtés, soit du plan, soit de la surface.*

---

point de ce triangle, le sens de rotation étant le même pour tous les triangles. Nous n'avons pas cet égard dans notre table.

7°. *Les parois des deux ouvertures ont en commun une partie de la surface, composée de* 2 *tétragones de la seconde espèce**) *et de*

0, 1, 2 *triangles*
0, 1, 2 *pentagones*
2, 1, 0 *tétragones de la première espèce* } 2 *pent. et tétr. de la première esp.*

Les deux ouvertures se trouvent du même côté de cette paroi commune.

8°. Un des côtés du triangle opposé à l'une des ouvertures est une partie d'un côté d'un triangle fermant l'autre ouverture (de celui qui ne se trouve pas dans le même plan qu'un triangle fermant la première ouverture). Suivant que le triangle opposé à la première ouverture se trouve de l'un ou de l'autre côté de cette droite, il appartient à la paroi de la seconde ouverture, ou non. Le triangle opposé à l'ouverture 135 se trouve, dans notre figure, sur la paroi de 524, mais non pas sur celle de 364. On voit donc que les *droites sortant d'un triangle passent seulement par l'ouverture opposée et par les trois ouvertures visibles dont les contours ne sont pas visibles.*

17. Regardons ensuite les relations de *deux ouvertures dont les notations ont deux chiffres communs.* 135 et 354 peuvent servir d'exemples.

1°. Chacune des deux ouvertures est invisible du triangle opposé à l'autre.

2°. Il y a encore quatre triangles d'où l'une est visible, l'autre, invisible. Chacune est visible de deux de ces triangles.

3°. Il y a quatre triangles d'où elles sont visibles toutes deux. Alors le contour d'une seule d'elles est visible.

4°. *Les parois des deux ouvertures ont en commun une partie de la surface composée de* 8 *tétragones de la seconde espèce, de* 4 *pentagones et de* 4 *tétragones de la première espèce. Cette paroi commune sépare les deux ouvertures.*

18. On voit en regardant un polygone de chaque espèce**) sur la surface que *toute partie de la surface appartient aux parois de trois ouvertures différentes. Les trois ouvertures attenantes à un triangle se trouvent du même côté de cette figure, pendant qu'un tétragone ou pentagone sépare deux des ouvertures attenantes à lui de la troisième.* Deux ouvertures qui se trouvent du même côté d'une paroi commune n'ont, dans leurs notations, qu'un chiffre commun: les relations exposées dans

---

*) On voit, en effet, qu'un seul point d'intersection de droites à points doubles imaginaires se trouve sur la paroi commune.

**) Nous avons déjà vu que le triangle 14, 36, 52 appartient aux parois des ouvertures 146, 362, 524 qui se trouvent du même côté du triangle. Le pentagone 1′, 2, 25, 36, 14 et le tétragone de seconde espèce 1′, 2, 26, 14 sépare l'ouverture 526 des ouvertures 524 et 362. Les tétragones de première espèce se comportent comme les pentagones.

le n° 16. ont donc lieu entre elles. Deux ouvertures séparées par une paroi commune ont, dans leurs notations, deux chiffres communs: les relations du n° 17. ont donc lieu entre elles. [Voir 16, 7 et 17, 4.]

19. Il est utile de construire aussi des représentations (projections stéreographiques) de la surface vue d'un point d'un tétragone ou pentagone. Grâce à la symmétrie de ses propriétés il suffit de placer le centre de projection sur une seule figure de chaque espèce, et nous pourrons même négliger le cas où il se trouve sur un tétragone de première espèce, qui ne diffère pas essentiellement de celui où il se trouve sur un pentagone. En effet, l'une de ces figures se transforme en l'autre, par une légère altération de la situation d'une droite, qui ne change pas le contour.

Nous avons indiqué dans le n° 11 comment on distingue dans ces cas les parties visibles des parties invisibles. Il n'est pas difficile de construire les figures (schématiques), ni non plus de retrouver les droites de la figure originaire.

Soit premièrement *le centre de projection placé dans le pentagone dont les côtés sont des segments des droites* 1′, 2, 25, 36, 14. Alors nous savons (voir le n° 11.) que le contour sera composé de quatre branches dont les deux sont paraboliques, pendant que les deux autres ne s'étendent pas à l'infini. L'une de celles-ci sera tangente aux droites du double-six 146, l'autre à celles du double-six 135; nous les appellerons 146 et 135. L'une des branches paraboliques est tangente aux droites 2, 13, 5, 16, 4, 1′, 12, 3, 15, 6, 14, l'autre aux droites 1′, 26, 4′, 23, 5′, 2, 12, 6′ 24, 3′, 25. Nous avons donc indiqué quelles sont les 23 tangentes doubles de la seconde espèce (la droite à l'infini, trace du plan tangent au centre de projection, en est le 24^{me}), et à quelles branches elles sont tangentes. Nous y ajouterons que les droites du double-six fondamental, marquées de chiffres simples, sont encore les tangentes communes internes, et que la branche 135 est encore placée du côté interne de toutes les tangentes communes aux autres branches. Les tangentes doubles de la première espèce sont les droites 34 et 56, qui séparent et les branches 135 et 146, et les deux branches paraboliques, la droite 45, qui sépare les branches 135 et 146 des deux branches paraboliques, et la droite 36, qui est placée au dehors de toutes les branches.

Le point d'intersection des droites 14 et 25 se trouve du même côté de la droite 36 que les branches du contour: s'il franchit cette droite le pentagone où se trouve le centre de projection se transformera en un *tétragone de la première espèce.*

Le centre de projection se trouve (voir le n° 18.) sur la paroi commune aux ouvertures 526, 524 et 362, qui en sépare les deux dernières

de la première. Les droites par le centre de projection ne peuvent donc passer par ces ouvertures quant même elles soient „visibles". Les droites joignant le centre de projection à des points internes aux branches 146 et 135 passent, respectivement, par les ouvertures des mêmes noms; celles qui le joignent à des points internes à l'une ou l'autre des branches paraboliques passent par l'une ou l'autre des ouvertures 364 et 142. Les ouvertures 156, entre les branches 146 et 135, et 534 et 312 entre la branche 135 et les branches paraboliques, sont invisibles, comme dans le cas où le centre de projection se trouvait dans le triangle 14, 36, 52.

20. *Prenons ensuite pour centre de projection un point du tétragone de seconde espèce limité par les droites* 1′, 2, 26, 14. Alors, comme dans le cas précédent, le contour sera composé de deux branches tangentes, respectivement, aux droites du double-six 146 et à ceux du double-six 135, et de deux branches paraboliques tangentes, respectivement, aux droites 2, 13, 5, 16, 4, 1′, 12, 3, 15, 6, 14, et aux droites 1′, 25, 3′, 24, 6′, 2, 12, 5′, 23, 4′, 26. Seulement les ordres des points de contact ont subi à quelques petites modifications*). Celles-ci résultent d'une altération des situations des branches, dont aucune ne se trouve plus du côté interne à toutes les tangentes communes aux autres. Au contraire, la branche 135 a à présent par rapport à l'une des branches paraboliques la même situation, que la branche 146, par rapport à l'autre.

Les tangentes doubles de première espèce sont encore les droites 34, 56, 45 et 36; mais à présent 45 et 36 séparent les deux branches paraboliques, 34 et 56, les deux branches 146 et 135; 36 et 34 séparent 146 de l'une des branches paraboliques, et 45 et 56 séparent 135 de l'autre.

Le centre de projection se trouve encore sur les parois des ouvertures 526, 524 et 362. Les droites joignant le centre de projection à des points internes à la branche 146 ou 135, passent par l'ouverture du même nom, et celles qui le joignent à des points internes à l'une ou l'autre des branches paraboliques passent par l'une ou l'autre des ouvertures 534 et 142. (Dans le cas précédent il était par les ouvertures 364 et 142.) L'ouverture 156 entre les branches 146 et 135, l'ouverture 364 entre la branche 146 et l'une des branches paraboliques, et l'ouverture 123 entre la branche 135 et l'autre branche parabolique, sont invisibles.

*) Pour les branches paraboliques nous avons indiqué ces ordres, en commençant et finissant par les tangentes dont les points de contact sont voisins de ceux de la droite à l'infini.

21. Il n'est pas difficile à présent de s'imaginer les transitions des figures qui ont lieu lorsque le centre de projection franchit une des droites de la surface. Au moment de transition le contour présente un point double, à branches réelles si la droite a des points doubles réels, et à branches imaginaires si elle est une des droites du double-six fondamental.

Regardons par exemple la transition qui aura lieu si le centre de projection se meut du triangle 14, 36, 52 (cas de notre figure) au pentagone 1′, 2, 52, 36, 14 (position discutée dans le n° 19.). Au moment de transition les deux branches 524 et 362, dont l'une a obtenu déjà avant la transition des contacts réels avec la droite à l'infini, sont liées l'une à l'autre par un point double à l'infini. La projection de la droite 36 coïncide avec la droite à l'infini et va devenir ensuite tangente double de la première espéce, pendant que la droite à l'infini va devenir tangente commune à deux branches. De même les projections de 12 et 45 coïncident et vont changer de rôle. Les projections des droites

$$3', 6', 24, 25$$

coïncident avec celles de

$$6, 3, 15, 14,$$

et leurs contacts vont se transporter de l'une branche à l'autre. Les deux collections de droites joignant le centre de projection aux points internes aux deux branches passent, avant et après la transition, par les ouvertures 364 et 142, et elles sont aussi séparées pendant la transition*): la seule droite 36 en est une position limite commune. Les droites qui passaient, avant la transition, par l'ouverture 526 vont être remplacées par des droites passant par l'ouverture 146, pour la seule raison que le point de la surface d'où partent les droites se meut de la paroi de l'ouverture 146 à celle de 526.

Les transitions qui ont lieu lorsque le centre de projection franchit d'autres segments de droites à points doubles réels sont semblables à celle dont nous venons de parler: la projection de la droite dont il s'agit change de rôle avec la droite à l'infini, les deux branches qu'elle touche changent de caractère, et les quatre collections de droites qui ne rencontrent pas ultérieurement la surface restent séparées. Si le segment franchi est — comme dans le cas discuté — un segment a [notation du n° 7.], qui sépare un triangle d'un pentagone, ou un segment b, qui sépare un pentagone d'un tétragone de la première espèce,

*) En effet, le segment de 36 qui appartient à la paroi de l'ouverture 364 est limitée par les droites 14 et 45, et celui qui appartient à celle de 142, par 45 et 25, et ces ouvertures se trouvent dans le voisinage de 45 de côtés différents de la surface.

[le segment de 41 qui est côté commun au pentagone 1′, 2, 52, 36, 14 et au tétragone 1′, 6, 36, 14 peut servir d'exemple], l'une des deux ouvertures dont les parois sont séparées par le segment [524 et 364 dans l'exemple que nous venons de nommer] est visible de la figure placée sur la paroi de l'autre, et alors une des quatre collections de droites va passer par une nouvelle ouverture. Mais ce changement n'aura pas lieu, si le segment franchi est un segment c, parce que, d'un point de l'un des deux tétragones de la seconde espèce que sépare ce segment, l'ouverture dont la paroi est séparée de ce tétragone par le même segment n'est pas visible. [Le segment de 41 qui sépare le tétragone 1′, 2, 26, 14 du tétragone 1′, 6, 26, 14 peut servir d'exemple. En effet, nous avons vu, dans le n° 20., que l'ouverture 364 n'est pas visible du premier de ces tétragones.]

Regardons ensuite la transition qui aura lieu si le centre de projection se meut du pentagone 1′, 2, 52, 36, 14 (position discutée dans le n° 19.) au tétragone 1′, 2, 26, 14 (position discutée dans le n° 20.), en franchissant la droite à points doubles imaginaires 1′. Au moment de transition la branche parabolique tangente à 2, 13, 5 etc. se réduit à un point isolé à l'infini. La projection de la droite 1′ coïncide avec la droite à l'infini, les projections des droites

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

avec celles de

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16.$$

Après la transition une nouvelle branche parabolique, tangente aux mêmes droites que celle qui a disparu, commence à paraître au coin opposé du plan. Les droites qui, avant la transition, joignent le centre de projection aux points internes à la branche qui va disparaître passent par l'ouverture 364, celles qui, après la transition, le joignent aux points internes à la nouvelle branche passent par l'ouverture 534. Au moment de transition, chacune de ces collections se réduit à la seule droite 1′. La transition n'établit donc aucune connexion des deux collections. Les trois autres collections qui ne rencontrent la surface qu'au centre de projection passent après la transition par les mêmes ouvertures qu'avant elle. Les autres cas où le centre de projection franchit une droite à points doubles imaginaires ne diffèrent pas essentiellement de celui dont nous venons de parler.

22. Les discussions précédentes contiennent la démonstration de quelques-unes des propriétés des droites qui rencontrent la surface en un seul point. Leur généralité est prouvée par la circonstance que nous avons eu égard à toutes les positions possibles du centre de projection sur la surface.

1°. *Toute droite rencontrant la surface en un seul point passe par*

une seule de ses dix ouvertures. On aura ainsi une division de ces droites en dix collections (d'une infinité quadruple).

2°. *En un point quelconque de la surface passent des droites de quatre de ces dix collections* — de trois, dans le cas particulier où le point se trouve sur une des douze droites à points doubles imaginaires.

3°. *La collection passant par une ouverture n'est en connexion qu'avec celles qui passent par les six ouvertures dont les noms contiennent un seul des chiffres de celui de la première collection. Elles en est séparée par six complexes**) *de droites rencontrant des parties des segments qui séparent les parois des ouvertures.* Chacune de ces parties est composée d'un segment a et de deux segments b, ou bien, elle est interceptée par deux droites à points doubles imaginaires [voir le n° 21.].

Les 30 complexes qui séparent les dix collections de droites étant séparés entre eux, nous pourrons trouver le nombre qui exprime la connexion de la collection totale des droites qui ne rencontrent la surface qu'en un seul point, en nous demandant combien il faut de ces complexes pour lui donner une connexion simple.

Nous pouvons former plusieurs suites cycliques de 5 collections dont chacune n'est en connexion qu'avec la précedente et avec la consécutive. Les collections des ouvertures

524, 135, 526, 354, 516

en font, par exemple, une. On peut interrompre cette suite cyclique par un complexe — par celui, par exemple, qui sépare la dernière collection de la première — sans décomposer par cela la collection totale. Pour lier une des 5 autres collections à cette suite, sans établir de nouvelles connexions, il faut qu'on garde une seule de ses connexions avec les collections de la suite. Le nombre des connexions à garder est donc $4 + 5 = 9$, celui des connexions à interrompre par des complexes sera, par consèquent, $30 - 9 = 21$**). On voit donc que

4°. *Le nombre-maximum des complexes qui interrompent des connexions des droites rencontrant la surface en un seul point, sans décomposer la collection totale de ces droites, est égal à* 21.

23. La projection stéréographique d'une surface cubique, qui nous a été très utile pour l'étude des droites de la surface, n'aide pas moins

---

*) Le mot de complexe ne signifie ici qu'une partie *limitée* des droites qui rencontrent un segment d'une droite.

**) On peut établir la connexion simple en interrompant toutes les connexions des droites de deux ouvertures, à l'exception de celles qui se font par les complexes

56, 54, 51, 52; 43, 21, 41, 16, 24,

où nous avons donné aux complexes les noms attribués dans la table aux segments que leurs droites rencontrent.

à l'étude de ses autres courbes, par exemple à celle de ses sections planes. M. Klein*), en s'appuyant aux propriétés des surfaces à quatre points coniques, a prouvé qu'il existe trois groupes de collections (d'une infinité triple) de sections planes d'une surface cubique de première espèce qui sont composées d'un ovale et d'une branche d'ordre impair:

le *premier groupe* comprend 10 collections, où l'ovale, qui se trouve sur un triangle ne rencontre aucune des droites de la surface;

le *deuxième groupe* comprend 10 collections, où l'ovale, qui entoure une ouverture, rencontre toutes les droites d'un double-six;

le *troisième groupe* comprend 15 collections, où l'ovale rencontre 16 droites.

Toutes ces collections sont séparées entre elles; car des collections d'une infinité simple ne suffisent pas pour établir une connexion entre des collections d'une infinité triple.

En prouvant ces mêmes résultats au moyen des projections stéréographiques de la surface, ce qui se fait sans aucune difficulté, on trouve en même temps les résultats suivants, où o_r et i_r désignent, respectivement, les nombres des collections, appartenant au $r^{ième}$ groupe ($r = 1, 2, 3$), où il y a des ovales ou des branches d'ordre impair qui passent en le point de la surface dont il s'agit.

1°. Point d'un triangle**):

$o_1 = 1,\ i_1 = 0, 1, 2, 3, 4;\ o_2 = 3,\ i_1 = 3;\ o_3 = 3,\ i_3 = 3.$

2°. Point d'un pentagone ou d'un tétragone de première espèce

$o_1 = 0,\ i_1 = 0, 1, 2, 3, 4;\ o_2 = 3,\ i_2 = 3;\ o_3 = 4,\ i_3 = 3.$

3°. Point d'un tétragone de seconde espèce

$o_1 = 0,\ i_1 = 0, 1, 2, 3, 4;\ o_2 = 3,\ i_2 = 4;\ o_3 = 4,\ i_3 = 2.$

Le plan tangent appartient, comme position limite, à une des collections du premier, du troisième ou du deuxième groupe, suivant que le point de contact se trouve dans un triangle, dans un pentagone ou tétragone de la première espèce, ou dans un tétragone de la seconde espèce.

IV. Surfaces à 15 droites réelles***).

24. Nous avons déjà dit (dans le n° 3.) que, pour avoir une image (schématique) de la projection stéréographique d'une surface de la deuxième espece, vue d'un point d'un triangle, il suffit d'effacer dans notre figure une branche quelconque du contour, par exemple la branche

*) Mémoire cité.

**) On ne peut avoir $i_1 = 4$ que dans le cas où le point se trouve dans la partie du triangle où la courbure est hyperbolique.

***) Voir le n° 8.

135. Alors toutes les droites du double-six 135 deviennent imaginaires, et l'ouverture 135 cesse d'exister. Le double-six fondamental devient imaginaire, et celles de ses droites qui restent réelles: 2, 4, 6, 1′, 3′, 5′ sont les droites communes à lui et au double-six 246 qui devient aussi imaginaire. Les doubles-six 524, 146, 362 et 364, 526, 142 restent réels, quant même, dans chacun d'eux, les droites de deux couples deviennent imaginaires, et ils entourent encore des ouvertures visibles à notre point de vue. Les doubles-six 354, 516, 132 deviennent imaginaires, et les ouvertures qu'ils entouraient cessent d'exister. Mais ces ouvertures seront remplacées par trois nouvelles ouvertures invisibles, placées entre les branches du contour, et entourées des doubles-six réels, mais à quatre droites imaginaires, 162, 324, 546.

En même temps que l'ouverture 135, six des dix triangles de la surface cessent d'exister. Aux quatre triangles qui restent s'ajoutent deux qui ont pour périmètres ceux des triangles plans qui fermaient l'ouverture 135. Les autres triangles des mêmes plans (A et B) servent encore à fermer des ouvertures, de même que trois des triangles plans formés des droites qui entourent chacun des autres triangles de la surface, et nous ne rencontrons plus aucun plan tangent triple dont tous les triangles ferment des ouvertures, les plans C, D, E étant devenus imaginaires.

Les tables suivantes donnent un aperçu sur ces propriétés:

Triangle	Couples d'ouvertures visibles			Ouvertures invisibles
14, 36, 52 (F)	524 364	146 526	362 142	162, 324, 546
56, 12, 34 (A)	346 126	562 342	124 564	524, 146, 362
32, 54, 16 (B)	162 542	324 164	546 326	346, 562, 124
14, 56, 32 (G)	324 564	146 326	562 142	162, 524, 346
36, 12, 54 (H)	546 126	362 542	124 364	324, 146, 562
52, 34, 16 (J)	162 342	524 164	346 526	546, 362, 124

Ouverture	Triangles fermants	Droite correspondante
524	56, 21, 43 (*A*) et 56, 23, 41 (*G*)	56
146	12, 43, 65 (*A*) et 12, 45, 63 (*H*)	12
362	34, 65, 21 (*A*) et 34, 61, 25 (*J*)	34
364	32, 61, 45 (*B*) et 32, 65, 41 (*G*)	32
526	54, 23, 61 (*B*) et 54, 21, 63 (*H*)	54
142	16, 45, 23 (*B*) et 16, 43, 25 (*J*)	16
162	14, 63, 25 (*F*) et 14, 65, 23 (*G*)	14
324	36, 25, 41 (*F*) et 36, 21, 45 (*H*)	36
546	52, 41, 63 (*F*) et 52, 43, 61 (*J*)	52

Les lettres *A*, *B*, *F* etc. indiquent les plans tangents triples où se trouvent les triangles que nous venons d'énumérer, et nous distinguons, comme dans le n° 15., par l'ordre des chiffres qui composent les notations des côtés de ces triangles, les deux segments interceptés sur une droite par les deux autres droites dans un de ces plans tangents triples. Mais le segment 12 d'un triangle du plan *A* est différent du segment 12 d'un triangle du plan *H* etc.

25. On voit que la symmétrie 6-tuple de la surface consiste en deux symmétries triples; car et ses trois premiers triangles, dont les périmètres se trouvent dans les plans *F*, *A* et *B*, et ses trois derniers triangles, dont les périmètres se trouvent dans les plans *G*, *H*, *J*, ont entre eux des relations différentes des relations des trois premiers triangles avec les trois derniers. Si l'on écrit les noms des ouvertures de la manière suivante (en forme de *déterminant*)

524, 146, 362
346, 562, 124
162, 324, 546,

les trois séries horizontales formeront par rapport aux premiers triangles, les colonnes verticales par rapport aux derniers, les deux triples d'ouvertures visibles et le triple d'ouvertures invisibles. Deux ouvertures ont entre elles des relations différentes, suivant qu'elles sont placées dans la même série, horizontale ou verticale, du déterminant, ou non. Dans le premier cas leurs notations n'ont qu'un seul chiffre commun, dans le second elles en ont deux.

Deux des segments d'une droite à points doubles réels séparent la paroi d'une ouverture, *correspondant à la droite*, de deux triangles de la surface: la continuation de la face interne de la paroi de l'ouverture sera la face convexe du triangle. Le segment supplémentaire à chacun de ces deux côtés de triangles, sépare les parois des deux ouvertures qui correspondent aux autres côtés du même triangle: la conti-

nuation de la face interne de l'une de ces parois est face externe de l'autre. [Il faut qu'on se rappelle que chacun des deux segments de la droite qui sont côtés de triangles se trouve sur le segment supplémentaire à l'autre, et que les autres parties de la droite appartiennent, à la fois, à tous les deux segments supplémentaires.]

Pour trouver les nombres des polygones qui composent la paroi d'une ouverture, ou la paroi commune à deux ouvertures, il est commode de compter les points d'intersection de droites à points doubles imaginaires qui se trouvent sur ces parties de la surface (voir le n° 8.). On trouve les résultats suivants:

La paroi d'une ouverture est composée de

0, 1, 2, 3, 4 triangles
6, 7, 8, 9, 10 pentagones } 16 pentagones et tétragones.
10, 9, 8, 7, 6 tétragones }

La paroi commune à deux ouvertures dont les noms n'ont qu'un seul chiffre commun, est composée de 0—2 triangles et de 4 pentagones et tétragones (dont les nombres respectifs ne sont pas déterminés par celui des triangles). Les ouvertures se trouvent du même côté de cette paroi commune.

La paroi commune à deux ouvertures dont les notations ont deux chiffres communs, est composée de 8 pentagones et tétragones; elle sépare les ouvertures.

Un triangle de la surface fait partie des parois des trois ouvertures dont les contours sont visibles de points placés sur lui. Les trois ouvertures se trouvent du même côté du triangle.

Un pentagone ou tétragone fait partie des parois de quatre ouvertures: il en sépare les deux des deux autres.

26. Comme un triangle fait partie des parois des ouvertures à contours visibles, une droite sortant d'un point d'un triangle et n'ayant pas des intersections ultérieures, passe seulement par une ouverture visible à contour invisible. On voit de même, en effaçant la branche 135 et ses tangentes de la figures décrite dans le n° 19. (ou de celle qui est décrite dans le n° 20.), qu'on peut faire passer par un point quelconque d'un pentagone ou tétragone trois collections de droites sans des intersections ultérieures avec la surface, et que chacune de ces collections passe par une seule ouverture. On peut donc appliquer à la surface actuelle les trois premiers théorèmes exposés dans le n° 22., en y remplaçant seulement le *nombre total des collections de droites par* 9, *celui des collections contenant des droites passant en un point de la surface, par* 3, *et celui des collections en connexion avec une collection donnée, par* 4. Ces dernières collections passent par les ouvertures qui, dans le „déterminant" du n° 25., se trouvent dans la même série horizontale ou verticale que l'ouverture donnée.

Les suites cycliques se composent à présent de toutes les collections à l'exception des trois qui passent par trois ouvertures qui formeraient un terme du déterminant. On trouve, en procédant comme dans le n° 22.,

que *le nombre-maximum des complexes qui interrompent des connexions des droites rencontrant la surface en un seul point, sans décomposer la collection totale, est égal à* 10.

27. Les collections, séparées entre elles, de sections planes à ovales réels n'appartiennent à présent qu'à deux groupes:

le *premier groupe* comprend 6 collections, où l'ovale, qui se trouve sur un triangle, ne rencontre aucune des droites de la surface;

le *second groupe* comprend 9 collections, où l'ovale, qui entoure une ouverture, rencontre toutes les droites réelles d'un double-six réel.

En donnant aux notations o_1, i_1, o_2, i_2 les mêmes significations que dans le n° 23., on trouve encore les résultats suivants:

1°. Point d'un triangle:

$$o_1 = 1, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 3, \quad i_2 = 3.$$

Le plan tangent appartient à une collection du premier groupe.

2°. Point d'un pentagone ou d'un tétragone:

$$o_1 = 0, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 4, \quad i_2 = 3.$$

Le plan tangent appartient à une collection du second groupe.

V. Surfaces à 7 droites réelles*).

28. On aura une image de la projection stéréographique d'une surface de la troisième espèce, vue d'un point d'un triangle, en effaçant dans notre figure les deux branches 135 et 146 du contour. Alors toutes les droites de ces deux doubles-six deviennent imaginaires.

Les droites réelles du double-six 524 sont les mêmes que celles du double-six 362, et il est aussi évident que les deux branches du contour doivent appartenir à la même ouverture. On pourrait dire que cette ouverture visible a deux contours visibles (voir le n° 14.). De même les droites réelles du double-six 324 sont les mêmes que celles du double-six 526: elles entourent une ouverture invisible. Le centre de projection se trouve dans le triangle: 12, 36, 54. Une déformation analogue à celle du n° 13. n'aura pas des effets essentiels.

La table suivante donne un aperçu sur les propriétés de la surface (comparer aux tables du n° 24.):

Triangle	Ouverture visible	Ouverture invisible	Triangles fermant l'ouverture visible
12, 36, 54 12, 63, 45 } (H)	524	526	21, 43, 56 21, 34, 65 } (A)
12, 34, 56 12, 43, 65 } (A)	526	524	21, 63, 54 21, 36, 45 } (H)

On voit que les deux triangles du plan A (ou H) qui ont pour base commune le segment 12 (qui dans le plan H est différent du segment 12

*) Voir le n° 9.

dans le plan A) ont les mêmes périmètres que deux triangles de la surface, pendant que les deux autres triangles du même plan, qui ont pour base commune le segment 21, ferment l'ouverture qui n'est pas visible des deux triangles de la surface que nous venons de nommer. La continuation de la face interne de la paroi d'une ouverture au-delà du segment 21, côté commun aux deux triangles qui la ferment, est face externe de la même ouverture.

Un triangle de la surface se trouve sur la paroi de l'ouverture qui en est visible, et il présente sa concavité du côté de l'ouverture. Les quatre hexagones de la surface se trouvent sur les parois de toutes les deux ouvertures, et ils les séparent.

Dans tous les cas les points de la surface se trouvent sur les parois des ouvertures qui en sont visibles. Aucune droite ne peut donc „passer par“ une ouverture, ce qui résulte aussi de la circonstance que tous ses deux triangles fermants se trouvent dans le même plan. On ne peut, par conséquent, trouver la connexion des droites rencontrant la surface en un seul point par les mêmes procédés qui y servaient pour les surfaces à 27 ou 16 droites; mais on trouve par d'autres considérations que *le nombre-maximum des complexes qui interrompent des connexions des droites rencontrant la surface à 7 droites réelles en un seul point sans décomposer la collection de ces droites, est égal à 3.* On peut se servir, à cet effet, du complexe des droites de la collection qui rencontrent une des droites à points doubles imaginaires, et des deux complexes qui rencontrent les deux segments interceptés sur la droite 12 par les droites $1'$ et 2, et qui ne sont pas en connexion avec le premier complexe. Ces deux derniers complexes sont séparés l'un de l'autre, parce que le cône qui en renferme les droites sortant d'un point de 12 se réduit à zéro au moment où ce point est un point d'intersection avec $1'$ ou 2. [Il existe un autre complexe de droites qui ne rencontrent la surface qu'en des points de 12: il est en connexion avec ceux des droites qui ne la rencontrent qu'en des points de $1'$ ou 2]*).

Les collections, séparées entre elles, de *sections planes* à ovales appartiennent à deux groupes, dont le premier comprend quatre collections, où l'ovale, qui se trouve sur un triangle, ne rencontre aucune des droites de la surface, pendant que le second comprend deux collections, où l'ovale, qui entoure une ouverture, rencontre quatre droites. On trouve encore, avec les notations des n^{os} 23. et 27., les résultats suivants:

1°. Point d'un triangle:

$$o_1 = 1, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 1, \quad i_2 = 1.$$

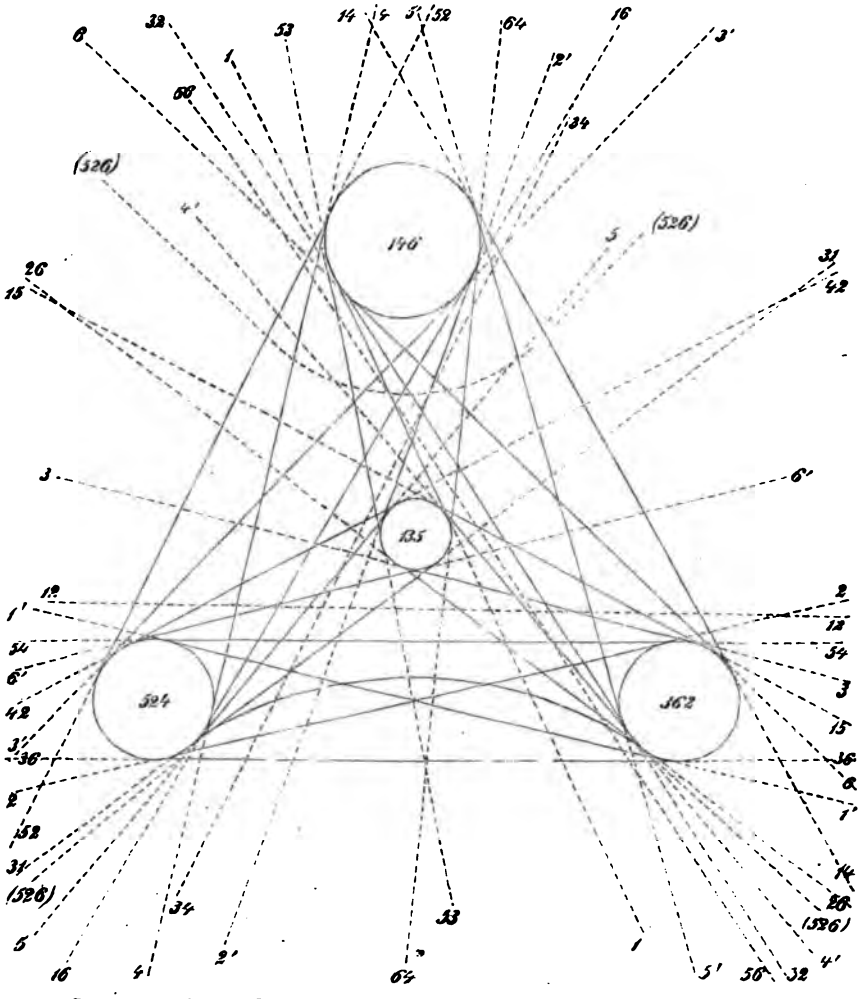
Le plan tangent appartient à une collection du premier groupe.

2°. Point d'un hexagone:

$$o_1 = 0, \quad i_1 = 0, 1, 2, 3, 4; \quad o_2 = 2, \quad i_2 = 1.$$

Le plan tangent appartient à une collection du second groupe.

*) Comparer aux n° 21 et 26. de mon mémoire sur les formes des quartiques planes.



Les propriétés des *deux espèces de surfaces à 3 droites* sont assez simples pour nous dispenser d'y insister ici. Nous nous bornerons à la remarque qu'un seul complexe suffit pour donner une connexion simple à la collection de droites rencontrant la surface de la quatrième espèce, ou la nappe d'ordre impair de la surface de la cinquième espèce, en un seul point. Si, pour la dernière surface, on enlève de la collection les droites qui en rencontrent la nappe d'ordre pair, on aura besoin de deux complexes.

Nous ferons encore remarquer que les projections stéréographiques sont aussi utiles pour l'étude de la connexion, soit des surfaces elles-mêmes, soit de l'espace où se trouve une de ces surfaces.

Copenhague, 12 avril 1874.

Note über die Rotation eines starren Körpers.

Von W. Frahm in Tübingen.

Nachdem Jacobi die Lage des Körpers für ein specielles, im Raume bewegliches Coordinatensystem durch Θ-Functionen bestimmt hat, scheint er nicht ohne Interesse zu zeigen, dass eine ganz ähnliche Lösung für ein beliebiges, im Raume festes Coordinatensystem stattfindet, zu der man ausserdem leichter gelungen kann. Sind p, q, r die Componenten der Winkelgeschwindigkeit um die Hauptachsen des Drehcentrums, A, B, C die Trägheitsmomente für dieselben, so hat man die Euler'schen Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (B-C)\,qr \\ B\frac{dq}{dt} = (C-A)\,rp \\ C\frac{dr}{dt} = (A-B)\,pq\,. \end{cases}$$

Ferner:

$$(2)\qquad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2 \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = g^2 \\ p^2 + q^2 + r^2 = \omega\,, \end{cases}$$

wo h, g Constanten, ω das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit bedeutet. Man erhält:

$$(3)\qquad dt = \frac{\frac{1}{2}\,d\omega}{\sqrt{(\omega-\lambda)(\mu-\omega)(\omega-\nu)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu-\nu}}\,\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

wenn man setzt:

$$(4)\qquad \begin{cases} BC\lambda = (B+C)\,h^2 - g^2\,, \\ CA\mu = (C+A)\,h^2 - g^2\,, \\ AB\nu = (A+B)\,h^2 - g^2\,, \\ \omega = \mu - (\mu-\lambda)\sin^2\varphi\,. \end{cases}$$

Es ist mithin $\varphi = \operatorname{am}(t\sqrt{\mu-\nu}) = \operatorname{am}(u)$ für $u = t\sqrt{\mu-\nu}$.

Die 9 Richtungscosinus der Hauptachsen gegen ein beliebiges im Raume festes Coordinatensystem sind dann particuläre Integrale der Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} \frac{du}{dt} = vr - wq\,, \\ \frac{dv}{dt} = wr - up\,, \\ \frac{dw}{dt} = uq - vp\,, \end{cases}$$

wo für p, q, r ihre Werthe in Function der Zeit einzusetzen sind, welche werden (wie bei Jacobi):

$$(6)\qquad \begin{cases} p = -\frac{g}{A}\cdot\frac{\Theta_1(i\alpha)\,\mathsf{H}_1(u)}{\mathsf{H}(i\alpha)\,\Theta(u)}\,, \\ q = \frac{g}{B}\cdot\frac{\Theta(i\alpha)\,\mathsf{H}(u)}{\mathsf{H}(i\alpha)\,\Theta(u)}\,, \\ r = \frac{1}{i}\,\frac{g}{C}\cdot\frac{\mathsf{H}_1(i\alpha)\,\Theta_1(u)}{\mathsf{H}(i\alpha)\,\Theta(u)}\,, \end{cases}$$

wobei

$$\sin\operatorname{am}(i\alpha) = g\sqrt{\frac{B-C}{B(g^2-Ch^2)}},\quad k = \sqrt{\frac{(A-B)(g^2-Ch^2)}{(B-C)(Ah^2-g^2)}},\quad i=\sqrt{-1}.$$

Man hat daher das Problem gelöst, wenn man die Gleichungen (5) allgemein integriren kann, wozu folgendes Verfahren führt. Jene Gleichungen geben:

$$(7)\qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 1\,, \\ Apu + Bqv + Crw = D\,, \end{cases}$$

wo D eine Functionsconstante ist. Sei ferner

$$(8)\qquad pu + qv + rw = z\,,$$

$$(9)\qquad \frac{dz}{dw} = u\frac{dp}{dw} + v\frac{dq}{dw} + w\frac{dr}{dw}\,.$$

Eliminirt man jetzt die Gleichungen u, v, w, p, q, r, $\frac{dp}{dw}$, $\frac{dq}{dw}$, $\frac{dr}{dw}$ mittelst der Gleichungen 1, 2, 3, 7, 8, so geht q_1 in eine Differentialgleichung*) wischen z_1 und w über, welcher man leicht die Form geben kann:

$$(10)\qquad \frac{(B-C)(A-C)(A-B)\left[2\,dz\cdot(g^2w-h^4)+dw\,(Dh^2-zg^2)\right]}{g(^2w-h^4)\cdot\sqrt{\dfrac{(g^2w-h^4)\,(g^2-D^2)-g^2z-Dh^2)^2}{g^2}}} = \frac{h^2\,dw}{g^2pqr} + \frac{(Ah^2-g^2)(Bh^2-g^2)(g^2-Ch^2)\,dw}{g^2pqr\,(g^2w-h^4)}.$$

*) Die Aufstellung und Integration dieser Gleichung ist in etwas anderer Form schon von Euler angegeben. Mém. de Berlin. 1758 p. 154. Man erhält dieselbe auch durch den letzten Multiplicator.

Die Integration giebt

$$(11)\quad \begin{cases} \text{Arc sin}\left[\dfrac{Dh^2 - zG^2}{(G^2w-h^4)\sqrt{G^2-D^2}}\right] = \dfrac{h^2}{G}u - \displaystyle\int_0^u \dfrac{i\cdot\operatorname{cotg}\operatorname{am} i\alpha\cdot\Delta\operatorname{am} i\alpha\cdot du}{1-k^2\sin^2\operatorname{am} i\alpha\cdot\sin^2\operatorname{am} u} \\ \qquad = u\left[\dfrac{h^2}{G} - \dfrac{H'(i\alpha)}{H(i\alpha)}\right] + \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\Theta(u-i\alpha)}{\Theta(u+i\alpha)} \\ \qquad = \sigma\cdot u + \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{\Theta(u-i\alpha)}{\Theta(u+i\alpha)} = U. \end{cases}$$

Die Werthe von u, v, w aber werden

$$(12)\quad \begin{cases} u = \dfrac{Ap\cdot D}{G} - \sqrt{\dfrac{G^2-D^2}{G^2w-h^4}}\cdot\left[\dfrac{\sin U\cdot p}{G}\cdot(G^2-Ah^2) + (B-C)qr\cdot\cos U\right], \\ v = \dfrac{Bq\cdot D}{G} - \sqrt{\dfrac{G^2-D^2}{G^2w-h^4}}\cdot\left[\dfrac{\sin U\cdot q}{G}\cdot(G^2-Bh^2) + (C-A)rp\cdot\cos U\right], \\ w = \dfrac{Cr\cdot D}{G} - \sqrt{\dfrac{G^2-D^2}{G^2w-h^4}}\cdot\left[\dfrac{\sin U\cdot r}{G}\cdot(G^2-Ch^2) + (A-B)pq\cdot\cos U\right]. \end{cases}$$

Nun ist aber:

$$\cos U = \frac{e^{i\sigma u}\cdot\Theta(u-i\alpha) + e^{-i\sigma u}\cdot\Theta(u+i\alpha)}{2\sqrt{\Theta(u+i\alpha)\,\Theta(u-i\alpha)}}$$

$$\sin U = \frac{e^{-i\sigma u}\cdot\Theta(u-i\alpha) - e^{-i\sigma u}\cdot\Theta(u+i\alpha)}{2i\sqrt{\Theta(u+i\alpha)\,\Theta(u-i\alpha)}}.$$

Setzt man dies ein und berücksichtigt, dass

$$\cos\operatorname{am} i\alpha = -\frac{C(Bh^2-G^2)}{B(G^2-Ch^2)} \qquad \Delta\operatorname{am} i\alpha = \frac{A(Bh^2-G^2)}{B(Ah^2-G^2)}$$

$$\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}\cdot\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)},$$

$$1 - k^2\sin^2\operatorname{am} i\alpha\sin^2\operatorname{am} u = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(u+i\alpha)\,\Theta(u-i\alpha)}{\Theta^2(u)\,\Theta^2(i\alpha)},$$

so findet sich zunächst z. B.:

$$= \frac{\Theta_1(i\alpha)H_1(u)}{H(i\alpha)\Theta(u)}$$

$$\cdot\frac{(\Theta(0))\sqrt{G^2-D^2}\cdot e^{i\sigma u}\cdot\Theta(u-i\alpha)\left[\cos\operatorname{am} u\cdot\cos\operatorname{am} i\alpha + \sin\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u\cdot\Delta\operatorname{am} i\alpha\sin\operatorname{am} i\alpha\right]}{\Theta(u)\,H(i\alpha)\,(1-k^2\sin^2\operatorname{am} i\alpha\sin^2\operatorname{am} u)\sin\operatorname{am} i\alpha}$$

$$-\frac{(\Theta(0))\sqrt{G^2-D^2}\cdot e^{-i\sigma u}\Theta(u+i\alpha)\left[\cos\operatorname{am} u\cdot\cos\operatorname{am} i\alpha - \sin\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u\cdot\Delta\operatorname{am} i\alpha\sin\operatorname{am} i\alpha\right]}{\Theta(u)\,H(i\alpha)\,(1-k^2\sin^2\operatorname{am} i\alpha\sin^2\operatorname{am} u)\sin\operatorname{am} i\alpha}.$$

Indem man daher die Additionstheoreme anwendet und zu den Θ-Functionen zurückgeht, erhält man die schliessliche Endform der Integrale in der Gestalt:

$$u = \frac{\Theta_1(i\alpha)\,H_1(u) - \Theta_1(0)\sqrt{G^2-D^2}\left[e^{i\sigma u}\cdot H_1(u-i\alpha) + e^{-i\sigma u}\cdot H_1(u+i\alpha)\right]}{2\,\Theta(u)\,H(i\alpha)},$$

$$v = \frac{\Theta(i\alpha)\,\mathrm{H}(u) - \Theta(0)\sqrt{G^2 - D^2}\,\left[e^{i\sigma u}\cdot \mathrm{H}(u - i\alpha) + e^{-i\sigma u}\cdot \mathrm{H}(u + i\alpha)\right]}{2\,\Theta(u)\,\mathrm{H}(i\alpha)},$$

$$w = \frac{\mathrm{H}_1(i\alpha)\Theta_1(u) - \Theta_1(0)\sqrt{G^2 - D^2}\,\left[e^{i\sigma u}\cdot \Theta_1(u - i\alpha) - e^{-i\sigma u}\cdot \Theta_1(u + i\alpha)\right]}{2i\,\Theta(u)\,\mathrm{H}(i\alpha)}.$$

Man übersieht sofort, wie man hieraus die Jacobi'schen Formeln für die 9 Cosinus ableiten kann, nur ist dabei zu berücksichtigen, dass die von Jacobi gebrauchte Constante: $ia = K - i\alpha$ ist.

Tübingen, 11. März 1874.

Ueber gewisse Differentialgleichungen.

Von W. Fraihm in Tübingen.

I. In einer berühmten Abhandlung über schiefe Determinanten stellt Cayley die Aufgabe, diejenigen Differentialgleichungen aufzusuchen, welche im Falle von beliebig vielen Veränderlichen den bekannten Euler'schen, bei dem Problem der Rotation eines starren Körpess angewendeten entsprechen. Es ist mir gelungen, diese Gleichungen aufzustellen und eine Anzahl von Integralen derselben aufzufinden. Man kann diese Gleichungen in eine gewisse kanonische Form bringen, worüber zunächst der folgende Satz angeführt sein möge:

Es sei das System von $\frac{n \cdot n-1}{2}$ Differentialgleichungen:

$$(1) \quad 0 = T_{ik}\frac{dr_{ik}}{dt} + \sum_{\mu}(T_{i\mu} - T_{k\mu})r_{i\mu}r_{k\mu} \qquad (i, k, \mu = 1, 2 \cdots n),$$

wo $r_{ik} = -r_{ki}$, die von t abhängenden Veränderlichen, $T_{ik} = T_{ki}$, $T_{ii} = 0$ aber Constante bedeuten, vorgelegt; ist dann λ ein willkührlicher Parameter, so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & T_{12}r_{12} & T_{13}r_{13} & \cdots & T_{1n}r_{1n} \\ T_{21}r_{21} & \lambda & T_{23}r_{23} & \cdots & T_{2n}r_{2n} \\ T_{31}r_{31} & T_{32}r_{32} & \lambda & \cdots & T_{3n}r_{3n} \\ \cdots & & & & \\ T_{n1}r_{n1} & T_{n2}r_{n2} & \cdots & & \lambda \end{vmatrix}$$

ein Integral jenes Systems. Ein weiteres Integral ist:

$$T_{12}r_{12}^2 + T_{13}r_{13}^2 + \cdots = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k} T_{ik}r_{ik}^2 = \text{const.}$$

In der Entwickelung der eben geschriebenen Determinante verschwinden bekanntlich die Coefficienten der ungeraden oder der geraden

Potenzen von λ, je nachdem n gerade oder ungerade ist (Baltzer, Det. S. 62). Wenn also $\varkappa$ die grösste ganze in $\frac{n}{2}$ enthaltene Zahl bezeichnet, so giebt jene Entwickelung $\varkappa$ Integrale, indem man jeden Coefficienten einer beliebigen Constanten gleich setzt. Für $n = 3$ hat man die erwähnten Euler'schen Gleichungen, und kann mit Hülfe der gefundenen Integrale sofort das Problem auf Quadraturen zurückführen. Noch mag bemerkt werden, dass der Multiplicator der Gleichungen (1) gleich Eins ist, indem r_{ik} unter dem Summenzeichen nicht vorkommt.

II. Um zu zeigen, dass die Gleichungen (1) wirklich den Euler'schen entsprechen und um sofort zu der kanonischen Form zu gelangen, bemerke ich, dass jene bekanntlich auf rein algebraischem Wege durch eine Umformung der drei Differentialgleichungen erhalten werden, welche die Erhaltung der Momente ausdrücken. Aber die Letzteren sind von einer Form, so, dass man sofort übersieht, welche Gleichungen im Falle von beliebig vielen Veränderlichen an deren Stelle treten müssen. Des kürzeren Ausdrucks wegen wählen wir die geometrische Bezeichnungsweise und betrachten ein Element in einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen. Um aber noch mehr Uebersichtlichkeit zu gewinnen, beschränken wir uns auf den Fall $n = 4$, da die gleiche Rechnung für ein beliebiges n zum Ziele führt. Es sei nunmehr:

$$(1^a) \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = C$$

die Determinante einer orthogonalen Substitution, $y_1 y_2 y_3 y_4$ die Coordinaten eines festen Elements; werden die c_{ik} als Functionen eines Parameters t (Zeit) angesehen, so kann man setzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + c_{13} y_3 + c_{14} y_4 \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + c_{23} y_3 + c_{24} y_4 \\ x_3 = c_{31} y_1 + c_{32} y_2 + c_{33} y_3 + c_{34} y_4 \\ x_4 = c_{41} y_1 + c_{42} y_2 + c_{43} y_3 + c_{44} y_4 \,. \end{cases}$$

Die Grössen c_{ik} hängen bekanntlich von sechs $\left(\text{allgemein } \frac{n.n-1}{2}\right)$ Parametern ab; um diese und also auch die c_{ik} als Functionen von t zu definiren, kann man also 6 Differentialgleichungen aufstellen. Wählen wir beliebig viele (etwa s) constante Elemente $y^{(s)}$ und ordnen jedem einen constanten Coefficienten m_s zu. Man erhält alsdann ebensoviele

Werthsysteme der x und kann nunmehr folgende 6 $\left(\frac{n \cdot n-1}{2}\right)$ Differentialgleichungen aufstellen:

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_s m_s \left(x_i^{(s)} \frac{dx_k^{(s)}}{dt} - x_k^{(s)} \frac{dx_i^{(s)}}{dt} \right), \tag{3}$$

welche den Gleichungen für die Erhaltung der Momente analog gebildet sind. Sollten die Elemente stetig auf einander folgen und deren unendlich viele vorhanden sein, so müsste die Summe in ein bestimmtes vierfaches Integral übergehen. Um das System (3) umzuformen, setzen wir:

$$\begin{cases} r_{ik} = -r_{ki} = c_{1i} \frac{dc_{1k}}{dt} + c_{2i} \frac{dc_{2k}}{dt} + c_{3i} \frac{dc_{3k}}{dt} + c_{4i} \frac{dc_{4k}}{dt}, \\ r_{ii} = 0, \qquad (i, k = 1, 2, 3\ 4). \end{cases} \tag{4}$$

Daraus findet man:

$$\frac{dc_{ik}}{dt} = r_{k1} c_{i1} + r_{k2} c_{i2} + r_{k3} c_{i3} + r_{k4} c_{i4}. \tag{5}$$

Das System der y kann man, wie aus der Theorie der Trägheitsmomente bekannt ist, immer und im Allgemeinen nur auf eine Weise so wählen, dass:

$$\sum_s m_s y_i^{(s)} y_k^{(s)} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4), \tag{6}$$

wenn i von k verschieden ist. Setzt man noch:

$$T_{ik} = \sum_s m_s (y_i^{(s)2} + y_k^{(s)2}), \tag{7}$$

so findet man, wenn man nach den Gl. (2) $\frac{dz_i}{dt}$ bildet (wobei die y als Constanten anzusehen sind) und mit Hülfe von (5), (6), (7) reducirt:

$$\begin{aligned} \sum_s m_s \left(x_i^{(s)} \frac{dx_k^{(s)}}{dt} - x_k^{(s)} \frac{dx_i^{(s)}}{dt} \right) = {} & T_{12} r_{12} C_{ik,12} + T_{13} r_{13} C_{ik,13} \\ & + T_{14} r_{14} C_{ik,14} + T_{23} r_{23} C_{ik,23} \\ & + T_{24} r_{24} C_{ik,24} + T_{34} r_{34} C_{ik,34}. \end{aligned} \tag{8}$$

Hier sind $C_{ik,uv}$ diejenigen zweigliedrigen Minoren, welche durch Kreuzung der i^{ten} und k^{ten} Vertikalreihe mit der u^{ten} und v^{ten} Horizontalreihe aus C (1^s) erhalten werden. Man differentiire nunmehr die Gleichungen (8) nach t und multiplicire dieselben nach einander mit den Grössen der ersten, zweiten $\cdots$ sechsten Horizontalreihe aus folgendem Schema:

$$C_{12,12}\ C_{13,12}\ C_{14,12}\ C_{23,12}\ C_{24,12}\ C_{34,12}$$
$$C_{12,13}\ C_{13,13}\ C_{14,13}\ C_{23,13}\ C_{24,13}\ C_{34,13}$$
$$\cdots\cdots$$
$$C_{12,34}\ C_{13,34}\ C_{14,34}\ C_{23,34}\ C_{24,34}\ C_{34,34}$$

und addire jedesmal; dann kann man nach bekannten Determinantensätzen die Coefficienten aller Grössen $T_{ik}r_{ik}$ zu zweigliedrigen Determinanten zusammenziehen. Wegen der Relationen zwischen den c_{ik} fallen hierbei aber jedesmal zwei Glieder aus, und in den übrigen vier kommen die c_{ik} nicht mehr explicite, sondern nur in den Verbindungen r_{ik} vor, so dass man die 6 Differentialgleichungen findet:

$$(9)\quad \begin{cases} 0 = T_{12}\frac{dr_{12}}{dt} + (T_{13} - T_{23})\, r_{13}r_{23} + (T_{14} - T_{24})\, r_{14}r_{24} \\ 0 = T_{13}\frac{dr_{13}}{dt} + (T_{12} - T_{32})\, r_{12}r_{32} + (T_{14} - T_{34})\, r_{14}r_{34} \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 = T_{34}\frac{dr_{34}}{dt} + (T_{31} - T_{41})\, r_{31}r_{41} + (T_{32} - T_{42})\, r_{32}r_{42}\,. \end{cases}$$

Aber diese ergeben sich wirklich aus (1), wenn man $n = 4$ setzt.

III. Wenn alle Buchstaben und Zeichen die eingeführte Bedeutung beibehalten, so kann man die Function bilden:

$$(10)\qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_s m_s \frac{(dx_1^{(s)2} + dx_2^{(s)2} + \cdots + dx_n^{(s)2})}{dt^2}\,.$$

Wenn man nun beachtet, dass die x Functionen der c_{ik} sind, mithin von $\frac{n\cdot n-1}{2}$ Parametern abhängen, so findet man, dass die Gleichungen (3) sich aus der Hypothese, dass $\delta\int T dt = 0$ sein soll, also aus der Gleichung des Hamilton'schen Princips ableiten lassen. Nach Einführung der Grössen r_{ik} aber verwandelt sich T in eine quadratische Form der letzteren Grössen, deren $\frac{n\cdot n-1}{2}\left(\frac{n\cdot n-1}{2}+1\right)$ Coefficienten aber nun von den $\frac{n\cdot n+1}{2}$ Summen: $\sum_s m_s y_i^{(s)} y_k^{(s)}$ abhängen. Es soll aber gezeigt werden, dass auf anderem Wege Gleichungen abgeleitet werden können, welche von der Form (1) sind, und zwar so, dass man annimmt, T sei als quadratische Function der Grössen r_{ik} mit *beliebigen* Coefficienten gegeben, und ferner voraussetzt, dass $\delta\int T dt = 0$ ist.

Es sei aber:

$$(11)\qquad T = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k,l,m} \Theta_{ik,lm} r_{ik} r_{lm}\,,$$

wo die Coefficienten $\Theta_{ik,lm} = \Theta_{lm,ik}$ ganz willkührliche sind: $P_{ik} = 0$ sei irgend eine der auf Null gebrachten Gleichungen (4) und $\Gamma_{ik} = 0$ irgend eine der $\frac{n \cdot n + 1}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten c_{ik}. Ferner seien ϱ_{ik}, γ_{ik} unbestimmte Factoren, welche nach den Regeln der Variationsrechnung eingeführt werden müssen, um nach Reduction von $\delta \int T dt$ den Coefficienten jeder Variation Null setzen zu können. Wir haben also die Function zu bilden:

$$(12) \qquad \Omega = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \Theta_{ik,lm} r_{ik} r_{lm} + \sum_{ik} \varrho_{ik} P_{ik} + \sum_{ik} \gamma_{ik} \Gamma_{ik} .$$

Aus $\delta \int \Omega dt = 0$ ergiebt sich nun zunächst:

$$(13) \qquad \frac{\partial T}{\partial r_{ik}} = \varrho_{ik} .$$

Ferner erhält man die n^2 Gleichungen:

$$(14) \qquad 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial c_{ik}} - \frac{d \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial c'_{ik}}}{dt}; \qquad c'_{ik} = \frac{d c_{ik}}{dt} .$$

Entwickelt man das System (14) und setzt für die ϱ_{ik} ihre Werthe aus (13), so erübrigt nur noch, die Factoren γ_{ik} zu eliminiren. Die hierzu führende etwas weitläufige Rechnung, welche der von Herrn Kirchhoff (Borchardt's Journ. Bd. 71, S. 241—46) geführten ähnlich ist, möge übergangen werden, indem sie besondere Schwierigkeiten nicht darbietet. Man findet aber, nachdem alle Reductionen gemacht sind, und unter Anwendung der Abkürzung:

$$(15) \qquad t_{\mu s} = \frac{\partial T}{\partial r_{\mu s}}$$

das folgende System:

$$(16) \qquad 0 = \frac{d}{dt} \sum_{\mu,s} t_{\mu s} \cdot C_{ik,\mu s} ,$$

wo die $C_{ik,\mu s}$ die oben definirten Minoren der Determinante der c_{ik} sind. Aus (16) findet man dann durch die in II. geführte Rechnung:

$$(17) \quad 0 = \frac{d t_{ik}}{dt} + \sum_{s} (r_{is} t_{ks} - r_{ks} t_{is}) \qquad i, k, s = 1, 2 \cdots n) .$$

IV. Ich sage nun, dass man von diesem System Integrale findet, indem man die schiefe Determinante:

$$(17^a) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & \lambda & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \lambda & \cdots & t_{3n} \\ \cdots & \cdots & & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \Delta$$

nach Potenzen von λ entwickelt und jeden Coefficienten einer beliebigen Constanten gleichsetzt.

Auch $T = \frac{1}{2}\sum_{ik} t_{ik} r_{ik} = \text{const.}$ ist ein Integral, und in Folge der Identität:

$$0 = \sum_{iks} t_{ik}(r_{is}t_{ks} - r_{ks}t_{is})$$

hat man auch:

$$0 = \sum_{ik} t_{ik}\frac{dt_{ik}}{dt}$$

und durch Integration:

$$c = \sum_{ik} t_{ik}^2. \tag{18}$$

Um nun aber die weiteren Integrale zu erhalten, schlagen wir den folgenden Weg ein. Es sei μ eine gerade Zahl und $(\alpha\beta\gamma\delta\cdots\lambda\mu)$ das von Jacobi mit der gleichen Symbolik bezeichnete Aggregat, welches Cayley eine „Pfaffiane" genannt hat, und dessen Elemente in unserem Falle t_{ik} sind. Das Quadrat derselben stellt sich als eine schiefe Determinante dar. (Vergl. Baltzer Det.)

Alsdann beweist man den Satz:

> Das System (17) kann durch die folgenden Systeme ersetzt werden:

$$0 = \frac{d(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)}{dt} + \sum_{s}\big[r_{\alpha s}(\beta\gamma\cdots\lambda\mu s) - r_{\beta s}(\alpha\gamma\cdots\lambda\mu s) + r_{\gamma s}(\alpha\beta\delta\cdots\lambda\mu s)\cdots \pm r_{\mu s}(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda s)\big]. \tag{19}$$

Sei in der That ϑ_{ik} der Coefficient von t_{ik} in der Pfaffiane $(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)$, dann hat man:

$$\frac{d\cdot(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)}{dt} = \sum_{ik}\vartheta_{ik}\frac{dt_{ik}}{dt},$$

mithin, wenn man aus (17) den Werth von $\frac{dt_{ik}}{dt}$ einsetzt:

$$\frac{d(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)}{dt} = -\sum_{i,k,s}\vartheta_{ik}r_{is}t_{ks} \quad (i,k,s = 1,2\cdots n).$$

Der Coefficient von r_{is} ist: $\sum_{k}\vartheta_{ik}t_{ks}$, also diejenige Pfaffiane, welche aus der ursprünglichen entsteht, indem man den Buchstaben i durch s ersetzt (bis auf's Vorzeichen). Zieht man jetzt den Buchstaben s ans Ende des symbolischen Ausdrucks für die Pfaffiane und beachtet die bei den Vertauschungen der Buchstaben eintretenden Zeichenwechsel, so findet man sofort die angegebenen Systeme. Jedes derselben enthält: $\binom{n}{\mu}$ Gleichungen und liefert ein Integral, denn multiplicirt

man in (19) mit $(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)$ und summirt nach den Buchstaben α, $\beta, \gamma\cdots\lambda, \mu$, so findet sich:

$$0 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma\cdots\lambda,\mu} (\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)\,\frac{d\,(\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)}{dt},$$

denn alle Glieder unter den eckigen Klammern heben sich fort; man kann jetzt integriren und findet:

$$\text{const.} = \sum_{\alpha,\beta,\cdots\lambda,\mu} (\alpha\beta\gamma\cdots\lambda\mu)^2 .$$

Hier sind nun aber die rechten Seiten gerade die Coefficienten der Potenzen von λ in der Determinante Δ, daher ist der ausgesprochene Satz erwiesen. Für $n = 3, 4$ ist nur ein System vorhanden, dagegen für $n = 5$ ausser dem ursprünglichen noch das folgende:

$$(21)\quad \begin{cases} 0 = \frac{d\,(2345)}{dt} + r_{21}\,(3451) - r_{31}\,(2451) + r_{41}\,(2351) \\ \qquad\qquad - r_{51}\,(2341) \\ 0 = \frac{d\,(1345)}{dt} + r_{12}\,(3452) - r_{32}\,(1452) + r_{42}\,(1352) \\ \qquad\qquad - r_{52}\,(1342) \\ 0 = \frac{d\,(1245)}{dt} + r_{13}\,(2453) - r_{23}\,(1453) + r_{43}\,(1253) \\ \qquad\qquad - r_{53}\,(1243) \\ 0 = \frac{d\,(1235)}{dt} + r_{14}\,(2354) - r_{24}\,(1354) + r_{34}\,(1254) \\ \qquad\qquad - r_{54}\,(1234) \\ 0 = \frac{d\,(1234)}{dt} + r_{15}\,(2345) - r_{25}\,(1345) + r_{35}\,(1245) \\ \qquad\qquad - r_{45}\,(1235). \end{cases}$$

Diesem System aber genügt man, wenn man setzt:

$$(2345) = (1345) = (1245) = (1235) = (1234) = 0.$$

Durch diese Gleichungen sind wir also zu einer particulären Lösung gelangt. Die vorhergehende Analyse zeigt, dass eine derartige Lösung für jedes ungerade n stattfindet, denn im Allgemeinen liefert zwar jedes derivirte System nur ein Integral, wenn aber n ungerade ist, so genügt man dem letzten, welches n Gleichungen enthält, dadurch, dass man alle n Grössen:

$$(234\cdots n), \quad (134\cdots n)\cdots\cdots(123\cdots n-1)$$

gleich Null setzt.

Integriren wir nunmehr auch das System (16) und bezeichnen die $\frac{n\cdot n-1}{2}$ Integrationsconstanten mit δ_{ik}, so ergiebt sich:

$$(22)\qquad \delta_{ik} = \sum_{r,s} t_{rs} C_{ik,rs} = -\delta_{ki} .$$

Lehrsatz. Lautet die Entwickelung der Determinante Δ in (17ª):

$$\lambda^n + \lambda^{n-2}\Delta_2 + \lambda^{n-4}\Delta_4 + \cdots, \tag{23}$$

wo also die Δ_i diejenigen Functionen der t_{ik} bedeuten, welche zufolge der gegebenen Entwickelungen Constanten gleich werden, so finden zwischen diesen und den δ_{ik} Beziehungen statt in der Weise, dass:

$$\delta_i = \Delta_i, \tag{24}$$

wobei δ_i die Coefficienten der Potenzen von λ in der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \delta_{12} & \delta_{13} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \lambda & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \lambda & \cdots & \delta_{3n} \\ \cdots & \cdots & & & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n + \delta_2\lambda^{n-2} + \delta_4\lambda^{n-4} + \cdots$$

bedeuten.

Beweis. Die Bestimmungsart der x und der y war bisher ganz willkührlich, wir können sie aber offenbar so wählen, dass für $t = 0$ die x den y gleich werden. Dann verschwinden in (3) für $t = 0$ alle c_{ik}, nur die c_{ii} werden gleich Eins. Hieraus erkennt man, dass in (22) für $t = 0$ ebenfalls alle Coefficienten $C_{ik,rs}$ verschwinden mit Ausnahme der $C_{ik,ik}$, welche gleich Eins werden. Daher ist:

$$\delta_{ik} = (t_{ik})_{t=0}.$$

Weil nun vermöge der gefundenen Integrale zwischen den t_{ik} die im Lehrsatze angegebenen Relationen bestehen, so auch zwischen den δ_{ik} q. e. d.

V. Es möge noch bewiesen werden, dass im Falle $n = 4$ eine einzige Beziehung zwischen den Constanten T_{ik} hinreicht, um ein weiteres Integral zu finden. Das Problem kann dann bekanntlich auf Quadraturen zurückgeführt werden, weil die dazu erforderliche Anzahl von Integralen vorhanden wäre. Wir gehen von der kanonischen Form (1) der Differentialgleichungen aus und fragen, unter welchen Bedingungen lassen dieselben Integrale von der Form:

$$\text{const.} = a_{12}T_{12}r_{12}^2 + a_{13}T_{13}r_{13}^2 + \cdots + a_{34}T_{34}r_{34}^2 \tag{25}$$

zu, wo die a_{ik} zu bestimmende Constanten bedeuten. Setzt man zur Abkürzung:

$$\begin{cases} \Omega_1 = r_{23}r_{24}r_{34}; & \Omega_2 = r_{13}r_{14}r_{34} \\ \Omega_3 = r_{12}r_{14}r_{24}; & \Omega_4 = r_{12}r_{13}r_{23}, \end{cases} \tag{26}$$

dann kann man die Differentialgleichungen (1) so schreiben:

$$(27)\quad \begin{cases} -T_{12}r_{12}\frac{dr_{12}}{dt} = (T_{13}-T_{23})\Omega_1 + (T_{14}-T_{24})\Omega_3\,, \\ -T_{13}r_{13}\frac{dr_{13}}{dt} = -(T_{12}-T_{23})\Omega_1 + (T_{14}-T_{24})\Omega_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -T_{34}r_{34}\frac{dr_{34}}{dt} = (T_{13}-T_{14})\Omega_2 + (T_{23}-T_{24})\Omega_1\,. \end{cases}$$

Differentiirt man jetzt die Gleichung (25) und eliminirt die Grössen $\frac{dr_{ik}}{dt}$ mit Hülfe von (27), so hat man die Coefficienten von $\Omega_1 \cdots \Omega_4$ gleich Null zu setzen, also finden sich für die a_{ik} die Bedingungsgleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} 0= 0 + 0 + 0 + (T_{24}-T_{34})a_{23}-(T_{23}-T_{34})a_{24} \\ \qquad\qquad +(T_{23}-T_{24})a_{34} \\ 0= 0 + (T_{14}-T_{34})a_{13}-(T_{13}-T_{34})a_{14}+ 0 + 0 \\ \qquad\qquad +(T_{13}-T_{14})a_{34} \\ 0=(T_{14}-T_{24})a_{12}+ 0 -(T_{12}-T_{24})a_{14}+ 0 +(T_{12}-T_{14})a_{24} \\ \qquad\qquad + 0 \\ 0=(T_{13}-T_{23})a_{12}-(T_{12}-T_{23})a_{13}+ 0 +(T_{12}-T_{13})a_{23}+ 0 \\ \qquad\qquad + 0 \end{cases}$$

Diesem System genügt man, indem man setzt:

$$a_{ik} = \lambda + \mu T_{ik}\,,$$

welches auf bekannte Integrale zurückführt, aber wenn alle aus je 4 Colonnen des Systems (28) gebildeten Determinanten verschwinden, so reduciren sich diese 4 Gleichungen auf nur drei von einander unabhängige, weshalb sich ein weiteres Integral ergeben müsste. Aber jene Determinanten zeigen alle eine der folgenden beiden Formen:

$$\begin{vmatrix} 0 & T_{14}-T_{31} & T_{31}-T_{13} \\ T_{14}-T_{24} & 0 & T_{24}-T_{12} \\ T_{13}-T_{23} & T_{23}-T_{12} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & T_{24}-T_{31} & T_{34}-T_{23} \\ T_{14}-T_{34} & T_{21}-T_{13} & 0 & 0 \\ 0 & T_{24}-T_{12} & 0 & T_{12}-T_{14} \\ T_{23}-T_{12} & 0 & T_{12}-T_{13} & 0 \end{vmatrix}.$$

Hier ist die erste Determinante in der zweiten als Factor enthalten und alle andern zu bildenden Determinanten enthalten denselben

Factor*). Verschwindet dieser, so reduciren sich die vier Gleichungen (28) auf nur drei, so dass sich ein weiteres Integral ergiebt.

Zum Schluss muss noch erwähnt werden, dass das von Kirchhoff (a. a. O.) und von Clebsch**) behandelte Problem der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit in dem hier behandelten als specieller Fall enthalten ist, dessen Eigenthümlichkeit geometrisch leicht zu charakterisiren wäre. Die Rechnung des Letzteren kürzt sich ausserordentlich ab, wenn man dort von vornherein die Differentialgleichungen in der kanonischen Form annimmt und die Grössen $\Omega_1 \cdots \Omega_4$ einführt.

Tübingen, im October 1873.

---

*) Hesse: Zur Involution, Borchardt's Journ. Bd 63.
**) Math. Ann. Bd. III.

Notiz über die Flächen constanten Potentiales.

Von L. Weber aus Rostock,
Mitglied des Mathematischen Seminars zu Leipzig.

Wenn eine isolirt aufgestellte Metallkugel gegeben ist, in deren Nähe sich ein elektrischer Massenpunkt befindet, so ist bekanntlich nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes das Gesammtpotential des Systemes im Innern der Kugel constant und die Kugeloberfläche selbst stellt eine Niveaufläche dar. Es scheint nun mit Berücksichtigung des Satzes, dass zwei Niveauflächen sich nicht schneiden können, die Vermuthung nahe zu liegen, dass eine der gegebenen Kugeloberfläche unendlich nahe gelegene andere Niveaufläche wiederum annähernd die Gestalt einer Kugel habe und sich der ersteren in unendlich kleiner Entfernung überall anschmiege. Aus einer solchen Annahme würde nun aber folgen, dass der Differentialquotient des Potentiales nach der äusseren Normale der Kugel überall mit demselben positiven oder negativen Vorzeichen behaftet sein müsste; und, da dieser Differentialquotient im betrachteten Falle identisch ist mit der Dichtigkeit der auf der Kugel vertheilten Elektricität, so müsste auch die Dichtigkeit überall dasselbe Vorzeichen haben, was jedenfalls mit Theorie und Erfahrung im Widerspruch steht.

Zur Beseitigung dieses scheinbaren Widerspruches genügt folgende einfache Betrachtung, welche über den wirklichen Verlauf der Niveauflächen Aufschluss giebt.

Setzt man die Masse des inducirenden Punktes P gleich *Eins*, so ist das Potential desselben $U = \frac{1}{r}$. Bezeichnet man ferner das Potential der inducirten Kugel mit V, so muss nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes V den Bedingungen genügen, dass

I. für äussere Punkte $\Delta V = 0$,

II. für Punkte der Kugeloberfläche $\overline{V} + \overline{U} = \text{Const.}$,

III. für unendlich entfernte Punkte $\overset{\infty}{V} = \frac{m}{\sigma}$ ist, wo σ die Entfernung vom Centrum der Kugel und m die der Kugel zuertheilte elektrische Ladung bedeutet.

Bezeichnet C das Centrum der Kugel und Q den sogenannten Spiegelpunkt von P, so kann V dargestellt werden als das Potential

zweier in C und Q befindlicher Massenpunkte. Setzt man nämlich, was die Seiten des recktwinkeligen Dreiecks CPT betrifft:

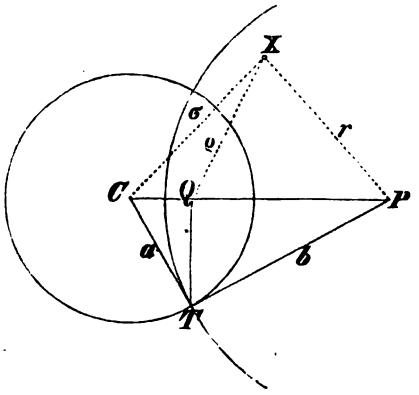
$$CT = a, \quad CP = \frac{a}{k}, \quad PT = b, \tag{1}$$

und bezeichnet man ferner die Abstände eines beliebigen äussern Punktes X von C, Q, P respective mit σ, ϱ, r, so findet man für das Potential V im Punkte X den Werth:

$$V = \frac{m+k}{\sigma} - \frac{k}{\varrho}. \tag{2}$$

Dass dieser Werth den Bedingungen I. und III. genügt, übersieht man sofort. Der Bedingung II. wird aber ebenfalls entsprochen; denn nach einem bekannten geometrischen Satze ist für jeden Punkt der Kugelfläche: $\frac{r}{\varrho} = \frac{CP}{CT}$, also nach (1): $\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{k}$, mithin $\frac{k}{\varrho} = \frac{1}{r}$, und folglich $\overline{V} = \frac{m+k}{a} - \frac{1}{r}$, mithin $\overline{V} + \overline{U} = \frac{m+k}{a}$; w. z. z. w.

Fig. 1.



Bezeichnet man nun das Gesammtpotential mit Ω, setzt man also:

$$\Omega = V + U = \frac{m+k}{\sigma} - \frac{k}{\varrho} + \frac{1}{r}, \tag{3}$$

so handelt es sich um die Untersuchung der durch $\Omega = \text{Const.}$ dargestellten Niveauflächen.

Für unsere Zwecke wird es indessen ausreichend sein, einen *speciellen* Fall näher ins Auge zu fassen, nämlich denjenigen, welcher entsteht, sobald die der Kugel zuertheilte elektrische Ladung m den Werth hat:

$$m = \frac{a}{b} - k, \tag{4}$$

wo a, b, k die in (1) angegebenen Bedeutungen haben sollen. In diesem Falle geht die Formel (3) über in:

(5) $$\Omega = \frac{a}{b\sigma} - \frac{k}{\varrho} + \frac{1}{r}.$$

Betrachtet man nun unter den Niveauflächen $\Omega = \text{Const.}$ diejenige, für welche die Const. $= \frac{1}{b}$, d. i. die Fläche

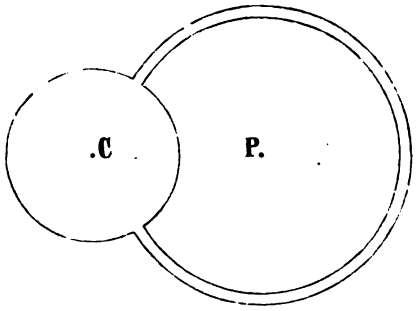
(6) $$\frac{a}{b\sigma} - \frac{k}{\varrho} + \frac{1}{r} = \frac{1}{b},$$

so zeigt sich, dass dieselbe aus *zwei* Kugelflächen besteht, nämlich aus der gegebenen um C mit a beschriebenen, und aus einer neuen um P mit b beschriebenen.

Denn einerseits genügen der Gleichung (6) alle Punkte der gegebenen Kugelfläche, weil für diese Punkte $\sigma = a$, und (wie schon früher bemerkt wurde) $\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{k}$ ist.

Andererseits aber genügen der Gleichung (6) auch alle Punkte der um P mit dem Radius b beschriebenen neuen Kugelfläche. Denn für alle Punkte dieser neuen Kugelfläche ist $r = b$, und ferner (nach einem schon vorhin benutzten geometrischen Satz): $\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{PC}{PT}$, d. i. nach (1): $\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{a}{kb}$.

Fig. 2.



Die betrachtete Niveaufläche $\Omega = \frac{1}{b}$ besteht also aus Punkten, welche theils der um C mit dem Radius a, theils der um P mit dem Radius b beschriebenen Kugelfläche angehören. Geht man also über zu den benachbarten Niveauflächen $\Omega = \frac{1}{b} + \varepsilon$ und $\Omega = \frac{1}{b} - \varepsilon$ (indem man unter ε eine unendlich kleine Constante versteht), so wird man für diese zwei in vorstehender Zeichnung (Fig. 2.) dargestellte Flächen erhalten, welche den genannten beiden Kugelflächen unendlich nahe sich anschliessen.

Aehnlich wie in dem hier betrachteten *speciellen* Falle wird es sich offenbar auch in *vielen anderen* Fällen verhalten. Wir gelangen durch diese Betrachtungen zu folgendem Ergebniss:

Ist eine isolirte und mit Elektricität geladene Metallkugel der Induction eines elektrischen Massenpunktes P unterworfen, und entsteht in Folge dieser Induction auf der Kugelfläche eine Trennung der beiderlei Elektricitäten (der Art, dass ein Theil der Fläche positiv, der andere negativ sich ladet), so werden die nach Eintritt des Gleichgewichtes vorhandenen Niveauflächen den Punkt P schalenförmig umschliessen. Die erste von diesen Flächen ist eine um P mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kugel. Die folgenden sind nicht mehr kugelförmig, doch wird jede die vorhergehende schalenförmig umschliessen. Endlich wird die letzte wieder eine Kugel sein, die um P mit unendlich grossem Radius beschrieben ist. Die gegebene Metallkugel ist (wie etwa ein Stein zwischen zwei Erdschichten) eingebettet zwischen zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Niveauflächen F', F''; und demgemäss zerfällt die Oberfläche K der Metallkugel in zwei Stücke K', K'', von denen das eine einen Theil von F', das andere einen Theil von F'' bildet.

Man kann daher setzen:

$$F' = K' + L',$$
$$F'' = K'' + L''.$$

In dem von uns untersuchten Falle, wo die Ladung der Metallkugel den *speciellen* Werth (4) besitzt, sind die Flächenstücke L', L'' ebenfalls kugelförmig, nämlich (vgl. Fig. 2) Theile von zwei einander sehr nahe liegenden concentrischen Kugelflächen, deren Mittelpunkt in P sich befindet.

Unzulässig ist es also — und hierin liegt der Grund des zu Anfang erwähnten Widerspruchs —, die Oberfläche der gegebenen Metallkugel schlechtweg als eine Niveaufläche zu bezeichnen. Denn jene Oberfläche zerfällt in zwei Stücke, die *verschiedenen* Niveauflächen zugehören.

Leipzig, Ostern 1874.

Neuer Beweis des Abel'schen Theorems.

Von H. Weber in Zürich.

Der Beweis, den Riemann von dem Abel'schen Theorem giebt, lässt zwar an Bündigkeit nichts zu wünschen übrig, gleichwohl scheint mir der folgende kaum minder einfache Beweis desselben einer kurzen Mittheilung werth, theils weil er den Vorzug hat, in allen Fällen das Theorem in vollständig entwickelter Form zu geben, theils weil er geeignet ist, einen Zusammenhang aufzudecken, welcher zwischen dem Abel'schen Theorem und einer Reihe von anderen bisher getrennt erscheinenden Sätzen besteht.

Die Variablen s und z sollen durch eine irreductible algebraische Gleichung mit einander verbunden sein, so dass die Verzweigungsart von s dargestellt ist durch eine $2p+1$-fach zusammenhängende Riemann'sche Fläche T, welche durch ein normales Querschnittsystem a_k, b_k (Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen Nr. 19) in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt werde.

Es sei nun σ eine (wie T verzweigte) rationale Function von s und z, welche in den Punkten

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$$

unendlich klein, in den Punkten

$$\zeta_1', \zeta_2', \cdots \zeta_{m'}$$

unendlich gross in der ersten Ordnung wird.

Um $\log\sigma$ eindeutig zu bestimmen, ziehe man von ζ_1' nach ζ_1, von ζ_2' nach $\zeta_2 \cdots$, von $\zeta_{m'}$ nach ζ_m einander nicht schneidende Linien $l_1, l_2, \cdots l_m$ durch das Innere von T', wodurch, wenn man beide Ufer der Linien l als zur Begrenzung gehörig betrachtet, aus T' eine neue Fläche T'' entsteht.

Nennen wir diejenige Seite einer Linie die positive, welche bei ihrer Entstehung zur Linken liegt, so ist $\log\sigma$ auf der positiven Seite einer Linie l um $2\pi i$ grösser als auf der negativen. Ferner wird $\log\sigma$ auf der positiven Seite der Querschnitte a_k, b_k um $2m_k\pi i$, resp. $2n_k\pi i$ gröser sein als auf der negativen, wenn m_k, n_k ganze Zahlen sind, über die sich im Allgemeinen nichts bestimmen lässt.

Es sei ferner $\frac{d\omega}{dz}$ eine beliebige andere rationale Function von s und z, deren Unstetigkeiten folgendermassen festgesetzt sein sollen: Für die Umgebung eines Punktes ε, um welchen die Fläche T sich ϱ-mal windet (für einen gewöhnlichen Punkt ist $\varrho = 1$, für einen einfachen Verzweigungspunkt $\varrho = 2$ etc.), in welchem s den Werth s_ε hat, entwickle man $\frac{d\omega}{dz}$ nach steigenden Potenzen von $(z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}}$, und diese Entwickelung habe die Form:

$$\frac{d\omega}{dz} = c_\mu (z - z_\varepsilon)^{\frac{\mu}{\varrho}} + c_{\mu+1}(z - z_\varepsilon)^{\frac{\mu+1}{\varrho}} + c_{\mu+2}(z - z_\varepsilon)^{\frac{\mu+2}{\varrho}} + \cdots.$$

Es kommen hierbei nur solche Punkte ε in Betracht, für welche μ negativ ist. In der Umgebung eines unendlich fernen Punktes η, um den die Fläche T sich ebenfalls ϱ-mal windet, sei $\frac{d\omega}{dz}$ nach fallenden Potenzen von $z^{\frac{1}{\varrho}}$ entwickelt wie folgt:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\gamma_\nu}{z^{\frac{\nu}{\varrho}}} + \frac{\gamma_{\nu+1}}{z^{\frac{\nu+1}{\varrho}}} + \frac{\gamma_{\nu+2}}{z^{\frac{\nu+2}{\varrho}}} + \cdots,$$

so dass man hat:

$$c_n = \left[\frac{d^{n-\mu}\left((z-z_\varepsilon)^{-\frac{\mu}{\varrho}} \frac{d\omega}{dz}\right)}{(n-\mu)'!\left(d(z-z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}}\right)^{n-\mu}} \right]_{z,\, s = z_\varepsilon,\, s_\varepsilon}$$

$$\gamma_n = \left[\frac{d^{n-\nu}\left(z^{\frac{\nu}{\varrho}} \frac{d\omega}{dz}\right)}{(n-\nu)!\left(d\left(z^{-\frac{1}{\varrho}}\right)\right)^{n-\nu}} \right]_{z,\, s = \infty,\, s_\eta},$$

Endlich seien an den Querschnitten $a_1, a_2, \cdots a_p$; $b_1, b_2, \cdots b_p$ die Periodicitätsmoduln des Integrals ω:

$$A_1, A_2, \cdots A_p\,; \quad B_1, B_2, \cdots B_p\,.$$

Es werde nun jeder der Punkte ε durch eine Kreislinie k_ε, welche im Innern von T'', sich ϱ mal windend, verläuft und keinen andern dieser Punkte einschliesst, aus der Fläche T'' herausgeschnitten, und ebenso werde jeder der unendlich fernen Punkte η durch einen im Innern von T'' verlaufenden, alle Punkte ε einschliessenden Kreis k_η', der etwa seinen Mittelpunkt im Punkt $z = 0$ haben mag, von der Fläche T'' abgesondert. In der so entstandenen Fläche T''' ist die Function

$$\log \sigma \cdot \frac{d\omega}{dz}$$

durchweg eindeutig und stetig und daher hat das über die ganze Begrenzung dieser Fläche in positiver Richtung erstreckte Integral

$$\int \log \sigma \cdot d\omega$$

den Werth Null. Dieses Integral aber zerfällt in drei Theile:

1. über beide Ufer sämmtlicher Linien l,
2. über beide Ufer des Querschnittsystems,
3. über die Kreislinien k_ε, k_η.

Der erste Theil hat den Werth:

$$(1) \qquad 2\pi i \sum_{i=1}^{i=m} \int_{\zeta_i}^{\zeta_i} d\omega ,$$

der zweite Theil:

$$(2) \qquad 2\pi i \sum m_\varkappa B_\varkappa - 2\pi i \sum n_\varkappa A_\varkappa ,$$

der dritte Theil endlich:

$$(3) \qquad \sum_\varepsilon \int_{k_\varepsilon} \log \sigma \, d\omega + \sum_\eta \int_{k_\eta} \log \sigma \, d\omega .$$

Um diese letzteren Integrale zu bestimmen, entwickeln wir $\log \sigma$ in der Nähe des Punktes ε nach steigenden Potenzen von $(z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}}$ und in der Nähe des Punktes η, d. h. jenseits des Kreises k_η, nach fallenden Potenzen von $z^{\frac{1}{\varrho}}$, was immer möglich ist, wenn, wie vorausgesetzt werden muss, die Punkte ζ, ζ' sämmtlich von den Punkten ε, η verschieden sind.

Es sei demnach:

$$\text{Innerhalb } k_\varepsilon: \log \sigma = C_0 + C_1 (z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}} + C_2 (z - z_\varepsilon)^{\frac{2}{\varrho}} \cdots$$

$$\text{Ausserhalb } k_\eta: \log \sigma = \Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{z^{\frac{1}{\varrho}}} + \frac{\Gamma_2}{z^{\frac{2}{\varrho}}} + \cdots ,$$

so. dass:

$$C_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n \log \sigma}{\left(d (z - z_\varepsilon)^{\frac{1}{\varrho}} \right)^n} \right]_{z,\, s = z_\varepsilon,\, s_\varepsilon},$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n \log \sigma}{\left(d z^{-\frac{1}{\varrho}} \right)^n} \right]_{z,\, s = \infty,\, s_\eta},$$

woraus man sofort erhält:

$$-\int_{k_\varepsilon} \log \sigma \, d\omega = 2\pi i \varrho \, (C_0 c_{-\varrho} + C_1 c_{-\varrho-1} + \cdots C_{-\mu-\varrho} c_\mu) ,$$

$$\int_{k_\eta} \log \sigma \, d\omega = 2\pi i \varrho \, (\Gamma_0 \gamma_\varrho + \Gamma_1 \gamma_{\varrho-1} + \cdots \Gamma_{\varrho-\nu} \gamma_\nu) .$$

Das erste dieser Integrale verschwindet also, sobald $-\mu < \varrho$, das zweite, wenn $\nu > \varrho$ ist.

Hieraus ergiebt sich nun für das Abel'sche Theorem folgende ganz allgemeine Darstellung:

$$\text{(I.)} \quad \sum_i \int_{\zeta_i'}^{\zeta_i} d\omega = \sum_\varkappa n_\varkappa A_\varkappa - \sum_\varkappa m_\varkappa B_\varkappa + \sum_\varrho \varrho \,(C_0 c_{-\varrho} + C_1 c_{-\varrho-1} + \cdots C_{-\mu-\varrho} c_\mu) + \sum_\eta \varrho \,(\Gamma_0 \gamma_\varrho + \Gamma_1 \gamma_{\varrho-1} + \cdots \Gamma_{\varrho-\nu} \gamma_\nu).$$

Die ganzen Zahlen $m_\varkappa, n_\varkappa$ sind, wie schon erwähnt, im Allgemeinen nicht zu bestimmen.

Wir können zu ihrer Bestimmung nur Folgendes beibringen.

Bedeutet σ_1 eine Function von derselben Beschaffenheit wie σ, a und b irgend zwei Constanten, und setzen wir:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 - a}{\sigma_1 - b},$$

so werden sich die Punkte ξ, ξ' stetig verändern, wenn wir die Constanten a und b stetig verändern. Nehmen wir $a = b$ an, so fallen die Punkte ξ mit den entsprechenden Punkten ξ' zusammen, und die Constanten $m_\varkappa, n_\varkappa$ erhalten die Werthe 0, wenn wir die Integrationswege von ξ_i' nach ξ_i auf 0 reduciren. Lassen wir nun a sich stetig ändern, so werden auch die Punkte ξ_i stetig fortrücken, und die Zahlen $m_\varkappa, n_\varkappa$ werden so lange $= 0$ bleiben, bis einer der Punkte ξ gezwungen ist, einen Querschnitt zu überschreiten, vorausgesetzt, dass wir für die Integrationswege diejenigen Linien wählen, auf denen die Punkte ξ bei der stetigen Aenderung von a fortschreiten.

Es sind daher im Allgemeinen die ganzen Zahlen $n_\varkappa, m_\varkappa$ abhängig von der Natur der Function σ und von der Lage der Querschnitte, aber völlig unabhängig von der Function ω, so dass sie für alle diese Functionen die nämlichen Werthe haben. Behält man sich vor, über die Integrationswege zwischen ξ_i' und ξ_i ohne Rücksicht auf die Querschnitte zu verfügen, so kann man durch dies Mittel den Zahlen $m_\varkappa, n_\varkappa$ beliebige Werthe ertheilen.

Ausser den Zahlen $m_\varkappa, n_\varkappa$ kommen in der Formel (I.), wenn die $c_{-\varrho}, \gamma_\varrho$ nicht alle verschwinden, noch andere unbestimmte ganze Zahlen vor, da die Grössen C_0, Γ_0 als Logarithmen nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt sind. Ueber diese Zahlen gilt Aehnliches wie über $m_\varkappa, n_\varkappa$.

Ich erwähne schliesslich noch, dass unsere Methode ohne wesentliche Aenderung auch dann noch anwendbar bleibt, wenn σ nicht eine rationale Function von s und z, sondern eine Function bedeutet, welche beim Ueberschreiten der Querschnitte constante Factoren annimmt. Sind diese Factoren Wurzeln der Einheit, so ist σ die Wurzel aus einer rationalen Function von s und z, und in der Formel (I.) treten an Stelle der ganzen Zahlen $m_\varkappa n_\varkappa$ gewisse rationale Brüche. Sind die erwähnten Factoren andere, so ist immer $\log \sigma$ ein algebraisches Integral und an Stelle von $2 m_\varkappa \pi i$, $2 n_\varkappa \pi i$ treten die Periodicitätsmoduln desselben. Man erhält dann aus (I.) ein System von Formeln, von denen der Satz von der Vertauschung des Arguments und Parameters bei den Integralen dritter Gattung das bekannteste Beispiel ist.

Zürich, im Juni 1874.

Zur Theorie der windschiefen Flächen.

Von A. Voss in Göttingen.

Seit dem Erscheinen von Plücker's „Neuer Geometrie des Raumes" ist bekanntlich neben die bisher ausgebildeten analytisch geometrischen Untersuchungen, deren Schwerpunkt in der Dualität zwischen Punkt und Ebene liegt, eine neue Disciplin getreten, die *Liniengeometrie*. So interessant und reichhaltig diejenigen Untersuchungen sind, welche sich rein mit der Theorie der Liniencomplexe und Liniencongruenzen beschäftigen, so wird man doch immer geneigt sein, denjenigen Betrachtungen einen besonderen Werth beizumessen, durch welche auf Fragen, die wir im Sinne der gewöhnlichen geometrischen Anschauungsweise aufwerfen, vermöge der Liniengeometrie ein neues Licht geworfen wird. Gerade nach dieser Richtung hin scheint sich für dieselbe noch ein weites Feld zu eröffnen*). Die volle Fruchtbarkeit der liniengeometrischen Untersuchungen wird aber erst dann hervortreten, wenn man gelernt hat dieselben ganz gleichmässig im Zusammenhang mit der Punkt- und Ebenengeometrie zu verwerthen. — In den bisherigen Bestrebungen aber, welche sich auf diese *dreitheilige Ausbildung der geometrischen Speculation beziehen*, in der Punkt, Ebene und Gerade völlig gleichwerthige Gebilde darstellen, haben sich erst zu wenig die analytischen Schwierigkeiten überwinden lassen, welche bei der gleichzeitigen Anwendung von Punkt-, Ebenen- und Liniencoordinaten auftreten. Es erscheint daher zweckmässig, die Liniengeometrie zunächst als eine besondere Disciplin zu behandeln, und, von der ihr eigenthümlichen Auffassungsweise ausgehend, zur Punkt- und Ebenengeometrie hinüberzuleiten. Erst von in diesem Sinne angestellten liniengeometrischen Untersuchungen dürfte jener weitere Fortschritt der modernen Geometrie, den wir bezeichneten, abhängen.

*) Wir erinnern hier insbesondere an die Untersuchungen von Herrn Klein über die Kummer'sche Fläche, ferner an die Arbeit des Herrn Sturm „das Problem der räumlichen Projectivität" (diese Annalen Bd. VI, S. 543), sowie die neuerdings erschienene des Herrn Lindemann „Projectivische Behandlung der Mechanik starrer Körper" (diese Annalen Bd. VII, S. 56).

Es ist daher zunächst Zweck der vorliegenden Arbeit, zu zeigen, wie sich die geometrischen Untersuchungen, die sich auf Fragen der gewöhnlichen projectivischen Auffassung beziehen, vom rein liniengeometrischen Standpunkte aus gestalten. In dieser Absicht habe ich in dem ersten Paragraphen die hauptsächlichsten Gesichtspunkte, sowie einzelne Beispiele für die rein liniengeometrische Methode in der Kürze erläutert. Sodann gehe ich dazu über, die genannte Methode auf die Theorie derjenigen windschiefen Flächen anzuwenden, welche vollständiger Schnitt dreier allgemeiner Complexe von den Graden m, n, p sind. Diese Flächen sind bereits von Herrn Lüroth*) nach einigen wesentlichen Richtungen hin behandelt worden, doch bietet die hier zu Grunde gelegte Auffassung wesentlich verschiedene, zum Theil für die Theorie der windschiefen Flächen überhaupt, wie ich glaube, neue Gesichtspunkte. Dahin rechne ich insbesondere die Betrachtung der vierpunktigen Tangenten der Linienflächen, die bisher nicht in den Kreis der Untersuchungen gezogen ist. Ein besonderes Gewicht ist dabei überall auf die vollständige algebraische Behandlung der Probleme gelegt worden. — Daran knüpfe ich eine Betrachtung der windschiefen Flächen vom Geschlechte Null, deren Erzeugende sich also als rationale Functionen eines Parameters auffassen lassen, welche schliesslich zur Untersuchung solcher Flächen vom zweiten, dritten und vierten Grade verwerthet wird.

In einer demnächstigen Arbeit werde ich die liniengeometrischen Methoden auf die Untersuchung der Complexe, ihrer Singularitäten, sowie die der singulären Elemente von Congruenzen und ihren Brennflächen anwenden. Eine kurze Mittheilung einiger Resultate derselben wurde bereits in den Göttinger Nachrichten gegeben**).

I.

Allgemeines. Methode der liniengeometrischen Untersuchung.

Im Anschluss an die Arbeiten von Herrn Klein***) bediene ich mich zur analytischen Repräsentation der Geraden der von demselben eingeführten Liniencoordinaten. *Es sind dies lineare Combinationen* $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ *der sechs homogenen Plücker-Cayley'schen Coordinaten* p_{ik}, *für welche die zwischen den letzteren bestehende Identität*

*) Lüroth, Zur Theorie der windschiefen Flächen, Crelle's Journ. Bd. 67, S. 130.

**) Gött. Nachr. 1873, Juni, Juli, S. 544, 611.

***) Es sei hier namentlich auf die folgenden Aufsätze desselben hingewiesen, auf die im Folgenden häufig Bezug genommen werden wird: Zur Theorie der Liniencomplexe ersten und zweiten Grades (Math. Ann. Bd. II, S. 198), Allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten (daselbst p. 366), Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen (Math. Ann. Bd. V, S. 287).

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

in

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0,$$

oder, wie zur Abkürzung geschrieben werden soll,

$$(x^2) = 0$$

übergeht. Die Voraussetzung derselben in dieser kanonischen Form ist übrigens für das Folgende durchaus unwesentlich. Es würde nur einer einfachen Modification der im Folgenden entwickelten Ausdrücke bedürfen, wenn jene Identität in Gestalt einer allgemeinen quadratischen Form

$$\Sigma c_{ik} x_i x_k = 0$$

angenommen wird. Die Determinante der Form (x^2) ist 1, dieselbe ist im Folgenden häufig durch Ω bezeichnet, um anzudeuten, dass bei Anwendung der allgemeinen Form $\Sigma c_{ik} x_i x_k$ an Stelle von Ω einfach deren Determinante

$$\Sigma \pm (c_{11} c_{22} c_{33} c_{44} c_{55} c_{66})$$

einzuführen ist.

Unter Zugrundelegung der Coordinaten x ist es durchaus unzweckmässig, zu den Punkt- oder Ebenencoordinaten der Raumgeometrie, aus denen die x gebildet sind, wirklich zurückzugehen, wie man dies bei Anwendung der Coordinaten $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ oft gethan hat. *Es erwächst damit die Forderung einer eigenen Liniengeometrie, als deren ausschliesslich in die analytisch-geometrischen Untersuchungen direct eintretendes Gebilde (Raumelement) die Gerade zu betrachten ist.* Bei dieser Auffassung, die auch Herrn Klein's Arbeiten über Liniengeometrie zu Grunde liegt*), wird die Gerade vorgestellt durch einen speciellen Complex ersten Grades, eine Fläche ist der Inbegriff ihrer Tangenten, eine Curve der ihrer sämmtlichen Treffgeraden. Curven und Flächen werden durch *eine* Gleichung in Liniencoordinaten, d. h. durch Complexe vorgestellt, weil sie immer durch dreifach unendlich viele Linien erzeugt werden. Diese Gleichung muss aber im ersten Falle so beschaffen sein, dass jede von den in einer Ebene liegenden Geraden gebildete Complexcurve in so viel ebene Strahlbüschel zerfällt, als der Grad der darzustellenden Curve beträgt (der Complex die fragliche Curve zur Ausnahmecurve hat), während im zweiten Falle das Bestehen *einer* partiellen Differentialgleichung für alle Complexlinien erforderlich ist**). Der Punkt erscheint als Inbegriff aller Geraden, die durch ihn gehen (Strahlenbündel), die Ebene als Gesammtheit derjenigen Geraden, die in ihr liegen (Strahlennetz). Beide Gebilde enthalten nur zweifach unendlich viele Gerade, erfordern also in ihrer

*) Vgl. besonders Bd. V dieser Annalen.

**) Klein, Math. Ann. V, 287.

Darstellung zwei Gleichungen in Liniencoordinaten. Analytisch können wir beide Gebilde gleichzeitig darstellen als Schnitt zweier specieller linearer Complexe, deren Axen sich schneiden, d. h. durch eine zerfallende Congruenz. Es giebt aber unendlich viele speciolle lineare Complexe, denen dieselbe zerfallende Congruenz angehört, ihre Axen bilden ein ebenes Strahlbüschel. Wir werden dadurch veranlasst, die Gesammtheit dieser Axen als Ausdruck für die zerfallende Congruenz anzusehen. — Mit dieser Auffassung kommt es nun völlig überein, wenn wir im Folgenden Punkt und Ebene gleichzeitig durch ein ebenes Strahlbüschel repräsentiren. In der That bestimmt dasselbe auf eine völlig dualistische Weise sowohl einen Punkt, das Centrum des Büschels, als eine Ebene, die Ebene desselben. Das ebene Strahlbüschel ist daher das Mittel, durch welches die liniengeometrischen Vorstellungen in Verbindung mit denen der Punkt- und Ebenengeometrie zu bringen sind, und spielt daher eine fundamentale Rolle in denselben*).

Eine Gerade, deren Coordinaten $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ sind, werden wir im Folgenden symbolisch durch x bezeichnen. Zwei Gerade x, y schneiden sich, wenn die Bedingung

$$\Sigma x_i y_i = 0$$

erfüllt ist, an deren Stelle wir abkürzend

$$(xy) = 0$$

schreiben. Ueberhaupt werden wir analog gebildete Ausdrücke wie $\Sigma A_i B_i$ immer durch (AB) bezeichnen. Der Ausdruck

$$x + \lambda y$$

wird nur dann wieder eine Gerade vorstellen, wenn $(x + \lambda y)^2 = 0$, d. h. $(xy) = 0$, dann aber gleich unendlich viele, deren Gesammtheit das ebene Strahlbüschel bildet, welches durch die sich schneidenden Geraden xy bestimmt ist. Punkt und Ebene desselben bezeichnen wir durch (xy). Das Doppelverhältniss von vier Strahlen des Büschels (xy)

$$x + \lambda_1 y, \quad x + \lambda_2 y, \quad x + \lambda_3 y, \quad x + \lambda_4 y$$

hat dann den Werth

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_4 - \lambda_3}.$$

Drei Gerade xyz, für welche die Beziehungen

$$(xy) = 0, \quad (yz) = 0, \quad (xz) = 0$$

stattfinden, werden sich gegenseitig schneiden. Sie liegen dann ent-

*) In den erwähnten Mittheilungen (Gött. Nachr. a. a. O.) habe ich bereits gezeigt, wie die principielle Verwendung dieses Gebildes dazu dienen kann, die Singularitäten der Brenn- und singulären Flächen von Complexen (Rückkehr-, Doppel-, algebraische Haupttangenten-, vierpunktige Berührungscurven) nach Ordnung und Classe zu bestimmen.

weder in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt. Welches von beiden stattfinde, würde sich allerdings vermöge des von Herrn Klein*) für den einen oder anderen Fall aufgestellten Determinanten-Kennzeichens entscheiden lassen. Es bietet aber gewisse Vortheile, beide Fälle gleichzeitig zu betrachten. Jede Untersuchung, in welcher wir drei sich gegenseitig schneidende Gerade ohne weitere Nebenbedingung einführen, wird also einen *dualistischen Charakter tragen*, sich zum Theil auf drei Linien durch einen Punkt, zum Theil auf drei Linien in einer Ebene beziehen. Bei einem nicht in sich dualistischen Liniengebilde werden also Abzählungen immer nur die Summe der Anzahlen der Fälle liefern, die dem einen oder anderen Verhalten entsprechen. *Ist aber das ganze Gebilde, auf welches sich die Untersuchung bezieht, ein in sich duales, so muss der eine Fall ebenso oft auftreten als der andere. Die Anwendung eines besonderen Kennzeichens wird dann überflüssig.* Dieser Umstand gestattet die liniengeometrischen Untersuchungen oft überraschend einfach. *Er findet insbesondere statt in den folgenden Untersuchungen, insofern jedes vollständige Liniengebilde, welches durch allgemeine Complexe erzeugt wird, die geforderte Dualität besitzen muss.*

Wir behandeln nach diesen allgemeinen Erörterungen zunächst einige der einfachsten Aufgaben, welche sich in der Liniengeometrie darbieten, theils weil wir der Resultate derselben in der Folge öfters benöthigt sein werden, theils um zu zeigen, wie sich auf rein liniengeometrischem Wege die Behandlung derselben gestaltet.

1) *Bestimmung des Doppelverhältnisses zweier linearen Complexe.* Zwei lineare Complexe geben zu einem Büschel linearer Complexe Veranlassung. Bezeichnet man durch a, b die Directricen desselben, so sind zwei beliebige Complexe desselben dargestellt durch

$$a_x + \lambda b_x = 0\,, \tag{1}$$

$$a_x + \mu b_x = 0\,. \tag{2}$$

Eine beliebige Ebene schneidet die Directricen in zwei Punkten A, B und enthält zwei Centra $c_1\, c_2$ von Strahlbüscheln, die den Complexen (1), (2) angehören. Die vier Punkte $AB c_1 c_2$ liegen in gerader Linie und haben ein unveränderliches Doppelverhältniss, welches nach Herrn Klein als Doppelverhältniss der beiden Complexe (1), (2) bezeichnet wird. Um den Werth desselben zu bestimmen, legen wir zwei Gerade y, z, welche bezüglich die Directricen a, b und sich unter einander schneiden, so dass

$$(ay) = 0\,, \quad (bz) = 0\,, \quad (zy) = 0\,.$$

Ihre Ebene stellt die schneidende Ebene dar, $y\,z$ bilden mit den beiden Strahlen $y + \varrho_1 z$, $y + \varrho_2 z$, welche respective (1), (2) angehören,

*) Math. Ann. Bd. II, S. 200, 206.

vier Strahlen, deren Doppelverhältniss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ das gesuchte ist. Zur Bestimmung von $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ hat man die beiden Gleichungen, welche ausdrücken, dass $y + \varrho_1 z$, $y + \varrho_2 z$ Strahlen der Complexe (1), (2) sind, nämlich

$$(ay) + \lambda(by) + \varrho_1((az) + \lambda(bz)) = 0,$$
$$(ay) + \mu(by) + \varrho_2((az) + \mu(bz)) = 0,$$

aus denen folgt:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Wir stellen dazu noch die folgende Betrachtung. Es seien $z_1 z_2 z_3$ drei Gerade, welche die beiden Directricen schneiden. Jeder Complex des Büschels enthält zwei Strahlen x, y, welche $z_1 z_2 z_3$ gleichzeitig schneiden, d. h. Erzeugende des durch $z_1 z_2 z_3$ bestimmten Hyperboloides sind. *Die vier Geraden $a b x y$ bestimmen dann auf jeder der Geraden z harmonisch liegende Punkte.*

Wir beweisen dies folgendermassen. Der Complex des Büschels sei

$$a_x + \lambda b_x = 0.$$

Eine Gerade ε schneide

$$a,\ b,\ z_1,$$

so dass

$$(3)\quad \begin{cases} (\varepsilon a) = 0, & (\varepsilon b) = 0, & (\varepsilon z_1) = 0, \\ (z_1 a) = 0, & (z_2 a) = 0, & (z_3 a) = 0, \\ (z_1 b) = 0, & (z_2 b) = 0, & (z_3 b) = 0. \end{cases}$$

Wir suchen nun die Strahlen $a + \varrho\varepsilon$ des Büschels $(a\varepsilon)$, welche die z_1 in den Punkten treffen, in welchen sie selbst von einer Complexgeraden x geschnitten wird, welche $z_1 z_2 z_3$ gleichzeitig schneidet. Man hat dann:

$$(4)\quad \begin{cases} (xz_1) = 0, & (xz_2) = 0, & (xz_3) = 0, \\ a_x + \lambda b_x = 0, \\ (ax) + \varrho(\varepsilon x) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den 5 letzten Gleichungen und der Identität $(x^2) = 0$ die x, so erhält man nach einer leichten Umformung mit Berücksichtigung der Gleichungen (3), (4) die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & (z_1z_2) & (z_1z_3) & 0 & \varrho(\varepsilon z_1) \\ (z_1z_2) & 0 & (z_2z_3) & 0 & \varrho(\varepsilon z_1) \\ (z_1z_3) & (z_2z_3) & 0 & 0 & \varrho(\varepsilon z_3) \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda(ab) & \lambda(ab) \\ \varrho(\varepsilon z_1) & \varrho(\varepsilon z_2) & \varrho(\varepsilon z_3) & \lambda(ab) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Ausdruck ist von der Form

$$\alpha - \beta\varrho^2 = 0.$$

Wir erhalten daher zwei Strahlen mit den Parametern

$$\varrho_1 = +\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \varrho_2 = -\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

welche mit $a\varepsilon$ harmonisch liegen.

Da die Directricen ab conjugirte Polaren in Bezug auf den Complex $a_x + \lambda b_x = 0$ sind, so kann man den folgenden Satz aussprechen:

Jede Erzeugende zweiter Art eines Hyperboloids, von welchem zwei Erzeugende erster Art conjugirte Polaren in Bezug auf einen linearen Complex sind, wird von den beiden Complexgeraden, welche selbst Erzeugende erster Art des Hyperboloides sind, in zwei Punkten getroffen, welche harmonisch liegen zu ihren Schnittpunkten mit den beiden conjugirten Polaren.

2) *Betrachtung von vier windschiefen Linien a b c d.* Es giebt bekanntlich zwei Gerade, welche die vier gegebenen schneiden. Die Coordinaten derselben sind gegeben durch die Gleichungen

$$(ax) = 0, \quad (bx) = 0, \quad (cx) = 0, \quad (dx) = 0,$$
$$(x^2) = 0.$$

Man erhält das Product der Gleichungen der beiden speciellen linearen Complexe, welche die beiden Geraden x vertreten, wenn man denselben noch die Bedingung

$$(zx) = 0$$

hinzufügt und dann die x eliminirt in Gestalt der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & (ab) & (ac) & (ad) & (az) \\ (ab) & 0 & (bc) & (bd) & (bz) \\ (ac) & (bc) & 0 & (cd) & (cz) \\ (ad) & (bd) & (dc) & 0 & (dz) \\ (az) & (bz) & (cz) & (dz) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Geraden x coincidiren, wenn der Kern dieser Determinante verschwindet, d. h. wenn

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 0 & (ab) & (ac) & (ad) \\ (ab) & 0 & (bc) & (bd) \\ (ac) & (bc) & 0 & (cd) \\ (ad) & (bd) & (cd) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir bestimmen jetzt das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen die beiden Geraden x von $a\,b\,c\,d$ geschnitten werden, auf folgende Weise. Es sei y eine Gerade, welche $a\,d\,x$ schneidet. Wir suchen dann die Strahlen

$$y + \lambda_1 a, \quad y + \lambda_2 a$$

des Büschels (ya), welche respective b, c schneiden. Für dieselben ist

$$(yb) + \lambda_1(ab) = 0\,,$$
$$(yc) + \lambda_2(ac) = 0\,.$$

Das gesuchte Doppelverhältniss ist daher:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(yb)}{(yc)} : \frac{(ab)}{(ac)}\,.$$

Aus den Gleichungen

$$(yx) = 0\,,\quad (ax) = 0\,,\quad (bx) = 0\,,\quad (cx) = 0\,,\quad (dx) = 0\,,\quad (x^2) = 0\,,$$
$$(dy) = 0\,,\quad (ay) = 0$$

erhält man aber

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (yb) & (yc) & 0 \\ 0 & 0 & (ab) & (ac) & (ad) \\ (yb) & (ba) & 0 & (bc) & (bd) \\ (yc) & (ac) & (bc) & 0 & (cd) \\ 0 & (ad) & (bd) & (cd) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und damit die beiden Werthe $\frac{(yb)}{(yc)}$, welche den fraglichen Doppelverhältnissen auf den beiden Geraden x entsprechen.

Für vier Gerade mit verschwindender Determinante (5) hat $\left(\frac{yb}{yc}\right)$ einen sehr einfachen Werth. Es existiren dann vier Zahlen $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$, welche den Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mu_2(ab) + \mu_3(ac) + \mu_4(ad) = 0\,, \\ \mu_1(ab) + \mu_3(bc) + \mu_4(bd) = 0\,, \\ \mu_1(ac) + \mu_2(bc) + \mu_4(cd) = 0\,, \\ \mu_1(ad) + \mu_2(bd) + \mu_3(cd) = 0 \end{cases}$$

genügen. Alsdann ist

$$\mu_2(yb) + \mu_3(yc) = 0\,.$$

Bestimmt man μ_2 und μ_3, so ergiebt sich

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(bd)(ac) - (cd)(ab) + (ad)(bc)}{(bd)(ac) - (cd)(ab) - (ad)(bc)}\,.$$

Das Quadrat dieses Ausdrucks hat aber, vermöge der verschwindenden Determinante der Gleichungen (6), den Werth

$$\frac{(ac)}{(ab)} : \frac{(dc)}{(db)}\,,$$

so dass der absolute Werth des Doppelverhältnisses

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(ac)}{(ab)} : \frac{(dc)}{(db)}}$$

ist*).

*) Es ist dies eine Verallgemeinerung eines Theorems, welches nach einer Bemerkung des Herrn Lindemann (diese Annalen Bd. VII, S. 66, Anmerk.) für Gerade, die einem Hyperboloid angehören, bereits von Herrn Stolz ausgesprochen worden ist.

3) *Gleichung des Complexes, dessen Gerade vier feste Ebenen, die ein Tetraeder mit den Kanten a, b, c, d bilden, in constantem Doppelverhältniss δ schneiden.* Wir setzen a und d, b und c als Paare gegenüberliegender Kanten voraus. Es bestehen dann die Bedingungen:

$$(a^2) = 0\,, \quad (b^2) = 0\,, \quad (c^2) = 0\,, \quad (d^2) = 0\,,$$
$$(ab) = 0\,, \quad (ac) = 0\,, \quad (bd) = 0\,, \quad (dc) = 0\,.$$

Eine Gerade x des Complexes möge die vier Seitenflächen des Tetraeders in Punkten schneiden, durch welche die Strahlen

$$1)\ a + \lambda c\,,$$
$$2)\ b + \mu d\,,$$
$$3)\ a + \nu b\,,$$
$$4)\ c + \varkappa d$$

gehen. Da

$$(ax) + \lambda(bx) = 0,\ (bx) + \mu(dx) = 0,\ (ax) + \nu(bx) = 0,\ (cx) + \varkappa(dx) = 0,$$

so besteht zwischen den Parametern die Identität:

$$\mu\nu = \varkappa\lambda\,.$$

Um das Doppelverhältniss der vier Punkte auszudrücken, wählen wir zwei sich schneidende Strahlen y, z, welche x und beziehungsweise 1), 2) schneiden, so dass:

$$(yz) = 0\,,$$
$$(ay) + \lambda(cy) = 0\,,$$
$$(bz) + \mu(dz) = 0\,.$$

Der Strahl $y + \varrho_1 z$ schneide 3), $y + \varrho_2 z$ dagegen 4), so ist ferner:

$$(ay) + \nu(by) + \varrho_1[(az) + \nu(bz)] = 0\,,$$
$$(cy) + \varkappa(dy) + \varrho_2[(cz) + \varkappa(dz)] = 0$$

und

$$\delta = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\,.$$

Nimmt man für y den Strahl $a + \lambda c$, so ist:

$$(ay) = 0,\ (by) = 0,\ (cy) = 0,\ (dy) = (ad),\ (yx) = 0,\ (bz) + \mu(dz) = 0.$$

Vermöge dieser Ausdrücke ergiebt sich sofort:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = -\frac{\nu}{\varkappa}\frac{(bc)}{(ad)}$$

Man erhält daher etwa aus 3), 4) die Gleichung des Complexes in der Form

$$a_x d_x (bc) + \delta(ad) c_x b_x = 0\,.$$

Insbesondere ist also die Gleichung des harmonischen Complexes

$$a_x d_x (bc) - (ad) c_x d_x = 0\,.$$

Der Complex $a_x d_x (bc) + (ad) c_x d_x = 0$ ist dagegen ein specieller, alle

seine Linien sind singulär. Er stellt alle Geraden vor, welche durch die beiden übrigen Kanten des Tetraeders hindurchgehen. Nennen wir dieselben $\gamma'\gamma''$, so muss sich die letztere Gleichung auf

$$\gamma_x'\gamma_x'' = 0$$

reduciren. Man kann dies in der That auf folgende Weise zeigen. Die beiden Kanten $\gamma'\gamma''$ sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$(\gamma a) = 0, \quad (\gamma b) = 0, \quad (\gamma c) = 0, \quad (\gamma d) = 0, \quad (\gamma^2) = 0.$$

Bezeichnet man, wie dies im Folgenden immer geschehen soll, die Determinante

$$\Sigma \pm (A_1 B_2 C_3 D_4 E_5 F_6)$$

durch $(ABCDEF)$, und wird demgemäss

$$(abcd\gamma'\gamma'') = \Delta,$$
$$(abcdx\gamma') = \Delta',$$
$$(abcdx\gamma'') = \Delta''$$

gesetzt, so ist

$$\Delta^2 = (\gamma'\gamma'')^2 (ad)^2 (bc)^2,$$
$$\Delta'\Delta = (\gamma'\gamma'')(\gamma' x)(ad)^2(bc)^2,$$
$$\Delta''\Delta = (\gamma'\gamma'')(\gamma'' x)(ad)^2(bc)^2,$$

also

$$\Delta = (\gamma'\gamma'')(ad)(bc),$$
$$\Delta' = (\gamma' x)(ad)(bc),$$
$$\Delta'' = (\gamma'' x)(ad)(bc).$$

Endlich hat man, durch Multiplication der Determinanten $\Delta'\Delta''$

$$\Delta'\Delta'' = -(\gamma'' x)(\gamma' x)((ad)(bc))^2 - 2(ad)(bc)[a_x d_x (bc) + (ad) b_x c_x]$$

eine Gleichung, welche nach den zuvor bestimmten Werthen von Δ' und Δ'' die Identität

$$a_x d_x (bc) + (ad) b_x c_x = -\gamma_x'\gamma_x''(ad)(bc)$$

aussagt*).

II.

Ueber die Umformung verschiedener homogener Differentialausdrücke in Liniencoordinaten.

Für unendlich nahe Gerade

$$x, \quad x + dx, \quad x + 2dx + d^2x, \quad x + 3dx + 3d^2x + d^3x$$

gelten die folgenden Gleichungen, welche sich durch Differentiation der Identität $(x^2) = 0$ ergeben:

---

*) In ähnlicher Weise lässt sich z. B. auch das Problem behandeln, denjenigen Comp'ex zu bestimmen, dessen Gerade von sechs festen Ebenen in einer Involution geschnitten werden.

$$(x^2) = 0\,,$$
$$(x\,dx) = 0\,,$$
$$(x\,d^2x) + (dx^2) = 0\,,$$
$$(x\,d^3x) + 3\,(dx\,d^2x) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung $(x\,dx) = 0$ sagt daher nicht aus, dass zwei unendlich nahe Gerade sich schneiden. Dies tritt in der That erst dann ein, wie Herr Klein bereits gezeigt hat*), wenn auch die Gleichung

$$-(x\,d^2x) = (dx^2) = 0$$

erfüllt ist.

Wir betrachten nun die Geraden, welche drei Complexen $F\,\Phi\,\Psi$ bez. von den Graden $m\,n\,p$ angehören. Dabei setzen wir wie üblich

$$f_i = \frac{1}{m}\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

$$f_{ik} = \frac{1}{m\,m-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_k},$$

so dass

$$\Sigma\, x_i f_i = F\,,$$
$$\Sigma\, x_i f_{ik} = f_k\,.$$

Dabei werden wir im Folgenden das Summenzeichen fortlassen, also statt der angeführten Ausdrücke einfach schreiben $x_i f_i = F$, $x_i f_{ik} = f_k$ u. s. w. Ferner sollen Ausdrücke, wie $\Sigma (f_i)^2$, $\Sigma f_i \varphi_i$, $\Sigma f_i \psi_i$ und analog gebildete durch f^2, $f\varphi$, $f\psi$ bezeichnet werden.

Für eine den drei Complexen angehörige Gerade x ist nun

(1) $$F = 0\,,\quad \Phi = 0\,,\quad \Psi = 0\,.$$

Für eine unendlich nahe (consecutive) gelten die Gleichungen:

(2)
$$\begin{cases} (f\,dx) = 0\,, \\ (\varphi\,dx) = 0\,, \\ (\psi\,dx) = 0\,, \\ (x\,dx) = 0\,, \\ (k\,dx) = 0\,. \end{cases}$$

In ihnen bedeuten die k_i beliebige Coefficienten, welche die homogenen Differentiale verbinden. Die Gleichungen (2) bestimmen die Verhältnisse der dx_i als Unterdeterminanten, so dass, wenn

$$\Pi = (f\varphi\psi x k \alpha)$$

gesetzt wird

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dx_4 : dx_5 : dx_6 = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_2} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_3} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_4} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_5} : \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_6}.$$

Sie geben zu verschiedenen Formeln Veranlassung, von welchen

*) Klein, Math. Ann. Bd. V, S. 293.

in der Liniengeometrie ein sehr vielfältiger Gebrauch zu machen ist und deren wichtigste wir im Folgenden darlegen werden.

Wir setzen:

$$(dx f\varphi\psi x k) = (dx^2) = \Delta\,. \tag{3}$$

Quadrirt man Δ, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (2), (1):

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} (dx^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & fk \\ 0 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & \varphi k \\ 0 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & \psi k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kx \\ 0 & fk & \varphi k & \psi k & kx & k^2 \end{vmatrix} = -(kx^2)\,(dx^2)\,V\,,$$

wo zur Abkürzung

$$V = \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

gesetzt ist. Es ist daher

$$\Delta = -(kx^2)\,V\,. \tag{5}$$

Setzt man ferner

$$\Delta' = (f\,\varphi\,\psi\,x\,dx\,dx^2)\,,$$

so ergiebt sich sofort

$$\Delta\Delta' = (dx^2)\,(dx^2)\,(kx)\,V\,,$$

also

$$\Delta' = -(kx^3)\,V^2\,. \tag{6}$$

Bedeuten die $c_i b_i$ willkührliche Grössen, und wird die Determinante

$$(f\,\varphi\,\psi\,x\,c\,b) = \mathsf{K}$$

gesetzt, so ist

$$\mathsf{K}\Delta' = -(dx^2)\,V \begin{vmatrix} cx & c_{dx} \\ bx & b_{dx} \end{vmatrix},$$

so dass

$$\begin{vmatrix} cx & c_{dx} \\ bx & b_{dx} \end{vmatrix} = -(kx)\,(f\,\varphi\,\psi\,x\,c\,b) = -(kx)\,\mathsf{K}\,. \tag{7}$$

Endlich hat man als Werth der Determinante, welcher entsteht, wenn man die Determinante der quadratischen Form (x^2) mit $f_i \varphi_i \psi_i x_i c_i$ horizontal und mit $f_i\,\varphi_i\,\psi_i\,x_i\,b_i$ vertical rändert, eine Operation, die wir durch

$$\left(\Omega : f_i\varphi_i\psi_i x_i \begin{matrix} c_i \\ b_i \end{matrix}\right)$$

bezeichnen,

$$\left(\Omega : f_i\varphi_i\psi_i x_i \begin{matrix} c_i \\ b_i \end{matrix}\right) = -c_x b_x V\,. \tag{8}$$

Die consecutive Gerade von $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} k_i d^2 x_i = 0\,, \\ x_i d^2 x_i + (dx_i^2) = 0\,, \\ f_i d^2 x_i + (m-1)\, f_{ik} dx_i dx_k = 0\,, \\ \varphi_i d^2 x_i + (n-1)\, \varphi_{ik} dx_i dx_k = 0\,, \\ \psi_i d^2 x_i + (p-1)\, \psi_{ik} dx_i dx_k = 0\,. \end{cases}$$

Trägt man an Stelle der $dx_i dx_k$ ihre Werthe aus (2) ein, so entsteht:

$$f_i d^2 x_i = -(n-1) \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_1 & \varphi_1 & \psi_1 & x_1 & k_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_2 & \varphi_2 & \psi_2 & x_2 & k_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_3 & \varphi_3 & \psi_3 & x_3 & k_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_4 & \varphi_4 & \psi_4 & x_4 & k_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_5 & \varphi_5 & \psi_5 & x_5 & k_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_6 & \varphi_6 & \psi_6 & x_6 & k_6 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Man reducirt diese Determinante, indem man die sechs ersten Horizontal- oder Vertikalreihen mit den x multiplicirt und von der siebenten abzieht. Es ergiebt sich so:

$$(10)\qquad \begin{cases} f_i\, d^2 x_i = (m-1)\, U_1 (kx)^2\,, \\ \varphi_i d^2 x_i = (n-1)\, U_2 (kx)^2\,, \\ \psi_i\, d^2 x_i = (p-1)\, U_3 (kx)^2\,. \end{cases}$$

Es bedeutet in den Gleichungen (10) U_1 — und dem analog U_2, U_3 — die mit $\varphi_i \psi_i x_i$ geränderte Determinante der Coefficienten der quadratischen Form

$$X_i X_k f_{ik}\,,$$

welche letztere mit der Hesse'schen Determinante von F identisch ist.

Die Darstellung des Ausdruckes $dx_i d^2 x_i = -\frac{1}{3}(x_i d^3 x_i)$ erhält man durch Differentiation der Gleichung (5), nämlich:

$$(11)\qquad -2\,(dx\, d^2 x) = (kx)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\, dx_i\right).$$

Andererseits hat man:

$$dx\, d^2 x = (d^2 x\, f\, \varphi\, \psi\, x\, k) = \Delta'''.$$

Daraus ergiebt sich:

$$\Delta'''^2 = \begin{vmatrix} (d^2x^2) & (m-1)(kx)^2U_1 & (n-1)(kx)^2U_2 & (p-1)(kx)^2U_3 & (kx)^2V & 0 \\ (m-1)(kx)^2U_1 & f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & fk \\ (n-1)(kx)^2U_2 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & \varphi k \\ (p-1)(kx)^2U_3 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & \psi k \\ (kx)^2V & 0 & 0 & 0 & 0 & (kx)^2 \\ 0 & fk & \varphi k & \psi k & (kx)^2 & k^2 \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Ausdrucke lassen sich die willkührlichen Grössen k ohne weiteres nicht entfernen. Wenn aber $V = 0$, so erhält man:

$$(12)\quad (\Delta''') = (kx)^6 \begin{vmatrix} 0 & (m-1)U_1 & (n-1U_2) & (p-1)U_3 \\ (m-1)U_1 & f^2 & f\varphi & f\psi \\ (n-1)U_2 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi \\ (p-1)U_3 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck rechter Hand lässt sich, von der Gleichung (11) ausgehend, wenn man die Differentialquotienten von V mit v_i bezeichnet, auch in folgender Form

$$(16)\qquad \tfrac{1}{4}(kx)^6 \begin{vmatrix} 0 & vf & v\varphi & v\psi \\ vf & f^2 & f\varphi & f\psi \\ v\varphi & f\psi & \varphi^2 & \varphi\psi \\ v\psi & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix}$$

darstellen.

III.

Die Ordnung und der Rang der windschiefen Fläche, welche vollständiger Schnitt der drei Complexe $F\ \Phi\ \Psi$ ist.

Die Ordnung N der windschiefen Fläche ergiebt sich gleich $2mnp$. Eine willkürliche Gerade y wird nämlich von so viel Erzeugenden x der Fläche getroffen als das System der Gleichungen

$$(yx) = 0,\quad F = 0,\quad \Phi = 0,\quad \Psi = 0,\quad (x^2) = 0$$

Lösungen für x zulässt.

Die Gleichungen II. (2) zeigen ferner, dass die consecutive Erzeugende einer beliebigen x vollkommen bestimmt ist. Eine Unbestimmtheit tritt nur dann ein, wenn Gleichungen von der Form

$$(1)\qquad \mu_1 f_i + \mu_2 \varphi_i + \mu_3 \psi_i = x_i \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

bestehen. Die consecutive Erzeugende ist dann aus den Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} (x\,dx) = 0\,, \\ (f\,dx) = 0\,, \\ (\varphi\,dx) = 0\,, \\ (\psi\,dx) = 0\,, \\ (k\,dx) = 0\,, \\ (\mu_1(m-1)f_{ik} + \mu_2(n-1)\varphi_{ik} + \mu_3(p-1)\psi_{ik})\,dx_i dx_k = T_{ik}\,dx_i dx_k \end{cases}$$

zu bestimmen. Darnach ergeben sich zwei Werthsysteme für die Differentiale. Die Fläche hat also eine Doppelerzeugende, wenn die Gleichungen (1) erfüllt sind. Fügt man den Gleichungen (2) noch die folgenden

$$(zx) = 0\,, \quad (z\,dx) = 0$$

hinzu und eliminirt die Differentiale, so erhält man das Product der beiden Gleichungen zweier linearer Complexe, denen die Doppelerzeugende angehört, und deren Ebenen längs derselben Tangentenebenen der Fläche sind. Dieses Product lässt sich, wenn durch Π die Determinante der quadratischen Form $T_{ik}x_i x_k$ bezeichnet wird, darstellen durch

$$(\Pi : f_i \varphi_i z_i) = 0.$$

Die Doppelerzeugende wird daher zur Rückkehrerzeugenden, wenn der Kern dieser Determinante verschwindet, d. h. wenn

$$(\Pi : f_i \varphi_i) = 0\,.$$

Höhere Singularitäten der Fläche entstehen, wenn von den Gleichungen

$$f_i = \varrho_1 x_i\,, \quad \varphi_i = \varrho_2 x_i\,, \quad \psi_i = \varrho_3 x_i$$

zwei oder drei für eine Erzeugende x bestehen. Besteht nur die Gleichung $f_i = \varrho_1 x_i$, so hat der erzeugende Complex F selbst x zur Doppellinie*), die dann Doppel- oder Rückkehrerzeugende der Fläche wird. *Finden dagegen zwei oder drei zugleich statt, so hat die Fläche die Gerade x zur vier-, respective achtfachen Generatrix.*

Die Gleichungen (1) repräsentiren eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der drei Complexe. Für den Fall

$$\begin{aligned} F &= \Sigma\, a_{ik} x_i x_k\,, \\ \Phi &= \gamma' x\,, \\ \Psi &= \gamma'' x \end{aligned}$$

kann man dieselbe dahin aussprechen, dass die Discriminante nach μ der Determinante:

*) Plücker, Neue Geometrie des Raumes S. 296.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \gamma_1' & \gamma_1'' \\ a_{12} & a_{22}-\mu & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & \gamma_2' & \gamma_2'' \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\mu & a_{34} & a_{35} & a_{36} & \gamma_3' & \gamma_3'' \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}-\mu & a_{45} & a_{46} & \gamma_4' & \gamma_4'' \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55}-\mu & a_{56} & \gamma_5' & \gamma_5'' \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66}-\mu & \gamma_6' & \gamma_6'' \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' & \gamma_4' & \gamma_5' & \gamma_6' & 0 & 0 \\ \gamma_1'' & \gamma_2'' & \gamma_3'' & \gamma_4'' & \gamma_5'' & \gamma_6'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

verschwinden muss.

Unter dem Range einer Fläche verstehen wir überhaupt den Grad desjenigen speciellen Complexes, welcher die sämmtlichen Tangenten derselben repräsentirt, *oder den Grad der Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten.* Der Rang ist daher auch gleich dem Grade ihres Tangentenkegels oder gleich der Classe ihrer ebenen Schnittcurve.

Die Gleichung der windschiefen Fläche erhält man auf folgende Weise ausgedrückt in Liniencoordinaten. Soll die Gerade y Tangente der Fläche sein, so muss sie zwei consecutive Erzeugende derselben schneiden. Daher ist

$$(3) \qquad \begin{cases} (yx) = 0, \\ (ydx) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen II. (2) und der letzteren die Differentiale, so erhält man

$$(4) \qquad (f\,\varphi\,\psi\,x\,k\,y) = 0.$$

Das Quadrat des letzteren Ausdruckes ist gleich $(kx)^2$, multiplicirt in die mit $fy\ \varphi y\ \psi y$ geränderte Determinante V. Es lässt sich also aus (4) der Factor (kx) stets durch Division aussondern, wenngleich dies, wie es scheint, nicht so ausgeführt werden kann, dass die Determinantenform dabei beibehalten wird. Die Gleichung (4) ist daher vom ersten Grade in y, vom $m + n + p - 3^{\text{ten}}$ in x. *Eliminirt man x aus* (4) *und den Gleichungen*

$$(yx) = 0, \quad (x^2) = 0, \quad F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \Psi = 0,$$

so entsteht eine Gleichung vom Grade

$$(5) \qquad R = 2\,mnp\,(m + n + p - 2)$$

in den y, welche die Fläche in Liniencoordinaten y darstellt. Für jede Doppelerzeugende x_0 der Fläche enthält dieselbe quadratisch den Factor $(x_0 y)$.

Wir zeigen, wie eine solche Elimination in den einfacheren Fällen sich wirklich ausführen lässt.

1) *Linienfläche* (1, 1, 1) (nach Plücker's Bezeichnung*)), *welche durch drei lineare Complexe* $a_x = 0$, $b_x = 0$, $c_x = 0$ *erzeugt wird.*

Man hat hier ohne weiteres:

$$(a\,b\,c\,x\,k\,y)^2 = (kx)^2 \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ay \\ ab & b^2 & bc & by \\ ac & bc & c^2 & cy \\ ay & by & cy & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Das Quadrat des Ausdruckes (4) von dem Factor (kx) befreit, stellt also einen von den x völlig freien Ausdruck, d. h. das Eliminationsresultat oder die Gleichung des von den drei linearen Complexen erzeugten Hyperboloides in Liniencoordinaten vor.

2) *Linienfläche* (2, 1, 1), *welche durch den Schnitt dreier Complexe* $a_x = 0$, $b_x = 0$; $\psi = \Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ *erzeugt wird.* Die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & a\psi & ay \\ ab & b^2 & b\psi & by \\ a\psi & b\psi & \psi^2 & \psi y \\ ay & by & \psi y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist homogen vom zweiten Grade in y und x. Multiplicirt man die Gleichungen $(yx) = 0$, $(ax) = 0$, $(bx) = 0$ mit $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ und nimmt $(x^2) = 0$, $\psi = 0$ hinzu, so hat man 21 Gleichungen, in welchen die 21 unbekannten Grössen $x_i x_k$ linear und homogen auftreten. Die Determinante dieser 21 Gleichungen, gleich Null gesetzt, stellt die Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten vor, da sie die y nur im achten Grade enthält. Man vermeidet das Auftreten einer so vielreihigen Determinante, wenn man zuvor die Gleichung (4) durch Division von dem Factor (kx) befreit. Man hat alsdann aus zwei Gleichungen zweiten und vier Gleichungen ersten Grades die x zu eliminiren, was ohne Schwierigkeit geschehen kann**), weshalb wir nicht weiter darauf eingehen.

Wir wenden uns jetzt wieder zu der allgemeinen Betrachtung zurück. Bezeichnet man mit d die Zahl der Doppelerzeugenden der Fläche, *so ist nach* (5) *der Rang der Fläche gegeben durch die Gleichung*

$$R = 2\,mnp\,(m + n + p - 2) - 2\,d\,.$$

Man kann die Zahl R auch durch directe Bestimmung der Classe der ebenen Schnittcurve oder der Ordnung des Tangentenkegels er-

---

*) Plücker, Sur les surfaces reglées leur construction et classification, Ann. di Mat. 1870.

**) Vgl. Clebsch, Crelle's Journ. Bd. 59, S. 1, oder auch: Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen Bd. 58 desselben Journals.

halten. Soll eine Gerade $a + \lambda b$ des ebenen Büschels (a, b) Tangente der Fläche sein, so ist nach (3):

$$a_x + \lambda b_x = 0\,,$$
$$(a_{dx}) + \lambda(b_{dx}) = 0\,,$$

daher

$$a_x(b_{dx}) - b_x(a_{dx}) = 0\,.$$

Werden jetzt die Differentiale eliminirt, so ist

(6) $$(f\varphi\psi x k\ \ a_x b - b_x a) = 0$$

eine Gleichung, welche einen Complex $m + n + p - 2^{\text{ten}}$ Grades vorstellt, welcher die erzeugenden Complexe in $2mnp(m + n + p - 2)$ Geraden schneidet. Derselbe geht ersichtlich durch jede Doppelerzeugende der Fläche einmal hindurch, da der Ausdruck (6) verschwindet, wenn die Gleichungen (1) gelten. Die Classe des ebenen Schnittes, sowie der Grad des Tangentenkegels ist daher durch die Zahl R gegeben*).

Bezeichnet man den Grad der *Doppelcurve* der Fläche durch D, so ist nach den Formeln von Plücker

$$N(N-1) - 2D - 2d = R\,,$$

also, wenn für N $2mnp$, für R die Zahl $2mnp(m+n+p-2) - 2d$ gesetzt wird:

(7) $$D = mnp\,[2\,mnp - (m + n + p) + 1]\,.$$

Man erhält hieraus endlich das Geschlecht P der windschiefen Fläche

(8)
$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{2}(N-1)(N-2) - D - d \\ &= (2\,mnp - 1)(mnp - 1) - D - d \\ &= mnp\,(m + n + p - 4) + 1 - d\,. \end{aligned}$$

Das Auftreten von Doppelerzeugenden modificirt daher den Grad der Doppelcurve nicht, sondern nur das Geschlecht der Fläche. Die Linienflächen (2, 1, 1) sind im Allgemeinen vierten Grades vom Geschlechte eins, mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche erhalten bleibt, wenn die Fläche eine Doppelerzeugende erhält, also das Geschlecht Null wird.

Wir verificiren die Formeln (7), (8) in einigen Fällen durch directe Betrachtung.

1) *Linienfläche* $(p, 1, 1)$. Zwei lineare Complexe $a_x = 0$, $b_x = 0$ und $\psi = 0$ erzeugen eine windschiefe Fläche $(p, 1, 1)$ vom Grade $2p$, deren Rang $2p^2$ ist. Man kann die Classe des ebenen Schnittes aber auch auf folgende Weise finden. Die Fläche enthält nämlich zwei

*) Auf eine hiervon nicht wesentlich verschiedene Weise hat bereits Herr Lüroth die Zahl R bestimmt. Crelle's Journ. Bd. 67, S. 135.

p-fache Leitlinien, die Directricen des den beiden Complexen a_x, b_x zugehörigen Büschels und ausser ihnen offenbar keine Doppelcurve. Daher ist der ebene Schnitt eine Curve $2p^{ter}$ Ordnung mit zwei p-fachen Punkten, seine Classe also wie vorhin:

$$2p(2p-1)-2p(p-1)=2p^2.$$

2) *Linienfläche* $(p, 2, 1)$, *welche von einem speciellen linearen, einem Complexe zweiten Grades, dem die Axe a des speciellen angehört, und* $\psi = 0$ *erzeugt wird.* Die Singularitäten der Fläche sind folgende: Die Axe a ist $2p$-fache Leitlinie derselben. Durch dieselbe gehen ferner nach den Untersuchungen Plücker's*) vier ausgezeichnete Ebenen $e_1 e_2 e_3 e_4$, für welche die in ihnen liegende Complexcurve des Complexes zweiter Ordnung in zwei Strahlbüschel degenerirt, deren Centra beziehungsweise $o_1\omega_1$ $o_2\omega_2$ $o_3\omega_3$ $o_4\omega_4$ seien. Von denselben liegen $o_1 o_2 o_3 o_4$ auf der Axe a selbst. Die Doppelcurve hat daher diese Punkte zu vielfachen Punkten, welche, wie man leicht sieht, als $\frac{p(p-1)}{2}$-fache zu zählen sind, weil von ihnen so viel Zweige der Curve auslaufen. In einer beliebig durch die Axe gelegten Ebene liegen ferner $2p$ Erzeugende der Fläche — die gemeinsamen Tangenten des Complexkegelschnittes und der Complexcurve von $\psi=0$ — also $(2p-1)p$ Punkte der Doppelcurve. Daher ist der Grad der letzteren

$$2p(p-1)+p(2p-1)=4p^2-3p;$$

der Totalgrad der Doppelcurven ist also, wenn man die $2p$-fache Leitlinie noch hinzurechnet:

$$6p^2-4p,$$

eine Zahl, welche sich übereinstimmend auch aus (7) ergiebt. Die Doppelcurve hat übrigens auch die vier Punkte $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$ zu $\frac{p(p-1)}{2}$-fachen Punkten, während die $\frac{p(p-1)}{2}$ Zweige derselben, welche von einem der Punkte o_i auslaufen, von der zugehörigen Ebene e_i in demselben berührt werden. Beispielsweise ist für $p=3$ die krumme Doppelcurve der Fläche zwölfter Ordnung von der 27^{ten} Ordnung mit 8 wirklichen dreifachen Punkten.

Die Formel (7) nimmt eine etwas andere Gestalt an, wenn die Doppelerzeugende zugleich einen Theil der Doppelcurve der Fläche ausmacht. Um diesen Fall zu erläutern, betrachten wir die windschiefe Fläche, welche von einem speciellen linearen Complexe γ_x, dessen Axe γ den beiden Complexen Φ, Ψ angehört, gebildet wird. Die Gleichungen III. (2), welche die consecutive Erzeugende $x+dx$ bestimmen, werden unbestimmt für $x=\gamma$; sie sind dann zu ersetzen durch das System:

*) Plücker, N. Geom. d. R. S. 177.

$$(\gamma\, dx) = 0,$$
$$(\varphi\, dx) = 0,$$
$$(\psi\, dx) = 0,$$
$$(k\, dx) = 0,$$
$$(dx^2) = 0.$$

Aus denselben ergiebt sich, dass γ Doppelerzeugende der Fläche ist und zugleich von ihren beiden consecutiven Erzeugenden geschnitten wird. Ausserdem ist aber γ eine $np-1$-fache Leitgerade der Fläche. Der Rang derselben ist nach wie vor durch die Gleichung (6)

$$P = ((a_x b - b_x a)\, \varphi\, \psi\, \gamma\, x\, k) = 0$$

bestimmt. P verschwindet für $x = \gamma$, während $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ einen bestimmten Werth behält. Da auch $\Sigma \frac{\partial P}{\partial x_i}\, dx_i$ nicht verschwindet, findet für den Rang der Fläche keine weitere Erniedrigung statt; er ist demnach:

$$2np\,(n+p-1) - 2\,.$$

Der Grad der krummen Doppelcurve D ist daher durch die Gleichung

$$D = \tfrac{np}{2}\,(3np-1) - np\,(n+p) + 1$$

gegeben. Das Geschlecht der Fläche bestimmt sich noch immer nach (8)

$$P = np\,(n+p-3)\,.$$

IV.

Die singulären Erzeugenden der windschiefen Fläche.

Zwei consecutive Erzeugende der Fläche schneiden sich im Allgemeinen nicht. Damit x von $x + dx$ getroffen werde, muss nach II. die Bedingung

$$(dx^2) = -\,(kx)^2\, V = 0$$

erfüllt sein. $V = 0$ stellt einen Complex vom Grade $2(m+n+p-3)$ vor, welcher mit den erzeugenden Complexen $4\,mnp(m+n+p-3)$ singuläre Erzeugende der Fläche bestimmt*). Der Durchschnittspunkt von x und $x + dx$ liegt dabei auf der Doppelcurve; wir bezeichnen ihn wie üblich als *Cuspidalpunkt* der Fläche**).

---

*) Vgl. Lüroth a. a. O.; Klein, Math. Ann. Bd. V, S. 292.

**) Aus der Zahl $4mnp(m+n+p-3)$ der Cuspidalpunkte erhält man leicht die Bestimmung mehrerer anderer, für die Theorie der Liniengebilde wichtiger Zahlen.

1) *Ordnung und Classe der Brennfläche von zwei Complexen* $\Phi = 0$, $\Psi = 0$. Eine solche Fläche ist in sich dualistisch; sie entsteht, als Punktgebilde betrachtet,

Befinden sich unter den Complexen zwei lineare a_x, b_x, so gehört die Linienfläche einem ganzen Büschel linearer Complexe $a_x + \lambda b_x = 0$ an. In dem Letzteren befinden sich im Allgemeinen zwei specielle; die Fläche hat die Axen α, β derselben zu p-fachen Leitlinien, auf denen je $2p(p-1)$ Cuspidalpunkte liegen.

Insbesondere aber können die beiden Axen α, β zusammenfallen. Die Fläche gehört dann einer speciellen Congruenz an, man kann sie erzeugen durch den Complex Ψ, den speciellen linearen α_x und einen anderen linearen, der die Axe α in sich enthält. Sie hat dann zwei

---

durch die Schnitte unendlich naher Geraden der Congruenz $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, als Ebenengebilde durch die Ebenen dieser Geraden, wobei aber im Allgemeinen die betreffende Ebene ihren Tangentialpunkt nicht im Schnittpunkte der beiden Geraden hat. Vgl. Pasch, Habilitationsschrift, Giessen 1870.

Die Zahl der singulären Erzeugenden der Linienfläche, welche von Φ, Ψ und einem speciellen linearen Complexe gebildet wird, ist nun gleich der Summe der Zahl der Punkte der Brennfläche, welche auf der Axe des letzteren liegen, und der Ebenen der Brennfläche, welche durch die Axe gehen, d. h. gleich der Summe von Ordnung und Classe der Brennfläche. *Da beide Zahlen gleich sein müssen, so hat man*

$$2np(n+p-2)$$

als Ordnungs- und Classenzahl der Brennfläche zweier Complexe n^{ten} und p^{ten} Grades (eines Strahlensystems $[np]$).

2) *Ordnung und Classe der singulären Fläche eines Complexes $F=0$.* Einem Complexe $F=0$ vom n^{ten} Grade ist zugeordnet der Complex $\Phi = \Sigma f_i^2 = 0$ vom $2(n-1)^{ten}$ Grade, welcher mit ihm die Congruenz der singulären Linien des Complexes bestimmt. Damit wird zugleich jeder singulären Linie x eine andere Linie mit den Coordinaten $y_i = f_i$ zugeordnet. Beide schneiden sich im singulären Punkte von x, welcher ein Punkt der singulären Fläche des Complexes ist, während (xy) die Tangentialebene dieses Punktes, die singuläre Ebene vorstellt. Für die Linienfläche, welche von F, Φ und dem linearen speciellen $\Psi=0$ mit der Axe a erzeugt wird, ist nun:

$$V = (fa)\,[2(f\varphi)(\varphi a) - \varphi^2 \cdot (fa)].$$

Der Factor (fa) gleich Null gesetzt, bestimmt mit den gegebenen Complexen $4 \cdot n(n-1)^2$ singuläre Erzeugende der Linienfläche. Für dieselben schneiden sowohl x als y die Axe a. Es liegt also entweder der singuläre Punkt von x auf der Axe, oder die singuläre Ebene xy geht durch dieselbe. $4n(n-1)^2$ ist daher die Summe von Ordnung und Classe der singulären Fläche des Complexes. Man hat daher den Satz:

Ordnung und Classe der singulären Fläche eines Complexes vom n^{ten} Grade ist

$$2n(n-1)^2.$$

Die nämliche Zahl ist auf ganz anderem Wege von Clebsch gefunden worden. (Vgl. dessen Aufsatz (diese Annalen Bd. V) Ueber die Plücker'schen Complexe und die Singularitätenflächen derselben.)

Der andere Factor von V bezieht sich auf Ordnung und Classe einer *zweiten* Fläche, welche mit der besprochenen die vollständige Brennfläche der Congruenz $F\,\Phi$ ausmacht.

Ordnung und Classe dieser Fläche ist daher

$$2n(n-1)(5n-7).$$

unendlich nahe p-fache Leitlinien. Dem entsprechend geht die Determinante V in ein Quadrat über; es giebt also nur $2p(p-1)$ — in gewissem Sinne doppeltzählende — singuläre Linien oder Cuspidalpunkte. Diese Bemerkung ist übrigens nur ein specieller Fall eines allgemeineren Theorems, welches Herr Klein*) bereits erwähnt hat.

Die Zahl der singulären Ebenen verringert sich, wenn die Fläche eine der in § III. betrachteten Singularitäten besitzt.

Für eine Doppelerzeugende findet, wie wir sahen, die Beziehung:

$$\mu_1 f_i + \mu_2 \varphi_i + \mu_3 \psi_i = x_i \tag{1}$$

statt. Multiplicirt man die sechs Gleichungen (1) der Reihe nach mit $f_i\, \varphi_i\, \psi_i$ und summirt jedesmal nach i, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mu_1 f^2 + \mu_2 f\varphi + \mu_3 f\psi &= 0\,, \\ \mu_1 f\varphi + \mu_2 \varphi^2 + \mu_3 \varphi\psi &= 0\,, \\ \mu_1 f\psi + \mu_2 \varphi\psi + \mu_3 \psi^2 &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die Determinante derselben ist $V = 0$. Der Complex V verschwindet daher für jede Doppelerzeugende der Fläche. Eine weitere Singularität besitzt derselbe im Allgemeinen nicht. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (1) mit f_{ik}, φ_{ik}, ψ_{ik} und summirt wieder nach i, so ergiebt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \mu_1 f_i f_{ik} + \mu_2 \varphi_i f_{ik} + \mu_3 \psi_i f_{ik} &= f_k\,, \\ \mu_1 f_i \varphi_{ik} + \mu_2 \varphi_i \varphi_{ik} + \mu_3 \psi_i \varphi_{ik} &= \varphi_k\,, \\ \mu_1 f_i \psi_{ik} + \mu_2 \varphi_i \psi_{ik} + \mu_3 \psi_i \psi_{ik} &= \psi_k\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Werden jetzt die Gleichungen (3) der Reihe nach mit

$$2\mu_1(m-1)\,,\quad 2\mu_2(n-1)\,,\quad 2\mu_3(p-1)$$

multiplicirt und addirt, so entsteht:

$$\begin{aligned} R &= \mu_1^2 \frac{\partial f^2}{\partial x_k} + \mu_2^2 \frac{\partial \varphi^2}{\partial x_k} + \mu_3^2 \frac{\partial \psi^2}{\partial x_k} + 2\mu_1\mu_2 \frac{\partial f\varphi}{\partial x_k} + 2\mu_1\mu_3 \frac{\partial f\psi}{\partial x_k} + 2\mu_2\mu_3 \frac{\partial \varphi\psi}{\partial x_k} \\ &= 2[\mu_1(m-1) f_k + \mu_2(n-1)\varphi_k + \mu_3(p-1)\psi_k]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Andererseits zeigt die Differentiation von V, dass

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = R \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi \\ f\varphi & \varphi^2 \end{vmatrix}.$$

Der Complex V hat die Doppelerzeugende also im Allgemeinen zur *einfachen* Linie, da $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ weder verschwindet, noch proportional mit x_i ausfällt. Der Werth von R zeigt aber, dass

$$\Sigma \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k = 0\,.$$

*) Math. Ann. Bd. V, S. 292.

Demnach enthält V die beiden consecutiven Erzeugenden der Linienfläche. *Die Zahl der singulären Erzeugenden wird daher durch das Auftreten einer Doppelerzeugenden um vier vermindert.*

Sind dagegen $F\,\Phi\,\Psi$ von gleichem Grade m, so ist $R=2(m-1)x_k$, also $\frac{\partial V}{\partial x_k} \equiv x_k$. Die Doppelerzeugende x ist dann selbst *Doppellinie* des Complexes V, welche von den consecutiven Erzeugenden keine in sich enthält*). Die Verminderung der Zahl der singulären Erzeugenden bleibt daher die nämliche. Dasselbe gilt auch in dem Falle, wenn einer der Complexe selbst eine Doppellinie besitzt**).

Wenn zwei oder drei der erzeugenden Complexe die Gerade x zur Doppellinie haben, so wird diese zugleich vier-, respective sechsfache Linie des Complexes V. Die Verminderung der Zahl der singulären Erzeugenden beträgt daher mindestens 16, resp. 48, doch scheinen ausserdem noch specielle Beziehungen des Complexes V zu der windschiefen Fläche stattzufinden, deren algebraische Bestimmung schwierig sein dürfte.

In speciellen Fällen können zwei singuläre Erzeugende consecutiv sein. Dazu ist erforderlich, dass mit V zugleich

$$(dx\,d^2x)$$

verschwinde. Dazu ist eine Bedingung zwischen den Coefficienten von $F\,\Phi\,\Psi$ hinreichend, welche für den Fall $F=a_x$, $\Phi=b_x$ das Resultat der Elimination der x aus den vier Gleichungen zweiten Grades:

$$U_3=0\,,\quad V=0\,,\quad (x^2)=0\,,\quad \Psi=0$$

und den linearen Gleichungen

$$a_x=0\,,\quad b_x=0$$

sein würde.

Die Fläche wird dagegen developpabel, wenn der Complex V alle den drei Erzeugenden gemeinschaftlichen Geraden in sich enthält. Wir gehen jedoch auf die Betrachtung dieses Falles nicht weiter ein, da er sich besser an die Theorie der Brennflächen anschliesst.

---

*) In diesem Falle kann man die erzeugenden Complexe durch irgend drei lineare Combinationen derselben ersetzen. Man erkennt daraus ohne weiteres, wovon man sich übrigens auch direct überzeugen kann, dass die Determinante V eine Combinante der drei Formen $F\,\Phi\,\Psi$ ist.

**) Die am Schluss des § III. betrachtete Fläche γ, Φ, Ψ besitzt allerdings nur

$$4np(n+p-2)-6$$

singuläre Erzeugende. Von diesen haben $2np(n+p-2)$ ihre Cuspidalpunkte auf der $np+1$-fachen Leitlinie der Fläche. Die Erniedrigung um sechs (anstatt vier) ist eine Folge davon, dass unter den singulären Erzeugenden sich zwei ausgezeichnete befinden, welche doppelt zu zählen sind.

V.

Die Haupttangenten der windschiefen Fläche.

Die Haupttangenten bilden in Folge der dualistischen Erzeugung der Fläche ein Strahlensystem gleicher Ordnung und Classe. Die Classe desselben ist durch die Zahl der Inflexionen des ebenen Schnittes gegeben, bestimmt sich also nach den Formeln von Plücker durch

$$3N(N-2) - 6D = 6mnp[m+n+p-2].$$

Man kann diese Zahl auf folgende Weise auch direct bestimmen. Eine Gerade y, welche Haupttangente der Fläche ist, muss drei consecutive Erzeugende derselben schneiden, also den Bedingungen

$$(1) \qquad (yx) = 0, \quad (y\,dx) = 0, \quad (y\,d^2x) = 0, \quad (y^2) = 0$$

genügen. Wir fragen nach der Zahl der Haupttangenten, welche zwei willkührliche Gerade a, b schneiden, fügen also den Gleichungen (1) die beiden

$$(2) \qquad a_y = 0, \quad b_y = 0$$

hinzu.

Die Elimination der y liefert die Determinante

$$(3) \qquad (\Omega : x\,dx\,d^2x\,a\,b) = 0.$$

Man eliminirt aus derselben die Differentiale durch zweimalige Multiplication mit $\Delta = (dx^2)$, wobei sich der Factor Δ^2 ohne weiteres wieder absondert und erhält so die Gleichung:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & (m-1)U_1 & af & bf \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & (n-1)U_2 & a\varphi & b\varphi \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & a\psi & b\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & a_x & b_x \\ (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 & 0 \\ af & a\varphi & a\psi & a_x & 0 & 0 & 0 \\ bf & b\varphi & b\psi & b_x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dasselbe stellt einen Complex $6(m+n+p-3)^{\text{ten}}$ Grades vor, welcher mit den erzeugenden Complexen $F\,\Phi\,\Psi$ $12mnp(m+n+p-3)$ Erzeugende der Linienfläche bestimmt, für welche jedesmal eine der ihnen zugehörigen Haupttangenten a und b schneidet. Man kann dies Resultat auch so aussprechen:

Der Grad der windschiefen Fläche, welche von den Haupttangenten gebildet wird, die einem linearen Complexe angehören, ist

$$12mnp(m+n+p-3).$$

Wenn a und b sich schneiden, so repräsentiren die

$$12mnp(m+n+p-3)$$

Erzeugenden solche Haupttangenten, die entweder in der Ebene ab liegen oder durch den Punkt ab gehen, wonach man wieder die vorhin angeführte Zahl für Classe und Ordnung des Strahlensystems der Haupttangenten erhält.

Die Determinante (4) nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn einer der Complexe, etwa F, linear ist. Alsdann ist $U_1 = 0$. Setzt man noch voraus, dass a b irgend zwei Gerade sind, welche F angehören, so ist

$$af = 0\,, \quad bf = 0\,,$$

womit sich (4) reducirt auf:

$$f^2 \begin{vmatrix} (m-1)\,U_2 & a_\varphi & b_\varphi \\ (p-1)\,U_3 & a_\psi & b_\psi \\ V & a_x & b_x \end{vmatrix}^2 . \tag{5}$$

Jede Schnittlinie der vier Complexe $F\,\Phi\,\Psi$ und (5) zählt also doppelt. In der That wird, wenn y eine in der Ebene ab liegende Haupttangente der Erzeugenden x ist, die conjugirte Polare von y in Bezug auf den linearen Complex F ebenfalls Haupttangente von x sein, aber durch den Punkt ab gehen. Es gehören mithin zu jeder Geraden x zwei Haupttangenten.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der *Haupttangentencurven* auf windschiefen Flächen. Wir gehen dabei aus von dem Satze, den Herr Lie zuerst in folgender Form ausgedrückt hat*):

Wenn eine Fläche ihre eigene reciproke Polare hinsichtlich eines linearen Complexes ist, so enthält dieselbe eine Haupttangentencurve, deren Tangenten dem Complexe angehören.

Im Anschluss an das Vorige drücken wir diesen Satz so aus: *Gehört eine Linienfläche einem linearen Complexe an, so ist die Linienfläche der Haupttangenten, welche ebenfalls Gerade des Complexes sind, developpabel und bildet mit ihrer Rückkehrcurve eine Haupttangentencurve der ersten Fläche.*

Einen liniengeometrischen Beweis dieses Satzes kann man in der folgenden Form geben:

Sind x, $x + dx$, $x + 2dx + dx^2$, $x + 3dx + 3dx^2 + d^3x$ vier consecutive Erzeugende der windschiefen Fläche, welche dem Complexe $F = y_x$ angehört, so ist:

$$(yx) = 0\,, \quad (y\,dx) = 0\,, \quad (y\,d^2x) = 0\,, \quad (y\,d^3x) = 0\,.$$

Eine Haupttangente y der Fläche, welche y ebenfalls angehört, genügt den Bedingungen (1), während ausserdem

*) Lie, Partielle Differentialgleichungen und Complexe, Math. Ann. Bd. V, S. 179. Einen geometrischen Beweis des Lie'schen Satzes gab Herr Klein (Math. Ann. Bd. V, S. 274).

$$(\gamma y) = 0$$

ist. Die consecutive Haupttangente $y + dy$ ist dann bestimmt durch

$$(x\,dy) = 0\,,\quad (dy\,dx) = 0\,,\quad (dy\,d^2x) + (y\,d^3x) = 0\,,\quad (\gamma\,dy) = 0\,,$$
$$(y\,dy) = 0\,,\quad (R\,dy) = 0\,.$$

Bildet man jetzt den Ausdruck (dy^2), dessen Verschwinden anzeigt, dass y von $y + dy$ geschnitten wird, so ergiebt sich:

$$(dy^2) = (\Omega : x\,dx\,\gamma\,k\,y) \equiv (\Omega : dx\,\gamma\,y) = \begin{vmatrix} (dx^2) & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

(dy^2) verschwindet also in der That, womit der Satz bewiesen ist. Aus dem Lie'schen Satze folgt nun unmittelbar unter Berücksichtigung von (4):

Der Rang der algebraischen Haupttangentencurve der Fläche, welche dem linearen Complexe $F = \gamma x$ angehört, ist gleich:

$$12\,pn\,(p + n - 2)\,.$$

Es ist nun leicht, auch Ordnung und Classe dieser Curve zu bestimmen. Da alle Tangenten der Haupttangentencurve dem linearen Complexe angehören, so ist diese eine Complexcurve desselben. *Sie ist daher von gleicher Ordnung und Classe.* In der That ist es eine Eigenschaft aller Curven, deren Tangenten Gerade eines linearen Complexes sind, gleiche Ordnung und Classe zu besitzen. Es sei nämlich N die Ordnung der Complexcurve. In einer willkührlichen Ebene e liegen dann N Curvenpunkte. Die Schmiegungsebenen derselben sind aber Ebenen des linearen Complexes, gehen daher durch einen in e gelegenen Punkt, nämlich denjenigen, welcher durch den linearen Complex der Ebene e zugeordnet ist.

Betrachtet man jetzt die Haupttangentencurve als von den Centren solcher Büschel gebildet, deren Strahlen zugleich Tangenten der Fläche und Linien des Complexes γ sind, so ergiebt sich:

In jeder Ebene liegen so viel Punkte der Haupttangentencurve als Tangenten der Fläche vorhanden sind, die dem linearen Complexe angehören und einen Punkt der Haupttangentencurve enthalten. Die Zahl dieser Punkte ist daher im Allgemeinen gleich der Classe des ebenen Schnittes der Fläche*), Ordnung und Classe der Haupttangentencurve ist daher im Allgemeinen durch den Rang der Fläche gegeben, d. h. gleich

$$2\,np\,(n + p - 1)\,.$$

*) Es ist dabei zu beachten, dass die Zahl der Tangenten an die Schnittcurve von einem nicht willkührlich zu wählenden Punkte aus zu bestimmen ist. In besonderen Fällen kann daher die Ordnung der Haupttangentencurve auch kleiner sein als die Classe des ebenen Schnittes.

Eine Complexcurve kann ferner im Allgemeinen keine stationären Ebenen enthalten. Denn es müssen dann drei consecutive Tangenten derselben in einer Ebene liegen, was vermöge der Erzeugung der Curve nur dann möglich ist, wenn sie zugleich durch einen Punkt gehen. Aus dem dualistischen Charakter der Complexcurve folgt dann, dass sie auch keine Spitzen enthält.

Insbesondere für den vorliegenden Fall kann man sich von der der letzteren Behauptung auf folgende Weise überzeugen. Auf jeder Erzeugenden x liegen zwei Punkte der Haupttangentencurve, die Schnittpunkte von x mit den beiden Geraden y, welche durch die Gleichungen (1) und $\gamma y = 0$ bestimmt sind. Für eine Spitze der Haupttangentencurve müssten jedenfalls diese beiden Punkte coincidiren, d. h. die Gleichungen eine Doppelwurzel y besitzen. Die letztere Bedingung führt auf

$$(\Omega : x\, dx\, d^2x\, \gamma) = 0\,,$$

d. h. auf die singulären Erzeugenden der Fläche.

Wir weisen jetzt nach, dass die Haupttangentencurve in den Cuspidalpunkten der Fläche stationäre Tangenten besitzt.

Dazu betrachten wir zunächst die Zahl der Punkte, welche die Haupttangentencurve mit einer durch die Generatrix a gehenden Ebene e gemein hat. Bezeichnet ν den Grad der Fläche, d ihre Doppelcurve, so ist die in der Ebene e liegende Schnittcurve eine Curve $\nu - 1^{\text{ter}}$ Ordnung mit $d - (n-2)$ Doppelpunkten. Die Zahl der Tangenten, welche sich von dem auf a liegenden Centrum des in e befindlichen Strahlbüschels ziehen lassen, ist:

$$(\nu - 1)(\nu - 2) - 2d + 2(n-2)\,.$$

Rechnet man die beiden auf a liegenden Punkte der Haupttangentencurve hinzu, so ist die Anzahl der Punkte derselben in der Ebene e

$$n(n-1) - 2d\,,$$

wie es sein muss. Es sei jetzt a eine singuläre Erzeugende; die Schnittcurve berührt dieselbe im Cuspidalpunkte der Fläche. Es existiren daher in der Ebene e

$$(n-1)(n-2) - 2d + 2(n-2) - 1 = n(n-1) - 2d - 3$$

nicht auf a gelegene Punkte der Haupttangentencurve.

Daher liegen auf a im Cuspidalpunkte drei zusammenfallende weitere Punkte derselben, d. h. die singuläre Erzeugende ist stationäre Tangente im Cuspidalpunkte.

Fällt endlich die schneidende Ebene e mit der parabolischen Ebene der Fläche zusammen, so ist die Schnittcurve vom $n - 2^{\text{ten}}$ Grade mit $d - 2(n-2)$ Doppelpunkten, und berührt a im Cuspidalpunkte. Da ferner das Centrum des Strahlbüschels in der Ebene e mit dem letzteren zusammenfällt, so ist die Zahl der Tangenten an die Curve:

$$(n-2)(n-3)-2d+4(n-2)-2=n(n-1)-2d-4.$$

Die parabolische Ebene enthält daher vier zusammenfallende Punkte der Haupttangentencurve, sie ist Schmiegungsebene derselben.

Man kann diesen Betrachtungen noch die Bemerkung hinzufügen, dass auf einer Doppelerzeugenden 4 Punkte der Haupttangentencurve liegen. Für eine Rückkehrgeneratrix rücken dieselben paarweise zusammen, dieselbe ist Doppeltangente der fraglichen Curve.

Aus den angestellten Betrachtungen ergiebt sich nun:

Die Haupttangentencurve besitzt $4np(n+p-2)$ *stationäre Tangenten, welche mit den singulären Erzeugenden der Fläche zusammenfallen. Wir werden weiterhin zeigen, dass ausserdem noch andere stationäre Tangenten vorhanden sind.*

Wir weisen jetzt nach, wie man die Ordnung und Classe der Haupttangentencurve auf analytischem Wege bestimmen kann.

Es sei x eine Erzeugende der Fläche, y eine ihr zugeordnete Haupttangente, für welche die Gleichungen (1) bestehen. Die Ebene xy ist dann zugleich die Schmiegungsebene der Haupttangentencurve, deren Tangente y ist. Ein willkührlicher Strahl des Büschels xy ist ferner $x+\lambda y$. Damit derselbe zwei willkührliche Gerade $a\,b$ schneide, müssen die Gleichungen

$$a_x+\lambda a_y=0,$$
$$b_x+\lambda b_y=0$$

bestehen. Aus denselben folgt:

$$a_x b_y - b_x a_y = 0. \tag{6}$$

Soll ausserdem y dem linearen Complexe $F=\gamma x$ angehören, so ist

$$\gamma y = 0. \tag{7}$$

Die Elimination der y aus den Gleichungen (1), (6), (7) liefert

$$(\Omega : x\,dx\,d^2x\;\gamma\quad a_x b - b_x a) = 0. \tag{8}$$

Zieht man von der siebenten Horizontal- oder Vertikalreihe der Determinante (8) die Summe der mit $x_1 x_2 \cdots x_6$ multiplicirten ersten sechs analogen Reihen ab, so sondert sich aus (8) der Factor $(dx^2)(dx^2)$ aus, welcher den Forderungen des Problems fremd ist. Darnach geht (8) über in:

$$(\Omega : dx\;\gamma\quad a_x b - b_x a) = 0. \tag{9}$$

Man entfernt aus (9) endlich die Differentiale durch Multiplication mit Δ^2

$$\Delta = (dx\;\gamma\;\varphi\;\psi\;x\;k)$$

und erhält so:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \gamma^2 & \gamma\varphi & \gamma\psi & \gamma^2 & p_1 \\ \gamma\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & \varphi\gamma & p_2 \\ \gamma\psi & \varphi\psi & \psi^2 & \psi\gamma & p_3 \\ \gamma^2 & \varphi\gamma & \psi\gamma & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$p_1 = a_x b_\gamma - b_x a_\gamma,$$
$$p_2 = a_x b_\varphi - b_x a_\varphi,$$
$$p_3 = a_x b_\psi - b_x a_\psi.$$

Man kann endlich noch annehmen, dass a, b zwei Gerade des Complexes γ_x sind, wodurch die Gleichung (10) übergeht in:

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \varphi^2 & \varphi\psi & p_2 \\ \varphi\psi & \psi^2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(11) repräsentirt einen Complex vom Grade

$$2(m + n - 1),$$

welcher $4mn(m + n - 1)$ Erzeugende der Fläche bestimmt. Wenn man a, b als zwei sich schneidende Geraden voraussetzt, so liegt entweder ein Punkt der Haupttangentencurve in der Ebene (ab) oder eine Schmiegungsebene derselben enthält den Punkt (ab). Die Anzahl beider Fälle ist daher $2mn(m+n-1)$, wie schon oben gefunden wurde.

Man übersieht leicht, dass die gegebenen Zahlen für Rang, Classe, Ordnung und stationäre Tangenten der Haupttangentencurve auch dann noch bestehen bleiben, wenn die Fläche zwei linearen Complexen angehört, an deren Stelle man zwei specielle substituiren kann. *Dem Büschel linearer Complexe* $\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$ *entsprechend erhält man dann alle Haupttangentencurven der Fläche. Sie sind daher algebraische Curven, deren charakteristische Zahlen die folgenden sind**):

$$\text{Rang} = 12m(m-1),$$
$$\left.\begin{matrix}\text{Classe}\\ \text{Ordnung}\end{matrix}\right\} = 2m^2,$$
$$\text{stationäre Tangenten } 4m(m-1)^{**}).$$

Diese Zahlen modificiren sich aber erheblich, wenn die Fläche zwei linearen Complexen, die eine specielle Congruenz gemein haben, angehört. Als erzeugende Complexe wählen wir dann den speciellen $\alpha_x = 0$, den allgemeinen $\beta_x = 0$, wobei $(\beta\alpha) = 0$ und $\Psi = 0$. Aus

*) Vgl. eine Bemerkung von Herrn Klein (Math. Ann. Bd. V, S. 23), sowie die schon vorher citirte Arbeit von Lie (daselbst S. 179).

**) In die Zahl $4m(m-1)$ sind die anderweitigen stationären Tangenten nicht eingerechnet. Vgl. § VII.

der Determinante (4) ergiebt sich durch Substitution der gehörigen Grössen unmittelbar zur Bestimmung des Ranges derjenigen Haupttangentencurve, welche dem Complexe $\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$ angehört:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha\psi & 0 & 0 & 0 & b\alpha \\ 0 & \beta^2 & \beta\psi & 0 & 0 & \lambda\beta^2 & b\beta \\ \alpha\psi & \beta\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & \Theta & b\psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & 0 & bx \\ 0 & 0 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\beta^2 & \Theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b\alpha & b\beta & b\psi & bx & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dabei ist $\Theta = \alpha\psi + \lambda\beta\psi$ gesetzt. Wir schreiben (12) in der Form:

$$(13)\qquad A_{11}U_3^2(p-1)^2 + 2(p-1)U_3VA_{12} + A_{22}V^2 = 0 .$$

Man sieht nun sofort, dass $A_{11} = 0$, während

$$A_{12} \equiv (b\alpha)\lambda^2(\beta^2)(\beta^2)(\alpha\psi)bx .$$

Da auch $V \equiv (\alpha\psi)^2(\beta^2)$, so sondert sich aus der Gleichung (13) der Factor $(\alpha\psi)^3$ aus, welcher sich auf die singulären Linien bezieht und der Frage fremd ist. *Der Rang der algebraischen Haupttangentencurven ist daher:*

$$6p(p-1) .$$

Um die Ordnung, respective Classe derselben zu bestimmen, sind in (10) die gehörigen Werthe zu substituiren. Es entsteht dann:

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha\psi & 0 & p_1 \\ 0 & \beta^2 & \beta\psi & \lambda\beta^2 & p_2 \\ \alpha\psi & \beta\psi & \psi^2 & \Theta & p_3 \\ 0 & \lambda\beta^2 & \Theta & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Aber aus dieser Gleichung sondert sich der lineare Factor p_1 ab. *Daher ist die Ordnung und Classe der Haupttangentencurven gleich*

$$p(2p-1) .$$

Man kann dies letztere Resultat auch geometrisch wie folgt begründen. Die ebene Schnittcurve der Fläche ist eine Curve $2p^{\text{ter}}$ Ordnung mit zwei unendlich nahen p-fachen Punkten, also von der Classe $2p^2$. Eine Gerade des Strahlbüschels, mit dem Centrum O, welches der Complex $\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$ in der Ebene der Schnittcurve bestimmt, berührt aber diese Curve in dem $p(+p)$-fachen Punkte, es giebt also noch*)

*) Vgl. Cayley, Second Memoir on skew surfaces, otherwise scrolls Phil. Trans. 1864, p. 559. Ueber die Bezeichnung $p(+q)$-facher Punkt vergl. daselbst p. 564, sowie Cremona, Theorie der Oberflächen S. 59.

$$2p^2 - p = p(2p - 1)$$

weitere Tangenten, welche von O auslaufen, auf denen je ein Punkt der durch $\alpha_x + \lambda\beta_x = 0$ bestimmten Haupttangentencurve liegt.

Wir fügen endlich noch die Bemerkung hinzu, dass die Haupttangentencurven dieser speciellen windschiefen Flächen in den Cuspidalpunkten derselben keine stationären Tangenten haben. Die Schmiegungsebenen der Haupttangentencurve nämlich, welche durch einen auf α gelegenen Punkt A hindurchgehen, erhält man durch die Schnittpunkte der durch A gehenden durch den betreffenden Complex zugeordneten Ebene, welche den Strahl α in sich enthält. Die $2p(p-1)$ auf α liegenden Cuspidalpunkte der Fläche, durch welche jede Haupttangentencurve hindurchgeht, müssen also als Punkte zählen, in denen dieselbe wirkliche Schmiegungsebenen besitzt.

Die Zahl der anderweitigen stationären Tangenten der Haupttangentencurve werden wir im folgenden § bestimmen.

Wir schliessen hieran die folgende Betrachtung. Wenn eine windschiefe Fläche einem linearen Complexe nicht angehört, so besitzt sie nur $2mnp$ discrete Tangentenebenen, welche einem willkührlichen linearen Complexe angehören, d. h. für welche jede durch den Berührungspunkt gezogene Flächentangente zugleich Complexgerade ist. Ein Büschel linearer Complexe giebt erst wieder zu einer Curve auf der Fläche Veranlassung, deren Punkte die Berührungspunkte solcher Ebenen sind, die Complexen derselben in dem eben bezeichneten Sinne angehören. Es ist leicht, die Ordnung einer derartigen Curve zu bestimmen.

Es sei das Büschel linearer Complexe

$$a_x + \lambda b_x = 0 . \tag{15}$$

Damit die Erzeugende x und die ihr zugehörige Haupttangente y Geraden eines der Complexe (15) seien, muss

$$a_x + \lambda b_x = 0 ,$$
$$a_y + \lambda b_y = 0$$

sein. Daraus folgt wieder Gleichung (6). Damit ferner ein willkührlicher Strahl des Büschels (xy) die beiden beliebigen Geraden α, β schneide, ist

$$\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = 0 \tag{16}$$

zu setzen. Die Elimination der y aus (1), (6), (16) liefert die Relation:

$$(\Omega : x\,dx\,d^2x \quad b_x a - a_x b \quad \beta\ \alpha - \alpha_x\beta) = 0 ,$$

oder

$$(\Omega : dx \quad b_x a - a_x b \quad \beta_x\alpha - \alpha\ \beta) = 0 ,$$

oder endlich durch Multiplication mit Δ^2:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & p_1 & q_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & p_2 & q_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & p_3 & q_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

wo

$$(18) \qquad \begin{cases} p_1 = b_x a_f - a_x b_f , & q_1 = \beta_x \alpha_f - \alpha_x \beta_f , \\ p_2 = b_x a_\varphi - a_x b_\varphi , & q_2 = \beta_x \alpha_\varphi - \alpha_x \beta_\varphi , \\ p_3 = b_x a_\psi - a_x b_\psi , & q_3 = \beta_x \alpha_\psi - \alpha_x \beta_\psi . \end{cases}$$

Die Determinante (17) ist daher vom Grade $2(m+n+p-1)$ und liefert als Grad der fraglichen Curve

$$2mnp(m+n+p-1).$$

VI.

Die Curve vierpunktiger Berührung auf den windschiefen Flächen.

Eine jede windschiefe Fläche besitzt eine Curve vierpunktiger Berührung, welche, soviel mir bekannt, bisher nicht Gegenstand der Untersuchung gewesen ist. Je vier consecutive Erzeugende bestimmen zwei Gerade, welche sie schneiden, d. h. zwei im Allgemeinen discrete vierpunktige Tangenten, und damit zwei Punkte der Curve. Wenn dieselben coincidiren, so berührt die Curve die betreffende Erzeugende. Wir werden im Folgenden den Grad derselben, sowie die Zahl ihrer Berührungen mit den Erzeugenden bestimmen und dabei diejenigen Eliminationen vollständig durchführen, zu denen dieses Problem Veranlassung giebt.

Eine Gerade y, welche vier consecutive Erzeugende

$$x , \quad x + dx , \quad x + 2\,dx + d^2x , \quad x + 3\,dx + 3\,d^2x + d^3x$$

schneidet, erfüllt die Bedingungen:

$$0 = yx , \quad 0 = (y\,dx) , \quad 0 = (y\,d^2x) , \quad 0 = (y\,d^3x) , \quad 0 = (y^2) .$$

Sie bestimmt mit x zwei ebene Strahlbüschel $y + \lambda x$. Verlangt man, dass ein Strahl derselben zwei willkührliche Gerade schneide, welche wir b, a nennen, so ist

$$(a_y b_x - b_x a_y) = 0 .$$

Die Elimination der y liefert die Gleichung:

$$(\Omega : x\,dx\,d^2x\,d^3x \quad a_x b - b_x a) = 0 .$$

Aus derselben sind die Differentiale zu eliminiren. Es gelingt dies für die ersten und zweiten Differentiale dx, d^2x sofort durch Multiplication mit Δ^2, wobei sich wie oben Δ^2 wieder als Factor aussondert.

Zugleich wird dabei der unwesentliche Factor $(kx)^4$ entfernt, dessen Coefficienten k die homogenen Differentiale verbinden, so dass

$$\begin{aligned} k\,dx &= 0\,, \\ k\,d^2x &= 0\,, \\ k\,d^3x &= 0\,. \end{aligned}$$

Man erhält so in Rücksicht auf II. (10):

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & (m-1)U_1 & f\,d^3x & p_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & (n-1)U_2 & \varphi\,d^3x & p_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)U_3 & \psi\,d^3x & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & x\,d^3x & 0 \\ (m-1)U_1 & (n-1)U_2 & (p-1)U_3 & V & 0 & 0 & 0 \\ f\,d^3x & \varphi\,d^3x & \psi\,d^3x & x\,d^3x & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die $p_1\ p_2\ p_3$ haben dabei die in I. (18) angegebene Bedeutung. Um nun aus (1) noch die dritten Differentiale zu entfernen, verfahren wir folgendermassen. Zunächst ergiebt sich durch Differentiation der Gleichungen II. (10):

$$(2)\qquad \begin{cases} f_i d^3x_i + (m-1)\,f_{ik}\,dx_k\,d^2x_i = (m-1)\,(kx)^2\,\dfrac{\partial U_1}{\partial x_i}\,dx_i\,, \\ \varphi_i d^3x_i + (n-1)\,\varphi_{ik}\,dx_k\,d^2x_i = (n-1)\,(kx)^2\,\dfrac{\partial U_2}{\partial x_i}\,dx_i\,, \\ \psi_i d^3x_i + (p-1)\,\psi_{ik}\,dx_k\,d^2x_i = (p-1)\,(kx)^2\,\dfrac{\partial U_3}{\partial x_i}\,dx_i\,. \end{cases}$$

Ferner ist

$$(3)\qquad \begin{cases} (x\,d^3x) = -\,3\,(dx\,d^2x)\,, \\ 2\,(dx\,d^2x) = -\,(kx)^2\,\dfrac{\partial V}{\partial x_i}\,dx_i\,. \end{cases}$$

Um aus (2) noch die zweiten Differentiale zu entfernen, setzen wir:

$$(4)\qquad \begin{cases} f_{ik}\,dx_k dx_i^2 = \Pi_1\,, \\ f_i\,d^2x_i = (m-1)\,U_1\,(kx)^2\,, \\ \varphi_i d^2x_i = (n-1)\,U_2(kx)^2\,, \\ \psi_i d^2x_i = (p-1)\,U_3(kx)^2\,, \\ x_i\,d^2x_i = (kx)^2\,V\,, \\ k_i\,d^2x_i = 0\,, \\ dx_i\,d^2x_i = \Sigma\,. \end{cases}$$

Die Determinante der sieben Gleichungen (4) muss verschwinden. Wir schreiben sie in der Gestalt:

$$(5) \qquad -\Pi_1 A_1 - A_2 (kx)^2 - (kx)^2 V A_3 - \Sigma A_4 = 0 .$$

Die Grössen A haben in (5) die folgenden Werthe. Die Unterdeterminante A_1 ist offenbar gleich $-(dx^2) = (kx)^2 V$. Der Werth von A_2 ist gegeben durch:

$$A_2 = \begin{vmatrix} f_{ik}\,dx_k & 0 \\ f_i & (m-1)\,U_1 \\ \varphi_i & (n-1)\,U_2 \\ \psi_i & (p-1)\,U_3 \\ x_i & 0 \\ k_i & 0 \\ dx_i & 0 \end{vmatrix} .$$

In der Determinante rechts ist dabei von den sechs ersten nur die Verticalreihe mit dem Index i hingeschrieben. Man erhält nun sofort:

$$\Delta A_2 = \begin{vmatrix} -U_1(kx)^2 & f_i f_{ik}\,dx_k & \varphi_i f_{ik}\,dx_k & \psi_i f_{ik}\,dx_k & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & fk & (m-1)\,U_1 \\ 0 & f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & \varphi k & (n-1)\,U_2 \\ 0 & f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & \psi k & (p-1)\,U_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kx & 0 \\ 0 & kf & k\varphi & k\psi & kx & k^2 & 0 \\ (dx)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$a_1 = f_{ik}\,dx_k\,k_k .$$

Darnach ist:

$$A_2\Delta = -\Delta(kx)^2 \begin{vmatrix} f_i f_{ik}\,dx_k & \varphi_i f_{ik}\,dx_k & \psi_i f_{ik}\,dx_k & 0 \\ f^2 & f\varphi & f\psi & (m-1)\,U_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & (n-1)\,U_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & (p-1)\,U_3 \end{vmatrix} .$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(6) \qquad A_2 = -(kx)^2\,\Omega_k'\,dx_k ,$$

so besteht, wie man sofort aus der Betrachtung von $\Omega_k'\,dx_k$ ersieht, die Beziehung:

$$(7) \qquad \Omega_k' x_k = (m-1)\,U_1 V .$$

Es ist ferner:

$$(8) \qquad A_4 = f_{ik}\,dx_i\,dx_k = -(kx)^2 U_1 .$$

Endlich hat man:

$$A_3 = (kx)^2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & \varphi_1 & \psi_1 & x_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & \varphi_2 & \psi_2 & x_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} & \varphi_3 & \psi_3 & x_3 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & \varphi_4 & \psi_4 & x_4 \\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & \varphi_5 & \psi_5 & x_5 \\ f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & \varphi_6 & \psi_6 & x_6 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & \psi_5 & \psi_6 & 0 & 0 & 0 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 & dx_5 & dx_6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man daher:

(9) $$A_3 = (kx)^2\, \Theta_i'\, dx_i\,,$$

so ist

(10) $$U_1 = \Theta_i' x_i\,.$$

Aus der Gleichung (5), welche jetzt die folgende Gestalt angenommen hat:

$$\Pi' V = \Sigma U_1 - (kx)^2\, V(\Theta_i' dx_i) + (kx)^2\, (\Omega_k' dx_k),$$

hat man nun für die erste der Gleichungen (2) den folgenden Ausdruck:

(11) $$\frac{V}{(m-1)} f_i d^3x_i = -\Sigma U_1 + (kx)^2\, V(\Theta_i' dx_i) - (kx)^2\, (\Omega_k' dx_k) + (kx)^2\, V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} dx_i\,,$$

und dem analog:

$$\frac{V}{(n-1)} \varphi_i d^3x_i = -\Sigma U_2 + (kx)^2 (\Theta_i'' dx_i)\, V - (kx)^2 (\Omega_k'' dx_k) + (kx)^2\, V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} dx_i,$$

$$\frac{V}{(p-1)} \psi_i d^3x_i = -\Sigma U_3 + (kx)^2 (\Theta_i''' dx_i)\, V - (kx)^2 (\Omega_k''' dx_k) + (kx)^2\, V \frac{\partial U_3}{\partial x_i} dx_i.$$

Dabei bedeuten Θ'', Θ''', Ω'', Ω''' diejenigen Ausdrücke, in welche Θ', Ω' durch Vertauschung von f mit φ, respective ψ übergehen.

Man hat daher ferner:

$$\frac{V}{(kx)^2}\left(\frac{U_2}{m-1} f_i d^3x_i - \frac{U_1}{n-1} \varphi_i d^3x_i\right) = -V \begin{vmatrix} U_1\ \Theta_i' dx_i \\ U_2\, \Theta_i'' dx_i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} U_1 \left(V \frac{\partial U_1}{\partial x_i} - \Omega_i'\right) dx_i \\ U_2 \left(V \frac{\partial U_2}{\partial x_i} - \Omega_i''\right) dx_i \end{vmatrix}.$$

In dieser Gleichung ist nach II. (7) und VI. (10):

$$\begin{vmatrix} U_1,\ \Theta_i' dx_i \\ U_2,\ \Theta_i'' dx_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Theta_i' x_i,\ \Theta_i' dx_i \\ \Theta_i'' x_i,\ \Theta_i'' dx_i \end{vmatrix} = -(kx)\,(f\,\varphi\,\psi\,x\,\Theta'\,\Theta'').$$

Es ist ferner:

$$[2(m+n+p) - 7]\, U_1 V = V\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} x_i\right) - (m-1)\, U_1 V.$$

Sonach mit Berücksichtigung von II. (7) und VI. (7):

$$\begin{vmatrix} U_1\left(V\frac{\partial U_1}{\partial x_i}-\Omega_i'\right)dx_i \\ U_2\left(V\frac{\partial U_2}{\partial x_i}-\Omega_i''\right)dx_i \end{vmatrix} = \frac{1}{2(m+n+p)-7}\frac{1}{V}\begin{vmatrix} \left(V\frac{\partial U_1}{\partial x_i}-\Omega_i'\right)x_i & \left(V\frac{\partial U_1}{\partial x_i}-\Omega_i'\right)dx_i \\ \left(V\frac{\partial U_2}{\partial x_i}-\Omega_i''\right)x_i & \left(V\frac{\partial U_2}{\partial x_i}-\Omega_i''\right)dx_i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-(kx)}{V(2(m+n+p)-7)}\left(f\varphi\psi x\; V\frac{\partial U_1}{\partial x}-\Omega'\;\; V\frac{\partial U_2}{\partial x}-\Omega''\right).$$

Wir haben demnach endlich die folgenden Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{(n-1)U_2 f_i d^3x_i-(m-1)U_1\varphi_i d^3x_i}{(n-1)(m-1)(kx)^3} \\ \quad =(f,\varphi,\psi,x,\Theta',\Theta'')+\frac{1}{V^2}\frac{1}{2(m+n+p)-7}\left(f,\varphi,\psi,x,V\frac{\partial U_1}{\partial x}-\Omega',V\frac{\partial U_2}{\partial x}-\Omega''\right), \\ \dfrac{(m-1)U_1\psi_i d^3x_i-(p-1)U_3 f_i d^3x_i}{(m-1)(p-1)(kx)^3} \\ \quad =(f,\varphi,\psi,x,\Theta''',\Theta')+\frac{1}{V^2}\frac{1}{2(m+n+p)-7}\left(f,\varphi,\psi,x,V\frac{\partial U_3}{\partial x}-\Omega''',V\frac{\partial U_1}{\partial x}-\Omega'\right), \\ \dfrac{(p-1)U_3\varphi_i d^3x_i-(n-1)U_2\psi_i d^3x_i}{(p-1)(n-1)(kx)^3} \\ \quad =(f,\varphi,\psi,x,\Theta'',\Theta''')+\frac{1}{V^2}\frac{1}{2(m+n+p)-7}\left(f,\varphi,\psi,x,V\frac{\partial U_2}{\partial x}-\Omega'',V\frac{\partial U_3}{\partial x}-\Omega'''\right). \end{cases}$$

Stellt man dagegen zu der Gleichung (11) noch den folgenden Ausdruck:

$$x_i d^3x_i = -\Sigma+\frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i, \tag{13}$$

so ist

$$\frac{Vf_i d^3x_i-(m-1)U_1(x_i d^3x_i)}{(kx)^2(n-1)} = \left(V\Theta_i'-\Omega_i'+V\frac{\partial U_1}{\partial x_i}\right)dx_i-dx_i\frac{\partial V}{\partial x_i}U_1$$

$$= \begin{vmatrix} V & \frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i \\ U_1\left(\Theta_i'+\frac{\partial U_1}{\partial x_i}-\frac{\Omega_i'}{V}\right)dx_i & \end{vmatrix}.$$

Schreibt man die letzte Determinante endlich in der Gestalt:

$$\frac{1}{2(m+n+p)-3}\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_i}x_i & \frac{\partial V}{\partial x_i}dx_i \\ \left(\Theta_i'+\frac{\partial U_1}{\partial x_i}-\frac{\Omega_i'}{V}\right)x_i & \left(\Theta_i'+\frac{\partial U_1}{\partial x_i}-\frac{\Omega_i'}{V}\right)dx_i \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich:

$$14)\quad \begin{cases} \dfrac{V f_i d^3x_i - m-1\ U_1(x_i d^3x_i)}{(kx)^3\,(m-1)} \\ \qquad = \dfrac{-1}{2(m+n+p)-3}\left(f\varphi\psi x \dfrac{\partial V}{\partial x_i},\ \Theta_i' + \dfrac{\partial U_1}{\partial x_i} - \dfrac{\Omega_i'}{V_i}\right), \\ \dfrac{V \varphi_i d^3x_i - n-1\ U_2(x_i d^3x_i)}{(kx)^3\,(n-1)} \\ \qquad = \dfrac{-1}{2(m+n+p)-3}\left(f\varphi\psi x \dfrac{\partial V}{\partial x_i},\ \Theta_i'' + \dfrac{\partial U_2}{\partial x_i} - \dfrac{\Omega_i''}{V}\right), \\ \dfrac{V \psi_i d^3x_i - p-1\ U_3(x_i d^3x_i)}{(kx)^3\,(p-1)} \\ \qquad = \dfrac{-1}{2(m+n+p)-3}\left(f\varphi\psi x \dfrac{\partial V}{\partial x_i},\ \Theta_i''' + \dfrac{\partial U_3}{\partial x_i} - \dfrac{\Omega_i'''}{V}\right). \end{cases}$$

Die Ausdrücke rechterhand in den Gleichungen (14) enthalten, wie noch bemerkt werden mag, nur scheinbar den Nenner V. Denn die Determinante

$$\left(f\varphi\psi x \Omega_i' \frac{\partial V}{\partial x_i}\right)$$

enthält selbst als Factor V, wie sich z. B. sofort zeigt, wenn man sie aufs Quadrat erhebt.

Die Gleichungen (14), (12) *stellen alle Unterdeterminanten, welche aus den Gliedern der beiden vorletzten Reihen von* (1) *gebildet werden können, vollständig von den Differentialen und unwesentlichen Factoren* (kx) *befreit vor. In der Determinantengleichung* (1) *kommen übrigens nur die einfacheren Verbindungen, welche durch* (14) *ausgedrückt sind, vor.*

Die Determinante (1) stellt demnach einen Complex vom Grade

$$2\,[6\,(m+n+p)-19]$$

vor, welcher die windschiefe Fläche in

$$4\,mnp\,(6\,(m+n+p)-19)$$

Erzeugenden trifft. *Nach unseren früheren Erörterungen ist die Hälfte dieser Zahl der Grad der Curve der vierpunktigen Berührung.*

Man erhält dagegen die Zahl der vierpunktig berührenden Tangenten, welche eine willkührliche Gerade z schneiden, wenn man in der Determinante (1) die letzte Horizontal- und Verticalreihe durch $zf\ z\varphi\ z\psi\ zx$ ersetzt. Daraus entnehmen wir den Satz:

Der Grad der von den vierpunktigen Tangenten gebildeten Linienfläche ist gleich

$$4\,mnp\,(6\,(m+n+p)-19).$$

Dieselbe hat mit der ursprünglichen Fläche die Curve der vierpunktigen Berührung gemein, welche als Durchschnittscurve vierfach zu zählen ist. Beide Flächen schneiden sich im Allgemeinen in einer zweiten Curve.

Ersetzt man in der Determinante (1) die letzte Horizontal- und Verticalreihe durch $zf\ z\varphi\ z\psi\ zx$, so stellt dieselbe nach II. zugleich das Product der Gleichungen $y'z = 0$, $y''z = 0$ der beiden speciellen linearen Complexe vor, deren Axen die beiden vierpunktigen Tangenten y', y'' sind. Diese Linien werden daher coincidiren, wenn der Kern der Determinante (1) verschwindet. Derselbe stellt einen Complex vom Grade

$$4\,[3\,(m + n + p) - 10]$$

vor. *Die Curve vierpunktiger Berührung besitzt also*

$$8\,mnp\,[3\,(m + n + p) - 10]$$

Punkte, in denen sie von einer Erzeugenden der Fläche berührt wird.

Es kann übrigens Linienflächen geben, für welche jede Erzeugende zwei zusammenfallende vierpunktige Tangenten besitzt. *Solche Flächen genügen einer partiellen Differentialgleichung, zu deren vollständiger Darstellung die Gleichungen* (14) *ausreichen.* Dieselbe ist nämlich, wenn die Ausdrücke rechterhand in (14) *mit* $R_1\ R_2\ R_3$, die Unterdeterminanten der Determinante V mit A_{ik} bezeichnet werden:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \varphi^2 & \varphi\psi \\ \varphi\psi & \psi^2 \end{vmatrix} \text{ u. s. w.}$$

$$\Sigma R_i R_k A_{ik} \equiv 0\,. \tag{15}$$

Das Geschlecht der Curve vierpunktiger Berührung ist in diesem Falle gleich dem der Fläche.

Wir zeigen jetzt, wie sich mit Hülfe der gewonnenen Zahlen die Zahl der stationären Tangenten einer algebraischen Haupttangentencurve der Fläche vollständig bestimmen lässt.

Wenn nämlich die Fläche einem linearen Complexe Ψ angehört, so kann man nach denjenigen Erzeugenden fragen, für welche eine der vierpunktigen Tangenten Gerade desselben ist. Je zwei Tangenten dieser Art sind aber conjugirte Polaren in Bezug auf den linearen Complex, sie coincidiren daher in dem Falle, wo eine von ihnen zur Complexgeraden wird. In den $8\,mn\,(3\,(m+n) - 7)$ Berührungspunkten der Curve vierpunktiger Berührung mit den Erzeugenden der Fläche gehören demnach die vierpunktigen Tangenten dem linearen Complexe an. *Aber diese vierpunktigen Tangenten sind dann zugleich Elemente der algebraischen Hauptangentencurve, welche durch den linearen Complex bestimmt ist, d. h. stationäre Tangenten derselben.* Bezeichnet man daher durch R, M, N, Ω Rang, Ordnung, Classe, Zahl der stationären Tangenten der Curve, so gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} R &= 12\,mn\,(m+n-2)\,, \\ M = N &= 2\,mn\,(m+n-1)\,, \\ \Omega &= 8\,mn\,(3\,(m+n)-7)+4\,mn\,(m+n-2) \\ &= 9\,mn\,(7\,(m+n)-16)\,. \end{aligned}$$

Die Haupttangentencurve schneidet dabei, wie sich sofort aus dem unter I. (1) entwickelten Satze ergiebt, jede Erzeugende in zwei Punkten, welche harmonisch liegen zu den beiden auf der letzteren befindlichen Punkten der Curve vierpunktiger Berührung. Aus den von Zeuthen und Cayley entwickelten Formeln*):

$$\begin{aligned} R &= M(M-1)-2\,h\,, \\ M &= R\,(R-1)-2\,y-3\,N-3\,\Omega\,, \\ N+\Omega &= 3\,(R-M)\,, \\ R &= N\,(N-1)-2\,g\,, \\ N &= R\,(R-1)-2\,x-3\,M-3\,\Omega \end{aligned}$$

für die Singularitäten einer Raumcurve erhält man mit Benutzung der gegebenen Werthe die Zahlen h, y, g, x. Die dritte Formel ist übrigens eine Identität, eine Bemerkung, die als Controle der vorhergehenden Betrachtungen dienen kann. Insbesondere ist das Geschlecht der Haupttangentencurve

$$\begin{aligned} P &= 2\,mn\,[2\,(m+n)-5]+1 \\ &= 4\,P'+2\,mn\,. \end{aligned}$$

wo P' das Geschlecht der Fläche.

Wenn eine Fläche, für welche die partielle Differentialgleichung (15) besteht, einem linearen Complexe angehört, so sind alle vierpunktigen Tangenten Geraden des letzteren. Aber sie bilden zugleich stationäre Tangenten einer Haupttangentencurve. Die Curve vierpunktiger Berührung reducirt sich dann auf eine gerade Linie, während ausserdem noch eine krumme algebraische Haupttangentencurve vorhanden ist.

VII.

Ueber die vierpunktigen Tangenten specieller windschiefer Flächen.

Wenn die Fläche einem speciellen Complexe $F=\gamma x$ angehört, so besitzt sie eine np-fache Leitlinie. Von den Cuspidalpunkten der Fläche liegen $2\,np\,(n+p-2)$ auf dieser Leitlinie, während die $2\,np\,(n+p-2)$ anderen der krummen Doppelcurve angehören, welche

*) Vgl. Bulletin des Sc. Math. 1870, p. 150; Cremona, Theorie der Oberflächen S. 10 ff.

die Fläche besitzt. Den Grad der letzteren erhält man, wenn man von dem Totalgrad der Doppelcurven

$$np\,[2\,np - (n+p)]$$

die für $\frac{np(np-1)}{2}$ Doppelgerade zählende Leitlinie abzieht. Der Grad der eigentlichen Doppelcurve ist daher

$$\tfrac{np}{2}\,[3\,np - 2\,(n+p) + 1]\,.$$

Da in einer beliebigen, durch die Leitlinie γ gelegten Ebene nur $\frac{np}{2}\,(np-1)$ nicht auf der ersteren gelegene Punkte dieser Curve vorhanden sind, *so erhält man als Zahl der Punkte, welche die Doppelcurve mit der Leitlinie gemein hat,*

$$np\,[np - (n+p) + 1].$$

Die Leitlinie zählt zugleich np-fach als Curve vierpunktiger Berührung. Den Beweis dafür kann man aus dem Umstande entnehmen, dass die Determinante VI. (1), für $f = \gamma x$, $(\gamma^2) = 0$ den Factor $a_x b_\gamma - b_x a_\gamma = p$ absondert, welcher sich auf die Leitlinie bezieht. *Hiernach ergiebt sich als Grad der eigentlichen Curve vierpunktiger Berührung*

$$3\,np\,[4\,(n+p) - 9]\,.$$

Wir bestimmen endlich noch die Zahl der Punkte, in denen diese Curve der Leitlinie begegnet. Da in jeder durch die Leitlinie gelegten Ebene np Erzeugenden also auch np Punkte der Curve liegen, die nicht auf der Axe gelegen sind, so muss die Curve mit der letzteren $4\,np\,(3\,(p+n) - 7)$ Punkte gemein haben. Man überzeugt sich davon auch auf folgende Weise. Die Punkte, in denen die Curve der Leitlinie begegnet, sind offenbar auf solchen Erzeugenden gelegen, für welche die beiden vierpunktigen Tangenten coincidiren. Die Bedingung dieser Coincidenz ist aber das Verschwinden des Kerns der Determinante (1), welcher nach einfacher Reduction die Form

$$\begin{vmatrix} \gamma\varphi & \gamma\psi & 0 \\ (m-1)\,U_2 & (p-1)\,U_3 & V \\ \varphi\,d^3x & \psi\,d^3x & x\,d^3x \end{vmatrix}^2 = 0$$

annimmt. *Dieser Ausdruck repräsentirt einen Complex vom Grade* $6\,(n+p) - 14$, *welcher mit den drei erzeugenden Complexen* $4np\,(3\,(n+p) - 7)$ *Erzeugende der Fläche bestimmt, für welche ein Punkt der eigentlichen Curve vierpunktiger Berührung auf der Leitlinie liegt.*

Wir betrachten jetzt den Fall, wo unter den erzeugenden Complexen sich zwei specielle lineare $\alpha_x\,\beta_x$ befinden, deren Axen sich nicht schneiden. *Alsdann kann offenbar ausser den beiden p-fach zählenden Leitlinien α, β, welche die Fläche besitzt, keine eigentliche Curve vier-*

punktiger Berührung vorhanden sein. Dies ergiebt sich auch aus der Betrachtung der Determinante VI. (1), welche sich auf

$$\begin{vmatrix} \psi d^2x & \psi d^3x \\ x d^2x & x d^3x \end{vmatrix}^2 (\alpha\beta)(a_x b_\alpha - b_x a_\alpha)(a_x b_\beta - b_x a_\beta) = 0$$

reducirt, weil U_1, U_2, $f d^3x$, φd^3x sämmtlich verschwinden. Die beiden Factoren

$$a_x b_\alpha - b_x a_\alpha = 0\,,$$
$$a_x b_\beta - b_x a_\beta = 0$$

beziehen sich auf die beiden Leitlinien, welche als Curven vierpunktiger Berührung ebenfalls p-fach zählen.

Der Factor

$$\begin{vmatrix} \psi d^2x & \psi d^3x \\ x d^2x & x d^3x \end{vmatrix}$$

gleich Null gesetzt, führt dagegen auf eine sehr merkwürdige Singularität dieser Classe von windschiefen Flächen. Da er nämlich die willkührlichen Grössen b, a gar nicht enthält, so liefert er eine Zahl besonderer Erzeugenden, *welche unendlich viele vierpunktige Tangenten besitzen*, deren drei consecutive Erzeugende also so gelegen sind, wie die Erzeugenden ein und derselben Art eines Hyperboloides. Solche Erzeugende mögen in Ermangelung einer passenderen Benennung als *hyperbolische Erzeugende* bezeichnet werden. Die Gleichungen (14) liefern dann die vollständige Darstellung dieses Factors in der Form:

$$\left(\alpha\,\beta\,\psi\,x\,\frac{\partial V}{\partial x}\quad \Theta^3 + \frac{\partial U_3}{\partial x} - \frac{\Omega^3}{V}\right) = 0\,.$$

Derselbe stellt einen Complex vom Grade $2(3p-4)$ vor. *Die Anzahl der hyperbolischen Erzeugenden der Linienfläche mit zwei discreten windschiefen p-fachen Leitlinien ist daher*

$$4p(3p-4)\,.$$

Die Singularitäten der algebraischen Haupttangentencurven der Fläche ergeben sich ohne weiteres aus den am Schlusse von § VI. *angegebenen Formeln, wenn in denselben etwa $n=p$, $m=1$ gesetzt wird.* Jede Haupttangentencurve hat zwei stationäre Tangenten in den beiden (zu den Leitlinien harmonisch liegenden) Punkten, in denen sie einer hyperbolischen Erzeugenden begegnet.

Wir haben endlich noch den Fall zu berücksichtigen, dass die windschiefe Fläche einem speciellen linearen α_x und dem linearen Complexe β_x angehört, während $(\beta\alpha) = 0$ ist. Der Complex, welcher die hyperbolischen Erzeugenden bestimmt, enthält dann den unwesentlichen Factor $(\alpha\psi)$. *Die Zahl der hyperbolischen Erzeugenden ist daher*

$$2p(5p-7)\,.$$

Da ferner jede der algebraischen Haupttangenten den Erzeugenden nur in einem Punkte begegnet, so hat man für die Singularitäten derselben die folgenden Formeln:

$$R = 6p(p-1),$$
$$M = N = p(2p-1),$$
$$\Omega = 2p(5p-7),$$
$$R - 2P = 2(M-1), \quad P = p^2 - 2p + 1.$$

Das Geschlecht der Haupttangentencurve muss mit dem Geschlechte der windschiefen Fläche identisch sein. In der That erhält man aus § III.:

$$P' = p^2 - 2p + 1 = P.$$

Diese Curven besitzen daher $\frac{1}{2}p(p-1)(4p^2-7)$ scheinbare Doppelpunkte u. s. w.

Man kann übrigens die Gleichung für die hyperbolischen Erzeugenden auch direct aufstellen. Damit überhaupt vier consecutive Erzeugende einem Hyperboloid, d. h. drei linearen Complexen angehören, müssen die Gleichungen

$$cx = 0,$$
$$cdx = 0,$$
$$cd^2x = 0,$$
$$cd^3x = 0$$

drei wesentlich verschiedene Lösungen für die Coefficienten c zulassen. Dazu aber ist erforderlich das Bestehen der 6 Gleichungen

$$\mu_1 x_i + \mu_2 dx_i + \mu_3 d^2x_i + \mu_4 d^3x_i = 0$$

mit vier homogenen Unbekannten μ. Es müssen also zwischen den x drei wesentlich verschiedene Identitäten bestehen. Wenn nun die Fläche den Complexen $\alpha_x\ \beta_x$ angehört, so sind zwei derselben durch $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$ selbst vertreten. Multiplicirt man endlich die sechs Gleichungen mit ψ_i und summirt jedesmal nach i, so ergiebt sich

$$\mu_3 \psi d^2x + \mu_4 \psi d^3x = 0.$$

Dagegen durch Multiplication mit x_i

$$\mu_3 x d^2x + \mu_4 x d^3x = 0.$$

Die einzige erforderliche dritte Identität ist daher das Verschwinden der Determinante der letzteren beiden Gleichungen, welche mit dem obigen Ausdrucke identisch ist. Zugleich ist ersichtlich, dass diese Art von Erzeugenden im Allgemeinen nur bei den Flächen, welche zwei linearen Complexen angehören, auftritt. Für eine beliebige windschiefe Fläche, welche durch den Schnitt von $F\Phi\Psi$ gebildet wird, würde das Verschwinden der sämmtlichen Partialdeterminanten des Systemes

$$\begin{Vmatrix} f d^2x & \varphi d^2x & \psi d^2x & x d^2x \\ f d^3x & \varphi d^3x & \psi d^3x & x d^3x \end{Vmatrix}$$

erforderlich sein. Die äquivalenten Ausdrücke für diese Unterdeterminanten sind im § VI. vollständig gegeben.

VIII.

Ueber ein Problem aus der Theorie der Raumcurven.

Die Einführung und Elimination höherer homogener Differentiale, wie wir sie im § VI. durchgeführt haben, hat man bisher, wo die letzteren den zweiten Grad überstiegen, meist zu vermeiden gesucht und an Stelle derselben andere Differentiale eingeführt, welche nur vom ersten oder zweiten Grade sind. In der letzteren Weise ist z. B. von Clebsch ein Problem behandelt worden*), welches mit dem in § VI. entwickelten eine gewisse Verwandtschaft besitzt, die Bestimmung der Gleichung derjenigen Fläche, welche die vollständige Schnittcurve zweier Flächen $F = 0$, $\Phi = 0$ vom m^{ten} und n^{ten} Grade in den Wendungspunkten dieser Curve trifft. Aber dieser Weg führt bei unserem liniengeometrischen Problem zu keinem Resultate, weil die Curve vierpunktiger Berührung nicht eindeutig auf die Erzeugenden der Fläche bezogen werden kann. Es scheint daher nöthig, die höheren Differentiale beizubehalten. Man kann nun auch die Frage nach den Wendungspunkten einer Raumcurve in einer ganz ähnlichen Weise behandeln, *d. h. sich die Aufgabe stellen, aus der Determinante*

$$\Delta = (x\ dx\ d^2x\ d^3x) = 0, \tag{1}$$

welche für einen Inflexionspunkt verschwindet, die Differentiale zu eliminiren. Das Resultat ist dann die Gleichung der gesuchten Fläche. Es mag gestattet sein, den Verlauf dieses Eliminationsprocesses zur Veranschaulichung der Rechnungen in § VI. hier noch auszuführen.

Zunächst gelten die Gleichungen:

$$\begin{cases} F = 0, \quad \Phi = 0, \\ f_i dx_i = 0, \quad \varphi_i dx_i = 0, \\ f_i d^2x_i + (m-1) f_{ik} dx_i dx_k = 0, \quad \varphi_i d^2x_i + (n-1)\varphi_{ik} dx_i dx_k = 0, \\ k_i dx_i = 0, \quad k_i d^2x_i = 0, \quad k_i d^3x_i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Wir setzen ferner

$$\begin{cases} (dx\ f\ \varphi\ k) = (dx^2) = \Delta'', \\ (f\ \varphi\ x\ dx) = \Delta'. \end{cases} \tag{3}$$

Dabei gilt dann die Beziehung

$$\Delta'\Delta'' = -(dx^2)(kx) \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi \\ f\varphi & \varphi^2 \end{vmatrix}.$$

*) Crelle's Journal Bd. 63, S. 1.

Setzt man daher

$$V = \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi \\ f\varphi & \varphi^2 \end{vmatrix},$$

so ist

$$\Delta' = -(kx)\, V.$$

Ausserdem hat man

(4) $\quad f_{ik}\,dx_i dx_k = -(kx)^2 U_1, \quad \varphi_{ik}\,dx_i dx_k = -(kx)^2 U_2,$

wo U_1 U_2 die Hesse'schen Determinanten von f, φ, gerändert respective mit φ_i f_i, bedeuten.

Die Gleichung der gesuchten Fläche nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn man Δ mit Δ'' multiplicirt. Es ergiebt sich

(5) $$\Delta\Delta' = (kx)\,(dx^2)F = 0,$$

wo

(6) $$F = (fd^2x)\,(\varphi d^3x) - (fd^2x)\,(\varphi d^3x) = 0.$$

Aus dem Ausdrucke F sind nun noch die dritten Differentiale zu entfernen, da die zweiten nach (4) unmittelbar ersetzt werden können. Dazu verfährt man folgendermassen. Durch Differentiation von (2) entsteht:

(7) $$\begin{cases} f_i d^3x_i + (m-1)\, f_{ik}\,dx_k d^2x_i = (m-1)\,(kx)^2 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_i}\,dx_i, \\ \varphi_i d^3x_i + (n-1)\,\varphi_{ik}\,dx_k d^2x_i = (n-1)\,(kx)^2 \dfrac{\partial U_2}{\partial x_i}\,dx_i. \end{cases}$$

Um aus diesen Gleichungen die zweiten Differentiale zu entfernen, setzen wir:

(8) $$\begin{cases} f_{ik}\,dx_k d^2x_i = \Pi_1, \\ f_i\,d^2x_i = (m-1)\,(kx)^2\,U_1, \\ \varphi_i d^2x_i = (n-1)\,(kx)^2\,U_2, \\ k_i\,d^2x_i = 0, \\ \varphi_{ik}\,dx_k\,d^2x_i = \Pi_2. \end{cases}$$

Hieraus entsteht durch Elimination der d^2x_i:

(9) $\quad \Pi_1 A_1 - (m-1)\,(kx)^2\,U_1\Omega_1 + (n-1)\,(kx)^2\,U_2\Omega_2 + \Pi_2 A_2 = 0.$

Dabei ist

$$A_2 = (f_{ik}\,dx_k,\ f_i,\ \varphi_i,\ k_i) = -(kx)^2\,U_1,$$
$$A_1 = (kx)^2\,U_2,$$

so dass:

(10) $$\Pi_1 U_2 - \Pi_2 U_1 = (m-1)\,U_1\Omega_1 - (n-1)\,U_2\Omega_2.$$

Aber aus (7) hat man

(11) $$\frac{F}{m-1\ n-1} = (kx)^2\left(U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_i}dx_i - U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_i}dx_i\right) - (U_2\Pi_1 - \Pi_2 U_1)$$
$$= (kx)^2\left(U_2\frac{\partial U_1}{\partial x_i}dx_i - U_1\frac{\partial U_2}{\partial x_i}dx_i\right) - ((m-1)\,U_1\Omega_1 - (n-1)\,U_2\Omega_2).$$

In den Ausdrücken $\Omega_1\ \Omega_2$ lassen sich nun die ersten Differentiale, die in ihnen noch enthalten sind, durch die ihnen proportionalen Unterdeterminanten ersetzen. Man hat

$$\Omega_1 = -\sum_k \begin{vmatrix} \varphi_{1k} & \varphi_{2k} & \varphi_{3k} & \varphi_{4k} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ f_{1k}dx_k & f_{2k}dx_k & f_{3k}dx_k & f_{4k}dx_k \end{vmatrix} dx_k$$

$$= -\Sigma \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & f_1 & \varphi_1 & k_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & f_2 & \varphi_2 & k_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & f_3 & \varphi_3 & k_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & f_4 & \varphi_4 & k_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \\ f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & f_{4k} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} dx_k$$

$$= (kx)^2 \Sigma \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & f_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & f_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & f_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & f_4 \\ f_{1k} & f_{2k} & f_{3k} & f_{4k} & 0 \end{vmatrix} dx_k .$$

Setzt man daher:

$$\Omega_1 = (kx)^2\, \Theta_i' dx_i ,$$
$$\Omega_2 = (kx)^2\, \Theta_i'' dx_i ,$$

so ist

$$\Theta_i' x_i = U_2 , \quad \Theta_i'' x_i = U_1 .$$

Daher erhält man:

$$(12)\quad \frac{-F}{(kx)^2 (m-1)(n-1)} = \begin{vmatrix} U_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} + (n-1)\Theta_i''\right) dx_i \\ U_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} + (m-1)\Theta_i'\right) dx_i \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\,(m+n-3)} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_i} + (n-1)\,\Theta_i''\right) x_i & \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_j} + n - 1\,\Theta_i''\right) dx_i \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} + (m-1)\,\Theta_i'\right) x_i & \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_i} + m - 1\,\Theta_i'\right) dx_i \end{vmatrix} .$$

Aus der rechten Seite entfernt man endlich die Differentiale vermöge der Identität

$$\Delta' (f_i\, \varphi_i\, c_i\, b_i) = V \begin{vmatrix} c_x & c_{dx} \\ b_x & b_{dx} \end{vmatrix} ,$$

welche für die willkührlichen Grössen $c_i\ b_i$ die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} c_x & c_{dx} \\ b_x & b_{dx} \end{vmatrix} = -(kx)\,(f_i\, \varphi_i\, c_i b_i)$$

liefert. Demnach ist

$$F \equiv \left(f_i,\ \varphi_i,\ \frac{\partial U_1}{\partial x_i} + (n-1)\,\Theta_i'',\ \frac{\partial U_2}{\partial x_i} + (m-1)\,\Theta_i'\right) = 0$$

die Gleichung der gesuchten Fläche und zwar in der bereits von Clebsch gegebenen Form.

IX.

Die Punkte fünfpunktiger Berührung auf der windschiefen Fläche.

Soll eine Gerade y fünf consecutive Erzeugende schneiden, so muss $(y^2)=0$, $(yx)=0$, $(ydx)=0$, $(yd^2x)=0$, $(yd^3x)=0$, $(yd^4x)=0$ sein. Die Elimination der y liefert sofort die Determinante

$$(\Omega : x\ dx\ d^2x\ d^3x\ d^4x) = 0\,.$$

Sie geht durch Multiplication mit Δ^2 in die Determinante VI. (1) über, wenn man die letzte Horizontal- und Vertikalreihe derselben durch:

$$f d^4x\ \varphi d^4x\ \psi d^4x\ x d^4x\ 0\ 0\ 0\ 0$$

ersetzt. Berücksichtigt man die Gleichungen VI. (12), (14), so ist ersichtlich, dass an Stelle der vierten Differentiale noch ihre äquivalenten Ausdrücke einzuführen sind. Dabei müsste sich der Factor $(kx)^8$ absondern lassen, vorausgesetzt, dass die Punkte fünfpunktiger Berührung überhaupt auf Erzeugenden liegen, welche vollständiger Schnitt von vier Complexen sind. In diesem Falle würde die Zahl der fraglichen Punkte

$$20\,mnp\,(2\,(m+n+p) - 7)$$

sein. Die Reduction der Determinante, selbst in dem einfacheren Falle, wo der eine der Complexe linear ist, hat mir aber nicht gelingen wollen. Wahrscheinlich ist übrigens, dass analog wie in der allgemeinen Flächentheorie, die fünfpunktigen Tangenten sich nicht durch den vollständigen Schnitt von vier Complexen darstellen lassen. Es mag noch bemerkt werden, dass im Allgemeinen die Linienflächen, welche unendlich vielen linearen Complexen angehören, keine fünfpunktigen Tangenten besitzen. Ihr Auftreten würde die Existenz von Erzeugenden bedingen, deren vier unmittelbar folgende mit ihnen demselben Hyperboloid angehören, also eine weit höhere Singularität vorstellen.

X.

Das osculirende Hyperboloid der windschiefen Flächen.

Die Erzeugenden des osculirenden Hyperboloides, welches zu der Erzeugenden x der Fläche gehört, sind die Haupttangenten y der letzteren, welche den Punkten von x entsprechen. Man hat daher für die Erzeugenden des Hyperboloides die Gleichungen V. (1):

$$(1) \qquad (y^2) = 0\,, \quad (yx) = 0\,, \quad (y\,dx) = 0\,, \quad (y\,d^2x) = 0\,.$$

Wir stellen die Gleichung dieses Hyperboloides in Linniencoordinaten dar. Damit eine Gerade z zwei unendlich nahe Erzeugende y schneide, muss das System der Gleichungen (1) mit

$$(2) \qquad (zy) = 0\,.$$

eine Doppelwurzel besitzen. Es muss also die Determinante

$$(3) \qquad (\Omega : x\ dx\ d^2x\ z)$$

verschwinden. Durch Multiplication mit Δ^2 geht dieselbe über in:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & 0 & (m-1)\,U_1 & fz \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & 0 & (n-1)\,U_2 & \varphi z \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & 0 & (p-1)\,U_3 & \psi z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V & xz \\ (m-1)\,U_1 & (n-1)\,U_2 & (p-1)\,U_3 & V & 0 & 0 \\ fz & \varphi z & \psi z & xz & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Die Gleichung (4) *ist die Gleichung des osculirenden Hyperboloides in Liniencoordinaten.* Sind die drei Complexe $F\,\Phi\,\Psi$ linear, so reducirt sie sich, da $U_1\ U_2\ U_3$ verschwinden, auf die Complexgleichung des von denselben erzeugten Hyperboloides, multiplicirt mit dem Factor V^2 *). Befinden sich unter den Complexen zwei lineare specielle α_x, β_x, so reducirt sich für $(z\alpha) = 0$, $(z\beta) = 0$ die Determinante (4) auf:

$$(4^a) \qquad \begin{vmatrix} \psi z & p-1\,U_3 \\ xz & V \end{vmatrix} = 0\,.$$

Für eine singuläre Erzeugende der Fläche reducirt sich (4) auf $(xz)^2K$, d. h. auf den doppeltzählenden speciellen linearen Complex mit der Axe x. Das osculirende Hyperboloid wird endlich unbestimmt, wenn der Factor K verschwindet, d. h. wenn:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & (m-1)\,U_1 \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & (n-1)\,U_2 \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & (p-1)\,U_3 \\ (m-1)\,U_1 & (n-1)\,U_2 & (p-1)\,U_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung, welche aussagt, dass zwei singuläre Erzeugende zusammengerückt sind.

Die Tangenten des osculirenden Hyperboloides, welche die Erzeugende x schneiden, sind gegeben durch die Gleichungen:

---

*) Vgl. § III. (1).

$$(6) \qquad (xz) = 0 \begin{vmatrix} f^2 & f\varphi & f\psi & fz \\ f\varphi & \varphi^2 & \varphi\psi & \varphi z \\ f\psi & \varphi\psi & \psi^2 & \psi z \\ fz & \varphi z & \psi z & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Der zweite Ausdruck ist für $(xz) = 0$ das Quadrat einer in den z linearen Function, nämlich

$$\frac{1}{(kx)} (f\varphi\psi x k z).$$

Er repräsentirt einen linearen Complex, dessen den Punkten von x zugehörige Ebenen zugleich Tangentenebenen der Fläche sind. Wenn dagegen (xz) nicht verschwindet, so stellt die zweite Gleichung (6) ein Hyperboloid vor, welches jeder Erzeugenden ebenfalls zugeordnet ist, aber von dem osculirenden verschieden ist. Während das osculirende Hyperboloid die Erzeugenden x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ zu Erzeugenden zweiter Art enthält, hat das Hyperboloid (6) im Allgemeinen nur x, $x + dx$ zu solchen. Die Erzeugende $x + 2dx + d^2x$ ist nicht einmal eine der Tangenten der letzteren, dies wird vielmehr nur für besondere Erzeugende der Fläche stattfinden, für welche die Gleichung (5) besteht, deren Anzahl mithin

$$4mnp\,(3(m+n+p) - 10)$$

ist.

Ebenso gehört zu den Tangenten des osculirenden Hyperboloides im Allgemeinen nicht die Erzeugende $x + 3dx + 3d^2x + d^3x$. Es findet dies, wie eine einfache Betrachtung zeigt, nur statt für diejenigen Erzeugenden, welche von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden. Aus der für den Fall zweier linearer Complexe gültigen Formel (4^a) erhält man insbesondere, wenn anstatt $z\,d^3x$ gesetzt wird, wieder die Bedingsgleichung für die hyperbolischen Erzeugenden, wie zu erwarten war.

XI.

Ueber windschiefe Flächen vom Geschlechte Null.

Wir gehen jetzt zu einem zweiten Theile von Untersuchungen über, die sich auf windschiefe Flächen beziehen, welcher mit dem vorigen nur insofern zusammenhängt, als dabei die nämlichen Methoden der Betrachtung zu Grunde gelegt werden. Die windschiefen Flächen vom Geschlechte Null gestatten in der That eine wesentlich andere Behandlung. Man kann eine solche Fläche auffassen als Inbegriff der Verbindungsgeraden sich eindeutig entsprechender Punkte zweier ihrer ebenen Schnittcurven*). Die Erzeugenden sind alsdann rationale

*) Indem man die windschiefen Flächen beliebigen Geschlechtes von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet, gelangt man zu einer wesentlich anderen linien-

Functionen eines Parameters λ, welche man erhält, wenn man die Ausdrücke p_{ik} aus den Coordinaten entsprechender Punkte der beiden Curven bildet und von ihnen zu den allgemeinen Liniencoordinaten x übergeht.

Wir können daher die Gleichung der Fläche in der Form

$$\varrho x_i = \varphi_i \lambda \tag{1}$$

schreiben. Es bedeuten hier die φ_i rationale Functionen n^{ten} Grades von λ, zwischen denen die Identität

$$(\varphi^2) = 0 \tag{2}$$

vermöge der Coefficienten, welche in φ_i auftreten, besteht. In Folge dessen kann man durch Differentiation nach λ aus (2) eine weitere Reihe von Identitäten

$$\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) + \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right)^2 = 0 \text{ u. s. w.} \tag{3}$$

ableiten. Es empfiehlt sich, die Gleichungen (1) durch Einführung eines zweiten Parameters μ homogen zu machen. Es gelten dann die bekannten Identitäten:

$$n\varphi_i = \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu} \text{ u. s. w.,}$$

sowie auch

$$\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) + \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu \partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\right) = 0 \cdots$$

Wir bestimmen nun zunächst die Singularitäten der durch die Gleichungen (1) dargestellten Fläche.

Die Ordnung der Fläche ist n. Denn die Bedingung, unter welcher die willkührliche Gerade y eine Erzeugende x derselben schneidet, ist:

$$(y\varphi) = 0$$

eine Gleichung n^{ten} Grades für λ.

Der Rang der Fläche ist $2(n-1)$. Eine Tangente y der Fläche muss den Gleichungen

$$(yx) = 0, \quad (ydx) = 0,$$

oder

$$\left(y \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \quad \left(y \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}\right) = 0$$

genügen. Die Elimination von λ aus den beiden letzteren liefert eine Gleichung $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in y, welche die Fläche in Liniencoordinaten darstellt. *Die Fläche enthält daher eine Doppelcurve vom Grade* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, wie übrigens auch aus dem Geschlecht des ebenen Schnittes gefunden werden konnte.

---

geometrischen Darstellung derselben überhaupt, über die ich bei einer demnächstigen Gelegenheit handeln werde.

Man kann übrigens den Grad der Doppelcurve auch direct bestimmen, wie wir jetzt zeigen wollen. Zwei Erzeugende x, x', denen die Parameter λ, λ_1 entsprechen, bilden einen Punkt der Doppelcurve, wenn

$$(xx') = 0$$

oder

$$(\varphi_1 \varphi) = 0 .$$

Da aber (φ^2), (φ_1^2) identisch verschwinden, kann an Stelle der Gleichung $(\varphi\varphi_1) = 0$ geschrieben werden:

$$\Sigma (\varphi_i - \varphi_i')^2 = 0 . \tag{4}$$

In dieser Form enthält die Gleichung (4) den abzusondernden Factor $(\lambda - \lambda_1)^2$ und ist dann in Bezug auf λ und λ_1 vom $n-2^{\text{ten}}$ Grade, In dieser reducirten Gestalt wollen wir sie durch

$$\Psi (\lambda \lambda_1) = 0 , \tag{5}$$

bezeichnen. Aus (5) ersehen wir zunächst, dass jede Erzeugende von $(n-2)$ anderen getroffen wird oder $n-2$ Punkte der Doppelcurve enthält. Ein willkührlicher Strahl des Büschels $x\,x'$ ist ferner $x + \varrho x'$. Damit derselbe zwei willhürliche Geraden a, b schneide, muss:

$$a_x b_{x'} - b_x a_{x'} = 0 \tag{6}$$

sein. Die letztere Gleichung, durch $\lambda - \lambda_1$ theilbar, ist in Bezug auf λ, λ_1 vom Grade $n-1$. Eliminirt man jetzt aus (5), (6) etwa λ_1, so entsteht eine Gleichung vom $2(n-2)(n-1)^{\text{ten}}$ Grade in λ. *Die Hälfte dieser Zahl stellt demnach solche Punkte der Doppelcurve vor, für welche eine in der Ebene xx' — der Doppelebene der Fläche — durch den Punkt $x\,x'$ gezogene Gerade die a, b schneidet.* Schneiden sich also a und b, so liegt entweder ein Punkt der Doppelcurve in der Ebene ab, oder es geht eine Doppelebene durch den gleichnamigen Punkt. Da die Ordnung der Doppelcurve gleich der Classe der Doppeldeveloppabeln ist, so ist jede dieser Zahlen gleich $\frac{(n-1)(n-2}{2}$.

Man kann auch die Discriminante der Gleichung (5) bilden. *Sie sagt aus, dass eine Erzeugende x von zwei unendlich nahen Erzeugenden getroffen wird, oder dass eine Erzeugende von der Doppelcurve berührt wird. Die Zahl dieser ausgezeichneten Erzeugenden ist daher:*

$$2(n-2)(n-3) .$$

Wir bestimmen ferner die Zahl der dreifachen Tangentenebenen, sowie die ihr gleiche der dreifachen Punkte der Fläche. Eine Erzeugende mit dem Parameter λ gehört zu einer der beiden Singularitäten, wenn für irgend zwei Wurzeln

$$\lambda_i' \quad \lambda_k'$$

der Gleichung (5) die Beziehung

$$\Psi (\lambda_i' \lambda_k') = 0 \tag{7}$$

besteht. Es muss also die symmetrische Function

$$V = \Pi\,(\Psi\,(\lambda_i'\,\lambda_k')) \tag{8}$$

verschwinden, welche man durch Multiplication der $\frac{(n-2)\,(n-3)}{2}$ Polynome $\Psi(\lambda_i'\lambda_k')$ bilden kann. Man übersieht leicht, dass, wenn man V als rationale Function der Coefficienten von (5) darstellt, dabei λ höchstens im Grade $(n-2)^2(n-3)$ auftreten wird. Diese Zahl, vermindert um die Zahl der Erzeugenden, welche die Doppelcurve berühren, giebt als Rest:

$$(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,.$$

Derselbe bezieht sich auf die beiden dualistischen Singularitäten und zwar wieder auf jede dreifach. *Daher ist*

$$\tfrac{1}{6}\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$$

die Zahl der dreifachen Punkte und Ebenen der Fläche.

Die *singulären* Erzeugenden der Fläche sind durch

$$\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda}\right) = 0$$

gegeben. Die letztere Gleichung ist in Folge der Identität $(\varphi^2) = 0$ vom Grade $2\,(n-2)$. Man erhält sie in dieser reducirten Gestalt, wenn man in (5) $\lambda = \lambda_1$ setzt, also:

$$\Psi\,(\lambda\,\lambda) = 0\,.$$

Die Zahl der singulären Erzeugenden ist daher $2\,(n-2)$.

Die bisher bestimmten Zahlen sind zunächst unter der Voraussetzung gewonnen, dass die Fläche keine besonderen Singularitäten, wie Doppel- oder Rückkehrerzeugende besitzt. Eine *Doppelerzeugende* wird auftreten, wenn die sechs Gleichungen

$$\varrho\,\varphi_i\lambda = \varphi_i\lambda'$$

für verschiedene Werthe von λ, λ' erfüllt werden können. Das Auftreten einer Doppelerzeugenden modificirt übrigens weder den Rang der Fläche noch die Zahl der singulären Erzeugenden, während die Doppelcurve sich für jede um zwei Einheiten erniedrigt.

Wenn aber die Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} = \varrho\,\varphi_i$$

bestehen, so wird jede Gerade y, welche die Fläche in der Erzeugenden x schneidet, dieselbe in zwei zusammenfallenden Punkten treffen. Die Geraden y aber, welche ausserdem noch dem linearen Complexe

$$\left(y\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0 \tag{10}$$

angehören, schneiden die Fläche in je drei zusammenfallenden Punkten. Eine solche Erzeugende ist daher *Rückkehrgeneratrix* der Fläche, und die Gleichung (10) giebt die Rückkehrtangentialebenen derselben längs

der Erzeugenden x durch die Ebenen des linearen Complexes an, welche den Punkten von x zugeordnet sind. Das Vorhandensein einer Rückkehrgeneratrix aber hat zur Folge, dass bei der Bestimmung der Gleichung der Fläche in Liniencoordinaten ein linearer specieller Complex sich aussondert. Bezeichnet man daher durch d, r die Zahl der Doppel- und Rückkehrgeneratricen, durch D den Grad der krummen Doppelcurve, so ist der Rang der Fläche gegeben durch die identischen Ausdrücke

$$2(n-1) - r = n(n-1) - 2D - 2d - 3r .$$

Für eine Rückkehrgeneratrix verschwindet ferner nicht allein

$$\Psi(\lambda\lambda) = \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda}\right) = 0 ,$$

sondern auch

$$\frac{\partial \Psi\lambda\lambda}{\partial \lambda} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = \left(\varphi\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0 .$$

Es hat also $\Psi\lambda\lambda = 0$ für jede Rückkehrgeneratrix eine Doppelwurzel. $\Psi\lambda\lambda = 0$ kann andere Doppelwurzeln haben, welche sich auf zusammengefallene singuläre Erzeugende beziehen. Die Zahl der singulären Erzeugenden ist daher:

$$2(n-2) - 2r .$$

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung der Haupttangenten der Fläche. An Stelle der Gleichungen

$$(y\varphi) = 0 , \quad \left(y\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0 , \quad \left(y\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0 ,$$

welche eine Haupttangente y charakterisiren, setzen wir die äquivalenten Gleichungen:

$$\left(y\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0 , \quad \left(y\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda\, \partial \mu}\right) = 0 , \quad \left(y\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\right) = 0 .$$

Die Zahl der Haupttangenten, welche zwei willkührliche Gerade a, b schneiden, ist daher bestimmt durch die Gleichung:

$$\left(\Omega : \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda\, \partial \mu}\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\ a\ b\right) = 0 .$$

Die windschiefe Fläche, welche von Haupttangenten gebildet wird, die einem linearen Complexe angehören, ist daher vom Grade

$$6(n-2) ,$$

Ordnung und Classe des Strahlensystems der Haupttangenten ist somit gleich $3(n-2)$, was mit der directen Abzählung übereinstimmt.

Die Linien vierpunktiger Berührung genügen den Bedingungen:

$$(11)\quad \left(y\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3}\right)=0,\ \left(y\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^2\, \partial \mu}\right)=0,\ \left(y\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda\, \partial \mu^2}\right)=0,\ \left(y\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \mu^3}\right)=0,\ (y^2)=0,$$

Fügt man denselben $(yz) = 0$ hinzu, so ergiebt sich:

Die Ordnung der von den vierpunktigen Tangenten gebildeten windschiefen Fläche ist gleich 8 $(n-3)$. Die gleiche Zahl solcher Tangenten gehört überhaupt einem willkührlichen linearen Complexe an. Wir schliessen dann weiter: *Die Zahl der Punkte, in denen die Curve vierpunktiger Berührung eine Erzeugende berührt, ist gleich* 8 $(n-3)$.

Je zwei Erzeugende der Fläche der vierpunktigen Tangenten ordnen sich rational den Erzeugenden der gegebenen Fläche zu. Die erstere Fläche ist daher von *hyperelliptischem* Charakter, ihre sämmtlichen Erzeugenden lassen sich als Functionen von λ darstellen, in denen eine quadratische Irrationalität auftritt. Es ist leicht, diese Functionen selbst anzugeben. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Determinante

$$\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^2\partial\mu}\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda\partial\mu^2}\ \frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^3}\ y\ \varrho\right),$$

in welcher die Grössen ϱ willkührliche Coefficienten vorstellen, durch

$$\Omega.$$

Man hat unter dieser Voraussetzung aus den Gleichungen (11)

$$y_i = \mu\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_i},$$

oder, wenn die Unterdeterminanten von Ω nach $y_i\varrho_k$ durch Ω_{ik} bezeichnet werden:

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{1}{\mu}y_1 = \quad y_2\Omega_{21} + y_3\Omega_{31} + y_4\Omega_{41} + y_5\Omega_{51} + y_6\Omega_{61}, \\ \frac{1}{\mu}y_2 = y_1\Omega_{21} \quad + y_3\Omega_{23} + y_4\Omega_{42} + y_5\Omega_{52} + y_6\Omega_{62}, \\ \frac{1}{\mu}y_3 = y_1\Omega_{31} + y_2\Omega_{32} \quad + y_4\Omega_{43} + y_5\Omega_{53} + y_6\Omega_{63}, \\ \frac{1}{\mu}y_4 = y_1\Omega_{41} + y_2\Omega_{42} + y_3\Omega_{43} \quad + y_5\Omega_{54} + y_6\Omega_{64}, \\ \frac{1}{\mu}y_5 = y_1\Omega_{51} + y_2\Omega_{52} + y_3\Omega_{53} + y_4\Omega_{54} \quad + y_6\Omega_{65}, \\ \frac{1}{\mu}y_6 = y_1\Omega_{61} + y_2\Omega_{62} + y_3\Omega_{63} + y_4\Omega_{64} + y_5\Omega_{65}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (12) geben, wenn μ bestimmt ist, die y ausgedrückt durch rationale Functionen von λ und μ. Die Grösse μ bestimmt man auf folgende Weise. Man hat:

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & a_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & a_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho y \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \varrho y & \varrho^3 \end{vmatrix} = -(\varrho y)^2\Delta'.$$

Es bedeuten dabei die $A_{11}\ A_{12}\ \cdots$ die Ausdrücke

$$\Sigma\left(\frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^3}\right)^2 \quad \Sigma\frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^3}\frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^2\partial\mu}\cdots\cdots$$

Δ' die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix},$$

welche, gleich Null gesetzt, die Berührungspunkte der Curve vierpunktiger Berührung mit den Erzeugenden repräsentirt. Man hat daher:

$$\Omega = (\varrho y)\sqrt{-\Delta'},$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_i} = y_i\sqrt{-\Delta'} = \frac{1}{\mu}y_i,$$
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{-\Delta'}}.$$

Wir schliessen hieraus:

Das Geschlecht der Fläche, welche von den vierpunktigen Tangenten gebildet wird, ist gleich:

$$P = 4n - 13.$$

Die Zahl P erniedrigt sich jedesmal um eine Einheit, wenn $\Delta'=0$ eine Doppelwurzel hat. Für Flächen, welche einem linearen speciellen Complexe γ angehören, ist insbesondere P immer gleich Null, wie sich auch daraus ergiebt, dass:

$$\Delta' = -\frac{1}{(\varrho\gamma)^2}\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^2\partial\mu}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda\partial\mu^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^3}\ \gamma\ \varrho\right]^2.$$

Fügt man den Gleichungen (11) noch die folgende:

$$a_y b_x - a_x b_y = 0$$

hinzu, so erhält man durch Elimination der y eine Gleichung in λ, welche sich auf den Grad der Curve vierpunktiger Berührung bezieht. Wie die Abzählung lehrt, ist der *Grad* derselben

$$5n - 12.$$

Auch diese Curve ist im Allgemeinen hyperelliptisch, ihr Geschlecht das nämliche, wie das der Fläche der vierpunktigen Tangenten, deren Erzeugenden ihre Punkte eindeutig zugeordnet sind. Sie kann ferner im Allgemeinen keine Spitzen haben, da auf jeder Erzeugenden der gegebenen Fläche nur zwei Punkte derselben liegen. Die Singularitäten der Curve vierpunktiger Berührung lassen sich daher ohne weiteres angeben. Man erhält z. B. für den Rang derselben die Zahl

$$18n - 52 \text{ u. s. w.}$$

Die Punkte fünfpunktiger Berührung endlich sind bestimmt durch die Gleichung:

$$\left(\Omega : \frac{d^4\varphi}{\partial\lambda^4}\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial\lambda^3\partial\mu}\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial\lambda^2\partial\mu^2}\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial\lambda\partial\mu^3}\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial\mu^4}\right) = 0\,.$$

Die Zahl der fünfpunktigen Tangenten ist daher $10\,(n-4)$.

Die letzthin bestimmten Singularitäten werden ersichtlich durch das Auftreten von Doppelerzeugenden nicht beeinflusst. Für eine windschiefe Fläche dritten Grades ist beispielsweise die Curve vierpunktiger Berührung vom dritten Grade, sie besteht bekanntlich aus einer doppelten und einer einfachen Leitgeraden. Für die windschiefen Flächen vierten Grades $p = 0$ ist diese Curve, sowie die von den vierpunktigen Tangenten gebildete Fläche achter Ordnung. Erst die Flächen fünfter Ordnung enthalten zehn Punkte fünfpunktiger Berührung, ihre Doppelcurve einen dreifachen Punkt u. s. w.

XII.

Fortsetzung. Ueber windschiefe Flächen vom Geschlechte Null, welche linearen Complexen angehören*).

Die Coefficienten gleich hoher Potenzen von λ in den Functionen φ kann man als Coefficienten der Gleichungen von ebenso viel linearen Complexen auffassen. Wir nennen sie die *Fundamentalcomplexe der Fläche,* weil ihre Beschaffenheit charakteristisch ist für das Verhalten der letzteren. Zwischen den Invarianten und simultanen Invarianten**) der Fundamentalcomplexe finden dann diejenigen Relationen statt, welche das identische Verschwinden von $(\varphi^2) = 0$ erfordert. Unter ihnen befinden sich immer zwei specielle lineare Complexe, deren Coefficienten die von λ^0 und λ^n sind, ihre Axen sind zugleich diejenigen Erzeugenden der Fläche, welche den Werthen $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ entsprechen. Die Fläche degenerirt in eine ebene Curve n^{ter} Classe oder einen Kegel n^{ter} Ordnung (vom Geschlecht Null), wenn je zwei Erzeugende sich schneiden. Dazu ist erforderlich, dass alle Fundamentalcomplexe speciell sind und mit einander in Involution liegen, d. h. dass ihre Axen entweder in einer Ebene liegen oder durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen***).

Ebene Curven und Kegel beliebigen Geschlechtes lassen übrigens immer, wie wir hier noch bemerken, die folgende Darstellung in Linien-

*) Cremona, Rappresentazione di una classe di superficie gobbe sopra un piano e determinazione delle loro curve assintotiche. Ann. di Mat. Ser. II, t. 1, S. 248.

**) Klein, Math. Ann. Bd. II, S. 201.

***) Der Begriff der Involution linearer Complexe ist von Herrn Klein erörtert Math. Ann. Bd. II, S. 201.

coordinaten zu: Sind α, β, γ drei sich gegenseitig schneidende Gerade, so dass:

$$(\alpha^2) = 0\,, \quad (\beta^2) = 0\,, \quad (\gamma^2) = 0\,,$$
$$(\alpha\beta) = 0\,, \quad (\beta\gamma) = 0\,, \quad (\gamma\alpha) = 0\,,$$

so repräsentirt $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$ immer eine Gerade, welche $\alpha\,\beta\,\gamma$ ebenfalls schneidet. *Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen $\lambda\,\mu\,\nu$ bedeutet daher entweder eine Curve n^{ter} Classe oder einen Kegel n^{ter} Ordnung, dessen Erzeugende durch*

$$\varrho y = \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

vorgestellt werden.

Wenn ein linearer Complex γ_x mit allen Fundamentalcomplexen in Involution liegt, so gehören alle Erzeugenden der Fläche diesem Complexe an. Ist derselbe insbesondere speciell, so ist die Axe γ desselben eine Leitlinie der Fläche. In diesem Falle bestehen die Gleichungen:

$$(\gamma\varphi) = 0\,, \quad \left(\gamma\,\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0\,, \quad \left(\gamma\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = 0 \cdots \text{u. s. w.},$$
$$(\gamma^2) = 0\,.$$

Zieht man eine Gerade z, welche γ schneidet, so ist $\gamma + \varrho z$ ein willkührlicher Strahl des Büschels (γz). Die Erzeugenden, welche denselben treffen, sind bestimmt durch:

$$(\gamma\varphi) + \varrho\,(z\varphi) = 0\,,$$

oder durch $(z\varphi) = 0$. Sie sind also ganz unabhängig von ϱ, d. h. k_1 derselben liegen in der Ebene (γz), während k_2 durch den Punkt (γz) gehen, wobei die Beziehung

$$k_1 + k_2 = n$$

stattfindet. Die Gerade γ ist also k_2-fache Leitlinie der Fläche. Ausserdem existirt noch eine krumme Doppelcurve. Bezeichnet man die Anzahl der Punkte, in denen dieselbe der Leitlinie begegnet, mit α, so ist der Grad derselben

$$\alpha + \frac{k_2\,(k_2 - 1)}{2}\,.$$

Hat die Fläche d, r Doppel- oder Rückkehrgeneratricen, so besteht die Gleichung:

$$0 = n^2 - 3\,n + 2 - k_2\,(k_2 - 1) - k_1\,(k_1 - 1) - 2\,d - 2\,r - 2\,\alpha\,,$$

oder:

$$n - 1 + \alpha + d + r = k_1 k_2\,,$$

womit die Zahl α bestimmt ist.

Wenn die Fläche zwei linearen Complexen angehört, so existiren zwei Leitlinien, von denen die eine k_1-, die andere k_2-fach ist und ausserdem keine Doppelcurve. Es ist daher $\alpha = 0$, und

$$n - 1 + d + r = k_1 k_2\,.$$

Wenn d und r gleich Null sind, so ist immer $k_1 = 1$, $k_2 = n - 1$.

Wir untersuchen jetzt die *Haupttangentencurven* solcher Flächen, die zunächst einem linearen Complexe angehören. Die ausgezeichnete algebraische Haupttangentencurve ist in diesem Falle von der Ordnung und Classe $2(n-1) - r$. Auf jeder Erzeugenden der Fläche liegen zwei Punkte derselben. Ihre Tangenten müssen sich daher als Functionen von λ darstellen, welche eine quadratische Irrationalität enthalten. Wir haben damit den Satz:

Die algebraische Haupttangentencurve auf einer windschiefen Fläche vom Geschlechte Null, die einem linearen Complexe angehört, ist im Allgemeinen hyperelliptisch.

Die Darstellung der sämmtlichen Tangenten der Haupttangentencurve als Functionen von λ erhält man auf demselben Wege, welcher bei der Betrachtung der Fläche der vierpunktigen Tangenten eingeschlagen wurde. Gehört die Fläche dem linearen Complexe $\gamma_x = 0$ an, so sind die Tangenten y der genannten Curve charakterisirt durch:

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0, \\ \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu}\right) = 0, \\ \left(y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2}\right) = 0, \\ (\gamma y) \quad = 0, \\ (y^2) \quad = 0. \end{cases}$$

Um die Auflösung dieser Gleichungen zu bewerkstelligen, setzen wir

$$\Omega = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \gamma\, y\, \varrho\right).$$

Alsdann ist wieder

$$y_i = \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_i}$$

und die y proportional den Unterdeterminanten aus den Coefficienten der Gleichungen XI. (12). Zur Bestimmung von μ hat man:

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & a_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & a_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & (\gamma^2) & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho y \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \varrho y & \varrho^2 \end{vmatrix} = -(\varrho y)^2 (\gamma^2) \Delta.$$

Es bedeuten hier die $B_{11}\ B_{12} \cdots$ die Ausdrücke

$$\Sigma \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda^2}\right)^2, \quad \Sigma \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \lambda \partial \mu}, \cdots,$$

Δ die Determinante:

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}.$$

Es ist aber Δ im Wesentlichen identisch mit der dritten Potenz von $\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda}\right)$ oder $\Psi(\lambda\lambda)$. Denn man hat

$$\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \gamma\, y\, \varrho\right) = \frac{1}{n(n-1)^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda\, \partial \mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} \gamma\, y\, \varrho\right),$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten zum Quadrat erhebt:

$$(\Psi\lambda\lambda)^3 = \frac{1}{n^2(n-1)^4}\Delta.$$

Es ist daher

$$\mu = \frac{1}{(\Psi\lambda\lambda)\, n(n-1)^2 \sqrt{-(\Psi\lambda\lambda)(\gamma^2)}}.$$

Der Ausdruck $\Psi\lambda\lambda$ ist daher entscheidend für das Geschlecht der Haupttangentencurve. Man kann ihn die Discriminante der Fläche nennen. Bezeichnet man die Zahl der Rückkehrgeneratricen derselben durch r, die der zusammengerückten singulären Erzeugenden durch x, so ist demnach das *Geschlecht* der Haupttangentencurve

$$P = n - 3 - r - x.$$

Man gewinnt daraus die folgenden Zahlen:

$$M = N = 2(n-1) - r,$$
$$R = 6(n-2) - 4r - 2x,$$
$$\Omega = 10n - 8r - 6x - 28.$$

Von den stationären Tangenten Ω liegen $2n - 4 - 2r$ in den Cuspidalpunkten der Fläche, die übrigen $8(n-3) - 6(r+x)$ beziehen sich auf die Berührungspunkte der Curve vierpunktiger Berührung.

Wenn die Fläche zwei linearen speciellen Complexen mit windschiefen, nicht zusammenfallenden Axen $\gamma'\gamma''$ angehört, so hat man zur Bestimmung einer beliebigen Haupttangentencurve die drei ersten Gleichungen (1) und:

$$(y\gamma') + \varrho(\gamma'' y) = 0, \quad (y^2) = 0,$$
$$(\gamma'^2) = 0, \quad (\gamma''^2) = 0,$$

zu nehmen, in denen ϱ einen willkührlichen Parameter vorstellt, welcher je eine Haupttangentencurve individualisirt. An Stelle derselben kann man, um eine einfachere Lösung als die durch die Gleichungen XI. (12) gebotene zu erhalten, das folgende System benutzen, in welchem μ wieder gleich eins zu setzen ist.

$$(2)\qquad \begin{cases} \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\right) = -1\,, \\ \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^2\partial\mu}\right) = \lambda\,, \\ \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu^2}\right) = -\lambda^2\,, \\ \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\right) = \lambda^3\,, \\ (\gamma' y) = -\varrho\,\omega\,, \\ (\gamma'' y) = \omega\,, \\ (y^2) \quad = 0\,. \end{cases}$$

Die Elimination der y aus diesen sieben Gleichungen liefert die folgende zur Bestimmung von ω:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & \lambda & -\lambda^2 & \lambda^3 & -\varrho\,\omega & \omega \\ -1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ \lambda & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 \\ \lambda^3 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 \\ -\varrho\,\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma'\gamma'') \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma'\gamma'') & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Die A_{ik} sind Functionen $2\,(n-3)^{\text{ten}}$ Grades in λ. Bezeichnet man die Determinante der A_{ik}, gerändert mit $-1\ \lambda\ -\lambda^2\ \lambda^3$ durch Δ'', so geht (3) über in

$$\Delta''\,(\gamma'\gamma'') + 2\,\varrho\,\omega^2\Delta' = 0\,.$$

Die Determinante Δ' ist nach § XI. ein vollständiges Quadrat, während die Determinante Δ'' im Wesentlichen mit Δ oder $\Psi\lambda\lambda$ identisch sein muss. In der That hat man:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\ \gamma'\ \gamma''\ y\right) = \frac{-1}{(n-2)^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda_1^3} & -1 & 0 \\ \frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda^2\partial\mu} & \lambda & 0 \\ \frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\lambda\,\partial\mu^2} & -\lambda^2 & 0 \\ \frac{\partial^3\varphi_i}{\partial\mu^3} & +\lambda^3 & 0 \\ \gamma_i' & 0 & 0 \\ \gamma_i'' & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

woraus sich die Beziehung:

$$\Delta = -\frac{1}{(n-2)^6}\Delta''$$

ergiebt.

Die sechs ersten Gleichungen (2) geben dann unmittelbar die Coordinaten y, ausgedrückt durch rationale Functionen von λ und ω, wobei

$$\omega = (n-2)^3(n-1)^2 n \Psi_{\lambda\lambda} \sqrt{\frac{\Psi_{\lambda\lambda}(\gamma,\gamma_{\mu\mu})}{2\varrho\Delta''}}$$

und damit die Darstellung aller der developpabelen Flächen, deren Rückkehrkanten die Haupttangenten sind, abhängig von dem willkührlichen Parameter ϱ.

Die Singularitäten der Haupttangentencurven sind durch die obigen Zahlen für M, N, P, R, Ω gegeben. Nur beziehen sich jetzt die stationären Tangenten, welche nicht in die Cuspidalpunkte fallen, paarweise auf die hyperbolischen Erzeugenden.

Windschiefe Flächen n^{ten} Grades $p = 0$, welche einem Büschel linearer Complexe mit discreten Directricen angehören, haben also $4(n-3) - 3(r+x)$ *hyperbolische Erzeugende.*

Es ist endlich noch der Fall zu erörtern, wo die Directricen coincidiren. Die sämmtlichen Haupttangentencurven sind dann gegeben durch die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = 0, \\ \left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right) = 0, \\ \left(y\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\right) = 0, \\ (y\gamma') + \varrho(\gamma'' y) = 0, \\ (y^2) = 0. \end{cases}$$

wo $(\gamma'^2) = 0$, $(\gamma'\gamma'') = 0$.

In Folge dessen ist für jeden Werth von λ eine der Lösungen von y

$$y_i = \gamma_i'.$$

Auf jeder Erzeugenden liegt daher nur ein Punkt der Haupttangentencurve. Es ist damit der Satz bewiesen:

Die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen $p = 0$ mit zusammenfallenden Leitlinien sind algebraische Curven vom Geschlechte Null).*

Dasselbe zeigt auch die Untersuchung der Discriminante. Man hat nämlich:

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\,\gamma'\,\gamma''\,\varrho\right)^2 = -(\gamma'\varrho)^2(\gamma''^2)\Delta,$$

so dass Δ ein vollständiges Quadrat ist.

---

*) Cremona a. a. O.

Bezeichnet man mit k_1 die kleinere der beiden Zahlen, welche die Multiplicität der beiden unendlich nahen Leitlinien ausdrücken, so ist Ordnung und Classe der Haupttangentencurven (Rückkehrgeneratricen nicht vorausgesetzt)

$$M = N = 2(n-1) - k_1,$$

woraus

$$R = 2M - 2 = 4n - 6 - 2k_1,$$
$$\Omega = 4n - 10 - 2k_1.$$

Die windschiefen Flächen n^{ten} Grades $p = 0$ mit zwei unendlich nahen k_1- und k_2-fachen Leitlinien $k_1 \leqq k_2$ haben $4n - 10 - 2k_1$ hyperbolische Erzeugende.

Man kann, wie wir zum Schluss noch bemerken wollen, ähnliche Formeln für die Singularitäten der Haupttangentencurven auch für windschiefe Flächen beliebigen Geschlechts, die linearen Complexen angehören, aufstellen.

Die Fläche gehöre einem linearen Complex an, ihr Grad sei n, der Grad der Doppelcurve D, die Zahl der Doppel-, resp. Rückkehrgeneratricen d, r. Das Geschlecht der Fläche ist

$$2p = (n-1)(n-2) - 2d - 2r - 2D.$$

Für Ordnung und Classe der Haupttangentencurve ergiebt sich demnach:

$$M = N = n(n-1) - 2d - 3r - 2D = 2p + 2n - 2 - r.$$

Den Rang der Haupttangentencurve bestimmt man auf folgende Weise. Die sämmtlichen Haupttangenten bilden ein Strahlensystem, dessen Ordnung und Classe

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8r - 6D.$$

Die Haupttangenten, welche dem linearen Complexe C angehören und eine willkührliche Gerade z schneiden, schneiden zugleich eine zweite Gerade, die conjugirte Polare von z in Bezug auf C. Es bilden aber die Haupttangenten, welche z schneiden, eine windschiefe Fläche der Ordnung $2i$. *Der Rang der Haupttangentencurve ist daher:*

$$R = 6n(n-2) - 12d - 16r - 12D.$$

Das Geschlecht der Haupttangentencurve bestimmt sich aus der Formel

$$R = 2P + 2(N-1),$$
$$P = 3n(n-2) - 6d - 8r - 6D - N + 1,$$
$$P = 4p + n - 3 - r.$$

Daraus ergiebt sich die Zahl der *stationären Tangenten*

$$\Omega = 3R - 4N$$
$$= 28p + 10n - 8r - 28 .$$

Es ist aber die Zahl der singulären Erzeugenden der windschiefen Fläche ferner:

$$4p + 2n - 4 - 2r .$$

Subtrahirt man diese Zahl von Ω, so erhält man endlich *als Zahl der Berührungspunkte der Curve vierpunktiger Berührung mit den Erzeugenden:*

$$8(n - 3) + 6(4p - r) .$$

Die entwickelten Formeln bleiben auch dann noch gültig, wenn die Fläche zwei speciellen linearen Complexen mit discreten Axen angehört. Solche Flächen besitzen daher

$$4(n - 3) + 3(4p - r)$$

hyperbolische Erzeugende.

Für Flächen mit zwei unendlich nahen, k_1-, k_2-fachen Leitlinien, sowie d, r Doppel- und Rückkehrgeneratricen gelten dagegen die folgenden Formeln:

$$P = p = k_1 k_2 - d - r - n + 1 ,$$
$$N = M = 2p - r + 2n - 2 - k_1 ,$$
$$\Omega = 10(p - 1) + 4n - 2r - 2k_1 ,$$

*in welchen Ω die Zahl der hyperbolischen Erzeugenden angiebt**).

XIII.

Developpabele Flächen vom Geschlechte Null.

Die windschiefe Fläche, deren Erzeugende durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = \varphi_i$$

dargestellt sind, ist abwickelbar, wenn je zwei consecutive Erzeugende sich schneiden. Es müssen also die beiden Gleichungen:

$$(\varphi^2) = 0 ,$$
$$\left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \lambda}\right) = 0$$

Identitäten sein. In Folge dessen hat man die weiteren Gleichungen:

$$(1) \quad \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right) = 0, \ \left(\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0, \ \left(\varphi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \lambda^3}\right) = 0, \ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2}\right) = 0 \text{ u. s. w.}$$

Bei Anwendung homogener Parameter λ μ kann man ihnen noch die folgenden:

*) Inzwischen habe ich die Ordnung der Curve vierpunktiger Berührung u. s. w. auf einer beliebigen (windschiefen) Fläche n^{ter} Ordnung bestimmt, worauf ich bei einer anderen Gelegenheit zurückkommen werde.

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\varphi^2}{\partial\mu}\right)=0, & \left(\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)=0, & \left(\varphi\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\right)=0, & \left(\varphi\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^3}\right)=0, \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\right)=0, & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)=0, & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu\,\partial\lambda}\right)=0, & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)=0, \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right)=0, & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\right)=0, & \left(\varphi\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^2\,\partial\mu}\right)=0, & \left(\varphi\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu^2}\right)=0 \end{cases}$$

hinzufügen.

Die Gleichungen (1) sagen aus, dass jede Erzeugende von $n-4$ anderen geschnitten wird. Bezeichnet man nämlich mit λ den Parameter von x, mit $\lambda+\varkappa$ den einer zweiten Erzeugenden, welche x schneidet, so ergiebt die Gleichung:

$$(\varphi_\lambda\,\varphi_{\lambda+\varkappa})=0=(\varphi_\lambda{}^2)+\frac{\varkappa}{1}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\varkappa^2}{2!}\left(\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right)+\frac{\varkappa^3}{3!}\left(\varphi\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\right)+\cdots\cdot$$

ausser den vier Wurzeln $\varkappa=0$ noch $n-4$ andere, welche sich auf die auf x liegenden Punkte der Doppelcurve beziehen. Es giebt daher eine bestimmte Zahl von Erzeugenden, für welche nur $n-5$ Wurzeln dieser Gleichung von Null verschieden sind. Sie sind bestimmt durch

$$\left(\varphi\,\frac{\partial^4\varphi}{\partial\lambda^4}\right)=0$$

und beziehen sich auf die stationären und Wendungspunkte der Rückkehrcurve der developpabeln Fläche.

Bezeichnet man die Zahl dieser beiden Singularitäten respective durch α, β, so zeigt die letzte Gleichung, dass

$$\alpha+\beta=2n-8\,.$$

Die Zahlen α, β dürfen nicht mehr, wie in den früheren Betrachtungen einander gleich gesetzt werden, weil eine developpable Fläche im Allgemeinen kein in sich dualistisches Gebilde ist.

Bezeichnet man den Grad der Rückkehrcurve durch M, so ist der Rang der Developpabeln

$$2(n-1)-M\,.$$

Diese Zahl stellt zugleich die Classe des ebenen Schnittes oder die Classe der Rückkehrcurve vor. Man hat daher:

$$M+N=2(n-1)\,,$$
$$p=0\,,$$
$$R=n\,.$$

Wir schliessen mit der folgenden Bemerkung. Der developpabeln Fläche ist eine zweite Fläche $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\varrho\,y_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial\lambda}$$

eindeutig zugeordnet. Aus den Gleichungen (1) ersieht man unmittelbar, dass je drei consecutive Erzeugende derselben:

$$y, \quad y + dy, \quad y + 2\,dy + d^2y$$

von der Erzeugenden x geschnitten werden. Die Fläche y hat daher die Rückkehrcurve von x zur Haupttangentencurve, ihre Erzeugenden schneiden die letztere und verlaufen zugleich in der jedesmaligen Schmiegungsebene derselben. Denselben Charakter besitzt aber auch jede andere Fläche, deren Erzeugende z durch die Gleichung

$$\varrho z_i = \alpha x_i + \beta \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda}$$

oder auch

$$\varrho z_i = a \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} + b \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu}$$

definirt werden. Die Grössen a, b können dabei völlig willkührliche Functionen von λ sein. Nimmt man sie insbesondere als constant an, so hat man den Satz:

Einer jeden abwickelbaren Fläche vom Geschlechte Null n^{ten} Grades lässt sich ein „Büschel" windschiefer Flächen $n-1^{ten}$ Grades von gleichem Geschlechte zuordnen, welche die Rückkehrcurve der gegebenen Fläche zur gemeinschaftlichen Haupttangentencurve haben.

XIV.

Betrachtung einiger bestimmter windschiefer Flächen.

Auf die in den vorigen beiden Paragraphen entwickelten Vorstellungen lässt sich eine Eintheilung der windschiefen Flächen $p = 0$ begründen, in welcher die Fundamentalcomplexe eine wesentliche Rolle spielen. Wir ziehen es aber vor, von der weiteren Verfolgung der allgemeinen Betrachtungen zunächst absehend, einige bestimmte Linienflächen zu untersuchen, womit denn zugleich die Richtung der liniengeometrischen Methoden überhaupt genauer bezeichnet werden wird.

A. Windschiefe Flächen zweiten Grades.

Sie sind gegeben durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = a_i + b_i\lambda + c_i\lambda^2, \tag{1}$$

wobei

$$(a^2) = 0\,, \quad (ab) = 0\,, \quad (c^2) = 0\,, \quad (bc) = 0\,, \quad (b^2) + 2\,(ac) = 0\,.$$

Die Fläche (1) ist ein Hyperboloid, dessen Erzeugende erster Art die x sind. Die Fundamentalcomplexe

$$a_y = 0\,, \quad b_y = 0\,, \quad c_y = 0$$

bestimmen dagegen die Erzeugenden zweiter Art. Stellt man dieselben in der Form:

$$\varrho y_i = \alpha_i + \beta_i\mu + \gamma_i\mu^2 \tag{2}$$

dar, so ist

$(\alpha^2) = 0\,, \quad (\alpha\beta) = 0\,, \quad (\gamma^2) = 0\,, \quad (\beta\gamma) = 0\,, \quad (\beta^2) + 2(\gamma\alpha) = 0\,,$

während zwischen den $\alpha\beta\gamma$, abc die Bedingungen

$$(3) \qquad \begin{cases} (a\alpha) = 0\,, & (a\beta) = 0\,, & (a\gamma) = 0\,, \\ (b\alpha) = 0\,, & (b\beta) = 0\,, & (b\gamma) = 0\,, \\ (c\alpha) = 0\,, & (c\beta) = 0\,, & (c\gamma) = 0 \end{cases}$$

stattfinden.

Die Gleichungen (1), (2) vermitteln die Abbildung sämmtlicher Erzeugenden der Fläche auf die ebenen Strahlbüschel $k_1 + \lambda k_2$, $k_1 + \mu k_2$. Das Doppelverhältniss von vier beliebigen Erzeugenden einer Art x_1, x_2, x_3, x_4, denen die Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 entsprechen, ist daher dasselbe wie das der Strahlen

$$k_1 + \lambda_1 k_2\,, \quad k_1 + \lambda_2 k_2\,, \quad k_1 + \lambda_3 k_2\,, \quad k_1 + \lambda_4 k_2\,,$$

also gleich

$$\delta = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Man hat andererseits zwischen zwei Erzeugenden x_i x_k die Beziehung:

$$\varrho_i \varrho_k (x_i x_k) = (\lambda_i - \lambda_k)^2,$$

woraus, wie schon in § II. gefunden wurde:

$$\delta = \sqrt{\frac{(x_1 x_3)}{(x_2 x_3)} : \frac{(x_1 x_4)}{(x_2 x_4)}}.$$

Infolge der Gleichungen (1), (2), (3) ist ferner durch die Gleichungen

$$(4) \qquad \varepsilon z_i' = x_i - \varrho' y_i = a_i - \varrho' \alpha_i + (b_i - \varrho' \beta_i)\lambda + (c_i - \varrho' \gamma_i)\lambda^2$$

ein Hyperboloid gegeben, dessen Erzeugende zweiter Art durch

$$(5) \qquad \varepsilon z_i'' = x_i - \varrho'' y_i = a_i - \varrho'' \alpha_i + (b_i - \varrho'' \beta_i)\mu + (c_i - \varrho'' \gamma_i)\mu^2$$

bestimmt sind, wenn zwischen den Parametern $\varrho' \varrho''$ die Gleichung

$$(6) \qquad \varrho' \varrho'' = -\frac{(ac)}{(\alpha\gamma)} = -\frac{(b^2)}{(\beta^2)}$$

stattfindet.

Durch eine Gleichung zwischen λ und μ, etwa $f(\lambda\mu) = 0$, werden die Erzeugenden erster und zweiter Art auf eine gewisse Weise mit einander in Beziehung gesetzt. Ist dieselbe vom Grade m_1 in Bezug auf λ, vom Grade m_2 in Bezug auf μ, so schneiden sich die zugehörigen Erzeugenden in einer Curve $m_1 + m_2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche jeder Erzeugenden erster Art in m_2, jeder von der zweiten Art in m_1 Punkten begegnet. Den Discriminanten von f in Bezug auf $\mu\lambda$, welche in Bezug auf diese Grössen von den Graden $2m_1(m_2 - 1)$, $2m_1(m_2 - 1)$ sind, entsprechend, wird jede dieser Curven $2m_1(m_2 - 1)$ Erzeugenden erster, $2m_2(m_1 - 1)$ zweiter Art berühren.

Eine bilineare Beziehung zwischen λ, μ stellt daher einen auf dem

Hyperboloide gelegenen Kegelschnitt vor. Setzt man insbesondere $\lambda = \mu$, so stellen die Gleichungen (4), (5) eine einfach unendliche Schaar von Hyperboloiden vor, welche das gegebene in dem Kegelschnitte $\lambda = \mu$ berühren. Für jedes Hyperboloid hat dabei das Doppelverhältniss dieser beiden Erzeugenden, die von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes auslaufen, zu den entsprechenden Erzeugenden des gegebenen den constanten Werth

$$\delta = \frac{\varrho'}{\varrho''}.$$

Für den besonderen Werth $\varrho'^2 = -\frac{(b^2)}{(\beta^2)}$ geben die Gleichungen (4), (5) die Gleichung des Berührungskegelschnittes, sowie die des längs desselben berührenden Kegels.

B. Windschiefe Flächen dritten Grades.

Für dieselben ist

$$\varrho x_i = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i,$$
$$(a^2) = 0, \quad (ab) = 0, \quad (d^2) = 0, \quad (dc) = 0,$$
$$(b^2) + 2(ac) = 0, \qquad (c^2) + 2(bd) = 0,$$
$$(ad) + (bc) = 0.$$

Die Fläche hat zwei singuläre Erzeugende, bestimmt durch die Gleichung

$$(b^2) + 4(bc)\lambda + \lambda^2(4(c^2) + 6(bd)) = 0.$$

Dieselben coincidiren, wenn die Discriminante

$$4(bc)^2 - (b^2)(d^2)$$

verschwindet. Diesen Fall ausgeschlossen, kann man den Parameter λ so gewählt denken, dass die Werthe $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ die singulären Erzeugenden selbst darstellen. Unter dieser Voraussetzung bestehen die Identitäten

$$(a^2)=0, \quad (ab)=0, \quad (b^2)=0, \quad (d^2)=0, \quad (bd)=0, \quad (dc)=0, \quad (ac)=0,$$
$$(ad) + (bc) = 0.$$

Die Fläche gehört unendlich vielen linearen Complexen an, deren Coefficienten γ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(\gamma a) = 0, \quad (\gamma b) = 0, \quad (\gamma c) = 0, \quad (\gamma d) = 0.$$

Der Voraussetzung $4(bc)^2 - (b^2)(d^2) \lesseqgtr 0$ entsprechend befinden sich unter ihnen immer zwei verschiedene specielle, deren Axen durch γ', γ'' bezeichnet werden mögen. Dieselben bilden zwei Leitlinien der Fläche, von denen die eine einfach, die andere doppelt ist. Die Fläche ist auf ein Tetraeder bezogen, dessen Kanten, zu gegenüberliegenden Paaren geordnet, ad, bc, $\gamma'\gamma''$ sind. Die Kante γ', welche durch den Schnitt von ab, cd geht, ist die Doppelgerade der Fläche.

Die Gleichung $\Psi\lambda\lambda' = 0$ des § XI. (5) nimmt die Form $\lambda + \lambda_1 = 0$ an. Je zwei Parameterwerthe λ und $-\lambda$ bestimmen daher Erzeugende, die sich in einem Punkte von γ' schneiden. Bezeichnet man ihre Coordinaten durch x, x', so ist $x + \varrho x'$ ein beliebiger Strahl des Büschels xx'. Soll derselbe gleichzeitig a und c schneiden, so ist $1 - \varrho = 0$ zu setzen, während dem Strahle, welcher b und d schneidet $1 + \varrho = 0$ entspricht. Es ist damit der folgende Satz bewiesen:

Die beiden Erzeugenden, welche sich in einem Punkte der Doppelgeraden kreuzen, schneiden die einfache Leitlinie in zwei Punkten, die harmonisch sind zu den Punkten, in denen die letztere von den singulären Erzeugenden getroffen wird.

Man hat ferner:

$$\begin{aligned} \varrho a_x &= (ad)\lambda^3 , \\ \varrho b_x &= (bc)\lambda^2 , \\ \varrho c_x &= (bc)\lambda , \\ \varrho d_x &= (ad) . \end{aligned}$$

Es ist daher

$$a_x d_x - b_x c_x = 0 .$$

Die Fläche gehört also nach § I. *einem speciellen Reye'schen Complexe an.*

Die Haupttangenten derselben sind ferner bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3a_y + \lambda b_y &= 0 , \\ b_y + \lambda c_y &= 0 , \\ c_y + 3\lambda d_y &= 0 . \end{aligned}$$

Schreibt man dieselben in der Form

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_y &= -\lambda^3 , \\ b_y &= 3\lambda^2 , \\ c_y &= -3\lambda , \\ d_y &= 1 . \end{aligned} \right.$$

so ist

$$9\, a_y d_y - b_y c_y = 0 .$$

Die Haupttangenten der Fläche schneiden also das durch die Fundamentalcomplexe gebildete Tetraeder in constantem Doppelverhältniss.

Die Gleichung einer beliebigen Haupttangentencurve erhält man nach XII. (5), indem man den Gleichungen (7) die folgenden

$$\begin{aligned} \gamma_y' &= -\varrho\omega , \\ \gamma_y'' &= \omega , \\ (\gamma^2) &= 0 \end{aligned}$$

hinzufügt. Den Werthen

$$\Delta' = (bc)^4,$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda^3 & 3\lambda^2 & -3\lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & (ad) \\ 3\lambda^2 & 0 & 0 & (bc) & 0 \\ -3\lambda & 0 & (bc) & 0 & 0 \\ 1 & (ad) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16\,(bc)^3\,\lambda^3$$

entsprechend hat man daher

$$\varrho\,\omega^2 = -\,8\,\frac{(\gamma'\gamma'')}{(bc)}\,\lambda^3. \tag{8}$$

Unter Voraussetzung dieses Werthes von ω sind die y die Unterdeterminanten nach μ_i der folgenden Determinante:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & -\lambda^3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & 3\lambda^2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & -3\lambda^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & 1 \\ \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' & \gamma_4' & \gamma_5' & \gamma_6' & -\varrho\omega \\ \gamma_1'' & \gamma_2'' & \gamma_3'' & \gamma_4'' & \gamma_5'' & \gamma_6'' & \omega \end{vmatrix},$$

so dass:

$$y_i \equiv \frac{\partial\Omega}{\partial\mu_i}. \tag{9}$$

Die Determinante Ω reducirt man durch Multiplication mit

$$(a\,b\,c\,d\,\gamma'\,\gamma'') = (\gamma'\gamma'')\,(bc)^2.$$

Dadurch entsteht:

$$\Omega \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\mu a) & (\mu b) & (\mu c) & (\mu d) & (\mu\gamma') & (\mu\gamma'') \\ -\lambda^3 & 0 & 0 & 0 & (ad) & 0 & 0 \\ 3\lambda^2 & 0 & 0 & (bc) & 0 & 0 & 0 \\ -3\lambda & 0 & (bc) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (ad) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\varrho\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma'\gamma'') \\ \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma'\gamma'') & 0 \end{vmatrix},$$

oder:

$$\Omega = [(\mu\gamma') - \varrho(\mu\gamma'')]\,\omega(bc) - (\gamma'\gamma'')\,[\lambda^3(\mu d) + 3\lambda^2(\mu c) - 3\lambda(\mu b) - (\mu a)].$$

Es ist demnach:

$$y_i = (\gamma_i' - \gamma_i''\varrho)\,\omega\,(bc) - (\gamma'\gamma'')\,[\lambda^3 d_i + 3\lambda^2 c_i - 3\lambda b_i - a_i].$$

Setzt man endlich:

$$\lambda = \lambda_1^2,$$

so wird

$$\omega = 2\lambda_1^3 \sqrt{\frac{-2(\gamma'\gamma'')}{\varrho(bc)}} = 2\lambda_1^3\Theta$$

und demgemäss

(10) $$y_i = (\gamma_i' - \varrho\gamma_i'')\Theta\lambda_1^3 - (\gamma,\gamma_{,,})[\lambda_1^6 d_i + 3\lambda_1^4 c_i - 3\lambda_1^2 b_i - a_i] = \psi_i .$$

Damit sind die sämmtlichen Tangenten derjenigen Haupttangentencurve, welche dem Parameter ϱ entspricht, als rationale Functionen sechsten Grades ausgedrückt. Zu jeder Erzeugenden der windschiefen Fläche gehören zwei Tangenten der Curve, diejenigen, welche den Werthen λ_1 und $-\lambda_1$ entsprechen. Man kann sich auch leicht davon überzeugen, dass die Function ψ den folgenden Bedingungen:

$$(\psi^2) = 0, \quad \left(\frac{\partial\psi^2}{\partial\lambda}\right) = 0, \quad (\varphi\psi) = 0, \quad \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = 0, \quad \left(\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = 0$$

genügt. In der Gleichung (10) der developpabeln Fläche der Tangenten der Haupttangentencurve treten λ_1^5 und λ_1 nicht auf. Die Tangenten, welche den Werthen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \infty$ entsprechen, sind daher Rückkehrgeneratricen der developpabeln, d. h. stationäre Tangenten der Haupttangentencurve.

*Die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen dritter Ordnung sind daher rationale Curven vierter Ordnung und Classe sechsten Ranges mit zwei stationären Tangenten, welche mit den singulären Erzeugenden der Fläche coincidiren**).

Zugeordnet im Sinne des § XIII. sind der Developpabeln (10) unendlich viele Flächen *vierter* Ordnung:

(11) $$\varrho z_i = \frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_1} + k\frac{\partial\psi_i}{\partial\mu_1},$$

wo

$$z_i' = \frac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_1} = -(\gamma'\gamma'')[\lambda_1^4 d_i + 2\lambda_1^2 c_i - b_i] + (\gamma_i' - \gamma_i''\varrho)\lambda_1\Theta,$$

$$z_i'' = \frac{\partial\psi_i}{\partial\mu_1} = -(\gamma'\gamma'')[\lambda_1^4 c_i - 2\lambda_1^2 b_i - a_i] + (\gamma_i' - \gamma_i''\varrho)\lambda_1^3\Theta.$$

Die beiden besonderen Flächen $z'z''$ entstehen, wenn man durch jeden Punkt der Haupttangentencurve in der Schmiegungsebene derselben die beiden Geraden zieht, welche die beiden singulären Erzeugenden der windschiefen Fläche schneiden. Der Beweis dafür ist in den beiden Gleichungen

$$(dz') = 0,$$
$$(az'') = 0$$

enthalten.

---

*) Vgl. Clebsch, Ueber die Steiner'sche Fläche Crelle's Journal Bd. 67. Der rationale Charakter der Haupttangentencurven ist übrigens eine unmittelbare Folge davon, dass die Discriminante $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\Psi\lambda\lambda)^3}$ (§ XII.) als Radical nur eine rationale Function zweiten Grades, d. h. *keine wesentliche Irrationalität enthält.*

Die Flächen z bilden ein Büschel von windschiefen Flächen vierter Ordnung, welches eine sehr merkwürdige Beziehung zur Fläche dritter Ordnung besitzt. Jede dieser Flächen nämlich hat eine Doppelerzeugende, welche den Werthen

$$\lambda_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{-k}}$$

entspricht. Alle Doppelerzeugenden dieser Art bilden eine Fläche, deren Erzeugende t_i man erhält, wenn man in (11) an Stelle von λ_1 diesen Werth substituirt. Es ist daher

$$\varrho t_i = d_i - k c_i + k^2 b_i - k^3 a_i .$$

Die von den Doppelerzeugenden gebildete Fläche ist daher identisch mit der gegebenen windschiefen Fläche dritter Ordnung. Jede der Flächen z gehört ferner unendlich vielen linearen Complexen an, welche zwei zusammenfallende Directricen besitzen. Die Coordinaten der letzteren sind, wie man leicht sieht:

$$\varrho u_i = d_i + k c_i + k^2 b_i + k^3 a_i .$$

Sie gehören also ebenfalls der nämlichen Fläche dritter Ordnung an. t und u sind conjugirte Erzeugende derselben, welche sich in einem Punkte der Doppelgeraden kreuzen. Wir fassen diese Bemerkungen in dem folgenden Satze zusammen:

Alle durch (11) *dargestellten windschiefen Flächen vierter Ordnung besitzen also lauter algebraische Haupttangentencurven vierter Ordnung und Classe sechsten Ranges vom Geschlechte Null. Jede Fläche hat eine der Erzeugenden der windschiefen Fläche dritter Ordnung zur Doppelgeneratrix und die ihr conjugirte zur Leitlinie, welche als Vereinigung von zwei Doppelgeraden aufzufassen ist.* Für die beiden Flächen $k=0$, $k=\infty$ wird die Doppelgeneratrix zur Rückkehrgeneratrix.

Wir haben jetzt noch den Fall zu untersuchen, in welchem die windschiefe Fläche zusammenfallende singuläre Erzeugende besitzt. Unter der Voraussetzung

$$\frac{4}{3}(bc)^2 - (b^2)(c^2) = 0$$

fallen aber die beiden Geraden γ', γ'' ebenfalls zusammen. *Die Fläche gehört also einem Büschel linearer Complexe mit zwei unendlich nahen Leitlinien, von denen eine doppelt ist, an.* Wählen wir den Parameter λ so, dass $\lambda = 0$ der singulären Erzeugenden entspricht, so ist zu setzen:

$$(ac)=0,\ (bc)=0,\ (cd)=0,\ (ab)=0,\ (a^2)=0,\ (b^2)=0,\ (d^2)=0,$$
$$(c^2)+2(bd)=0.$$

Die Fläche gehört insbesondere dem speciellen Complexe mit der Axe a an, welche gleichzeitig singuläre Erzeugende und Doppellinie

ist. Die Gerade a mag die *Axe* der (Cayley'schen Linienfläche, genannt werden. Man hat ferner:

$$\begin{aligned} \varrho a_x &= 0 , \\ \varrho b_x &= (bd)\,\lambda^3 , \\ \varrho c_x &= (c^2)\,\lambda^2 , \\ \varrho d_x &= (bd)\,\lambda . \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$4\,b_x d_x - c_x^2 = 0 .$$

Die sämmtlichen Erzeugenden der Fläche gehören also einem Complexe zweiten Grades an. Da derselbe ein specieller ist, so folgt weiter: *Alle Erzeugenden der Fläche sind Tangenten eines Hyperboloides.* Die Erzeugenden des letzteren sind dargestellt durch durch

$$\varrho z_i = b_i + \lambda c_i + d_i \lambda^2 .$$

Man erhält die Gleichung derjenigen developpabeln Flächen, welche zu Rückkehrcurven die Haupttangentencurven der Fläche haben, wenn man nach den Vorschriften des § XII. die y als rationale Functionen von λ ausdrückt. Indessen ist es überflüssig, diese Rechnung selbst durchzuführen. Die Theorie der abwickelbaren Flächen vierter Ordnung zeigt nämlich, dass die Gleichungen

$$\varrho y_i = \frac{a_i}{4} + \frac{b_i}{3}\lambda + \frac{c_i}{2}\lambda^2 + d_i\lambda^3 + k_i\lambda^4 , \tag{12}$$

in denen k einen Parameter vorstellt, welcher den Bedingungen

$$\begin{cases} (k^2) = 0 , \quad (kd) = 0 , \quad (kc) = 0 , \quad (kb) = 0 , \\ 3\,(ka) + (bd) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

zu genügen hat, alle Haupttangentencurven der Fläche repräsentiren. In der That kann man leicht verificiren, dass vermöge der Gleichungen (13) die Fläche (12) abwickelbar ist und jede ihrer Erzeugenden drei consecutive der Cayley'schen Fläche schneidet. *Die Haupttangentencurven sind also vom vierten Range, dritter Ordnung und Classe*, wie das auch aus den allgemeinen Formeln des § XII. hervorgeht, es sind Raumcurven dritter Ordnung*).

Zugeordnet sind ferner der Developpabeln (12) alle windschiefen Flächen

$$z_i = \left(ka_i + \frac{b_i}{3}\right) + (kb_i + c_i)\lambda + (kc_i + 3d_i)\lambda^2 + (kd_i + 4k_i)\lambda^3 .$$

Da für jede derselben (12) eine Haupttangentencurve ist, so sind alle Flächen z ebenfalls Cayley'sche Linienflächen dritter Ordnung. Ihre Axen sind durch den Ausdruck

*) Vgl. die schon citirte Arbeit von Clebsch Crelle's Journal Bd. 67.

$$t_i = \frac{a_i}{4} + \frac{b_i}{3}k + \frac{c_i}{2}k^2 + d_i k^3 + k_i k^4$$

gegeben, welcher mit der rechten Seite der Gleichungen (12) identisch ist. Man hat daher den folgenden Satz:

Die Haupttangentencurven der Cayley'schen Fläche dritter Ordnung werden von den Axen zweifach unendlich vieler anderer Cayley'scher Flächen dritter Ordnung gebildet, welche mit der gegebenen je eine Haupttangentencurve gemein haben.

Andere specielle windschiefe Flächen dritten Grades existiren nicht. Denn die Bedingung, dass die durch den Ausdruck

$$\varrho x_i = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i$$

dargestellte Fläche eine Doppelgeneratrix erhalte oder abwickelbar sei, führt auf das Verschwinden sämmtlicher Invarianten der Fundamentalcomplexe, d. h. auf Kegel oder ebene Curven.

C. Windschiefe Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Null.

Ihre Erzeugenden sind gegeben durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = a_i + b_i\lambda + c_i\lambda^2 + d_i\lambda^3 + e_i\lambda^4$$

unter Voraussetzung der Bedingungen:

$$(14)\qquad \begin{cases} (a^2) = 0\,, \quad (ba) = 0\,, \quad (e^2) = 0\,, \quad (de) = 0\,, \\ 2\,(ac) + (b^2) = 0\,, \qquad 2\,(ce) + (d^2) = 0\,, \\ (ad) + (bc) = 0\,, \qquad (be) + (cd) = 0\,, \\ 2\,(ac) + (c^2) + 2\,(bd) = 0\,. \end{cases}$$

Die windschiefen Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Null gehören immer einem linearen Complexe γ_x an, dessen Coefficienten γ bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$(\gamma a) = 0\,, \quad (\gamma b) = 0\,, \quad (\gamma c) = 0\,, \quad (\gamma d) = 0\,, \quad (\gamma e) = 0\,.$$

Sie enthalten daher im Allgemeinen eine algebraische Haupttangentencurve sechster Ordnung und Classe, zwölften Ranges mit zwölf stationären Tangenten vom Geschlechte Eins. Von den stationären Tangenten gehören vier den Cuspidalpunkten der Fläche an, während die anderen acht durch die Punkte der Fläche hindurchgehen, in denen ihre Erzeugenden von der Curve vierpunktiger Berührung berührt werden. Diese letztere ist vom achten Grade, vierundzwanzigsten Ranges vom Geschlechte Drei u. s. w.; sie kann zugleich angesehen werden als die vierfach zu zählende Berührungscurve der Linienfläche der vierpunktigen Tangenten, deren Grad ebenfalls acht ist. Die Doppelcurve der Fläche ist die Raumcurve dritter Ordnung, welche acht Erzeugende berührt. Die drei Doppelebenen der Fläche, welche von drei willkührlichen Punkten der Doppelcurve auslaufen, schneiden sich in demjenigen

Punkte der durch jene drei bestimmten Ebene, welcher das Centrum des in der letzteren liegenden dem Complexe γ angehörenden Büschels ist*). Jede Erzeugende bestimmt mit den vier Cuspidalpunkten der Fläche vier Ebenen, deren Doppelverhältniss dasselbe ist, wie das der vier Punkte, in denen sie selbst von den parabolischen Ebenen der Fläche getroffen wird.

Die Parameter λ_1 λ_2 zweier Erzeugenden x, y, welche sich in einem Punkte der Doppelcurve kreuzen, sind durch die Gleichung

$$\Psi(\lambda_1 \lambda_2) = 0$$

oder:

$$(15)\quad (ac)+(ad)(\lambda_1+\lambda_2)+(ae)(\lambda_1+\lambda_2)^2+(bd)\lambda_1\lambda_2+(be)\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) +(ce)\lambda_1^2\lambda_2^2=0$$

verbunden. Wir bezeichnen (15) als Gleichung der Doppelcurve. Die singulären Erzeugenden sind durch die Gleichung

$$(16)\quad \Psi\lambda\lambda=(ac)+2(ad)\lambda+4(ae)\lambda^2+2(be)\lambda^3+(bd)\lambda^2+(ce)\lambda^4=0$$

gegeben, deren linke Seite zugleich das Geschlecht der Haupttangentencurve charakterisirt. Man wird im Allgemeinen annehmen können, dass die Werthe $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ sich auf singuläre Erzeugende beziehen. Es treten dann zu den Gleichungen (14) noch die folgenden:

$$(17)\quad \begin{cases} (ac) = 0\,, & (ce) = 0\,, \\ (b^2) = 0\,, & (d^2) = 0\,. \end{cases}$$

Es können aber von den singulären Erzeugenden auch einige oder alle zusammenfallen.

Die Erzeugende $\lambda = 0$ zählt für zwei singuläre, wenn

$$(ad) = 0\,,\quad (ac) = 0\,,\quad (ce) = 0\,,$$
$$(b^2) = 0\,,\quad (bc) = 0\,,\quad (d^2) = 0\,.$$

Treten zu diesen Gleichungen noch die folgenden

$$(be) = 0\,,\quad (cd) = 0\,,$$

so gilt auch $\lambda = \infty$ für zwei singuläre Erzeugende.

Die Erzeugende $\lambda = 0$ wird dagegen dreifach zu rechnen sein, wenn

$$(ac) = 0\,,\quad (bd) = 0\,,\quad 4\,(ae) + (bd) = 0\,,$$
$$(b^2) = 0\,,\quad (bc) = 0\,,\quad 2\,(c^2) + (bd) = 0\,.$$

Sie kann endlich vierfach zählen, wenn

$$(ac) = 0\,,\quad (ad) = 0\,,\quad 4\,(ae) + (bd) = 0\,,\quad (be) = 0\,,$$
$$(b^2) = 0\,,\quad (bc) = 0\,,\quad 2\,(c^2) + (bd) = 0\,,\quad (cd) = 0\,.$$

---

*) Es ist dies nur ein specieller Fall eines allgemeineren Theorems, welches für jede einem linearen Complexe angehörige windschiefe Fläche gilt.

In den letzteren Fällen ist die Haupttangentencurve immer vom Geschlechte Null. Der lineare Complex, welchem die Fläche angehört, geht in keinem derselben in einen speciellen über. Eigentliche windschiefe Flächen der letzteren Art mit vier zusammenfallenden singulären Erzeugenden, welche einem speciellen linearen Complexe angehören, giebt es überhaupt nicht. Denn es wäre dann der letzten Reihe von Gleichungen noch $(ae)=0$ hinzuzufügen, womit zugleich die Fläche in einen Kegel oder in eine ebene Curve degenerirt. Wir werden daher ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit zwei discrete singuläre Erzeugende voraussetzen dürfen, denen die Parameter $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ entsprechen.

An den Umstand, dass die Fläche immer einem linearen Complex angehört, kann man nun eine Classification derselben anknüpfen, welche, wie wir jetzt zeigen wollen, zu den nämlichen Resultaten führt, wie die Untersuchung, welche Herr Cremona über die verschiedenen Arten der windschiefen Flächen vierter Ordnung angestellt hat*).

In der That gehören alle Flächen vierter Ordnung $p=0$, für welche der lineare Complex ein allgemeiner ist, zur ersten Classe von Cremona. Die Fläche wird dagegen einem speciellen linearen Complex angehören, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & (ac) & (ad) & (ae) \\ (ab) & (b^2) & (bc) & (bd) & (be) \\ (ac) & (cb) & (c^2) & (cd) & (ce) \\ (ad) & (db) & (dc) & (d^2) & (de) \\ (ae) & (be) & (ec) & (ed) & (e^2) \end{vmatrix}$$

verschwindet. Unter Berücksichtigung von (14) und (17) geht dieselbe über in:

$$(bd)\,[(ad)\,(be) - (ae)\,(bd)]\,[2\,(ad)\,(be) + (c^2)\,(ae)]\,. \tag{18}$$

Die Gleichung der Doppelcurve enthält die Grössen $\lambda_1\,\lambda_2$ nur in den Verbindungen $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2$. Sie wird daher in zwei lineare Factoren zerfallen, wenn ihre Determinante

$$\begin{vmatrix} 2(ac) & (ad) & (bd) \\ (ad) & 2(ac) & (be) \\ (bd) & (be) & 2(ec) \end{vmatrix} = 0\,,$$

oder

$$(bd)\,[(ad)\,(be) - (ae)\,(bd)] = 0 \tag{19}$$

ist.

---

*) Cremona, Sulle superficie gobbe di quarto ordine A. dell' accademia di Bologna t. VIII.

Unter Voraussetzung von (19) zerfällt offenbar die Doppelcurve in zwei Gebilde niederer Ordnung. Die Gleichung (18) zeigt, dass die Fläche in diesem Falle immer eine Leitlinie, die Axe des Complexes γ_x besitzt. Die Doppelcurve zerfällt daher in die Doppelgerade γ und einen Doppelkegelschnitt. Es mag die Bemerkung hinzugefügt werden, dass die Doppelcurve sich auch in niedere Gebilde auflösen kann, ohne dass die Gleichung (15) sich in lineare Factoren spaltet. Ihre Theile bestehen dann aber immer aus algebraisch gleichwerthigen Gebilden, d. h. aus einzelnen Doppelgeraden.

Wir betrachten zunächst den Fall $(bd) = 0$. Die Gleichung der Doppelcurve ist dann

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\,[(ad) + (ae)\,(\lambda_1 + \lambda_2) + be\,(\lambda_1\lambda_2)] = 0\,.$$

Die Parameter einer Erzeugenden, die sich in einem Punkte der Doppelcurve kreuzen, sind daher bestimmt durch die Gleichungen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0\,,$$
$$(ad) + (ae)\,(\lambda_1 + \lambda_2) + (be)\,\lambda_1\lambda_2 = 0\,.$$

Von denselben bezieht sich die erstere auf die Doppelgerade der Fläche. Denn zwei Erzeugende $x'\,x''$ mit den Parametern λ und $-\lambda$:

$$\varrho_1 x_i' = a_i + \lambda b_i + \lambda^2 c_i + \lambda^3 d_i + \lambda^4 e_i\,,$$
$$\varrho_2 x_i'' = a_i - \lambda b_i + \lambda^2 c_i - \lambda^3 d_i + \lambda^4 e_i$$

geben

$$\varrho_1 x_i' - \varrho_2 x_i'' = 2\,\lambda\,(b_i + \lambda^2 d_i) \equiv b_i + \mu\, d_i\,. \tag{20}$$

Die Fläche selbst ist auf vier gerade Linien $a\ b\ e\ d$ bezogen, von denen ab, bd, de sich in den Punkten O, O'', O' schneiden. Die Gleichung (20) zeigt, dass in jeder Doppelebene, welche zur Doppelcurve $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ gehört, ein Strahl liegt, welcher dem Strahlbüschel bd angehört, also durch den festen Punkt O'' geht. Diese Doppelebenen hüllen also einen Kegel zweiten Grades mit der Spitze O'' ein, eine Eigenschaft, welche die Doppelgerade charakterisirt. Die Gerade $O\,O'$ ist ferner die Axe des speciellen Complexes, dem die Fläche angehört, stellt also die Doppelgerade selbst dar. Sie ist zugleich die Axe der Doppelebenen, welche von den Punkten des Doppelkegelschnittes auslaufen. Die Punkte O, O' sind zwei Cuspidalpunkte der Fläche.

Die Ebene des Doppelkegelschnittes ist bestimmt durch die beiden anderen Cuspidalpunkte, welche aus der Gleichung

$$(ad) + 2\,(ae)\,\lambda + (be)\,\lambda^2 = 0$$

gefunden werden, und den Punkt, in welchem derselbe die Doppelgerade $O\ O'$ schneidet. Der letztere ist dadurch charakterisirt, dass von ihm zwei Erzeugende auslaufen, deren Ebene durch die Doppel-

gerade selbst geht. Man bestimmt die Parameter dieser beiden Erzeugenden, indem man in der Gleichung

$$(ad) + (ae)(\lambda_1 + \lambda_2) + (be)\lambda_1\lambda_2 = 0$$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ setzt, und erhält

$$\lambda^2 = \frac{(ad)}{(be)},$$

also

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{(ad)}{(be)}}.$$

Im zweiten Falle

$$(ad)(be) - (ae)(bd) = 0$$

löst sich die Gleichung der Doppelcurve in die beiden Factoren

$$(21) \qquad \begin{cases} (ab)(\lambda_1 + \lambda_2) + (be)\lambda_1\lambda_2 = 0, \\ (bd) + (be)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

auf. Der zweite Factor stellt wiederum die Doppelgerade vor. Bildet man nämlich den Ausdruck

$$\varrho_1 x_i' - \varrho_2 x_i'' = b_i + c_i(\lambda_1+\lambda_2) + d_i\left((\lambda_1+\lambda_2)^2 - 3\lambda_1\lambda_2\right) + e_i(\lambda_1+\lambda_2)\left((\lambda_1+\lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2\right),$$

so ergiebt sich sofort, dass rechterhand nur eine lineare Function von $\lambda_1\lambda_2$ vorhanden ist, da $\lambda_1 + \lambda_2$ durch eine Constante ersetzt werden kann (21). Man kann daher schreiben:

$$\varrho_1 x_i' - \varrho_2 x_i'' = \alpha_i + \beta_i\lambda_1\lambda_2 .$$

Der Durchschnittspunkt der beiden Geraden α, β ist daher wieder die Spitze eines Kegels, der von den Doppelebenen gebildet wird, die von der Doppelgeraden:

$$(bd) + (be)(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

auslaufen. Doppelgerade und Doppelkegelschnitt haben auch hier einen Punkt gemein, dessen Erzeugende durch das System von Werthen $\lambda_1\lambda_2$ dargestellt sind, welches die beiden Gleichungen (21) befriedigt.

Die Gleichung (19) *charakterisirt daher die Flächen der zweiten Classe von Cremona.*

Wenn endlich in (18)

$$2(ad)(be) + (c^2)(ae) = 0,$$

so gehört die Fläche einem speciellen linearen Complexe an, während die Doppelcurve nicht in ungleichartige Gebilde zerfällt. Es ist dann entweder eine einfache Leitlinie γ vorhanden, und die Doppelcurve eine Raumcurve dritten Grades, während die Doppelebenen ein dreifaches Ebenenbüschel mit der Axe γ bilden — Cremona VII — oder die Leitlinie ist dreifach und die Doppeldeveloppable eine Fläche dritter Classe — Cremona VIII —. Beide Fälle stehen sich dualistisch in der folgenden Weise gegenüber. Im ersten liegen immer

je drei Erzeugende in einer durch die Leitlinie gehenden Ebene, im zweiten gehen sie durch einen gemeinschaftlichen, auf jener Leitlinie liegenden Punkt.

Die Axe des speciellen Complexes kann endlich eine Erzeugende der Fläche sein. Unter der Voraussetzung, dass $\lambda = 0$ dieselbe darstelle, hat man dann die Bedingungen:

$$(a^2) = 0\,, \quad (ab) = 0\,, \quad (ac) = 0\,, \quad (ad) = 0\,, \quad (ae) = 0\,,$$
$$(e^2) = 0\,, \quad (de) = 0\,, \quad (b^2) = 0\,, \quad (bc) = 0\,,$$
$$2\,(bd) + (c^2) = 0\,, \quad (d^2) = 0\,, \quad (ce) = 0\,.$$

Die Gleichung der Doppelcurve ist dann

$$(bd) + (be)\,(\lambda_1 + \lambda_2) = 0\,,$$

während zwei der singulären Erzeugenden mit der Erzeugenden a coincidiren.

Je zwei Erzeugende, die sich in einem Punkte der Doppelcurve schneiden, liegen dann entweder mit a in einer Ebene, die Doppeldeveloppable besteht aus dem dreifachen Ebenenbüschel a, oder je zwei Erzeugende dieser Art gehen durch einen Punkt von a, die Doppelcurve besteht dann aus der dreifach zählenden Geraden a, während die Doppeldeveloppable ein Kegel zweiten Grades ist, zu welchem ein Ebenenbüschel durch a hinzu zu rechnen ist. Es sind dies die Fälle, welche bei Cremona durch III und IV bezeichnet sind. Die windschiefen Flächen vierter Ordnung $p = 0$ können auch unendlich vielen linearen Complexen angehören. Dazu ist erforderlich, dass einer der Coefficienten der Gleichung (14) eine lineare Combination der anderen vier ist. In allen diesen Fällen hat die Fläche zwei Leitgerade, alle Haupttangentencurven sind algebraische Curven, deren Tangenten sich im Allgemeinen rational durch elliptische Functionen ausdrücken lassen. Es ergeben sich nun die folgenden Fälle:

1) *Die Fläche hat eine Doppel- oder Rückkehrgeneratrix.* Um die Doppelgeneratrix in Evidenz treten zu lassen, nehmen wir an, dass die Parameter $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ sich auf dieselbe beziehen. Die Gleichung der Fläche ist dann:

$$\varrho x_i = a_i + b_i\lambda + c_i\lambda^2 + d_i\lambda^3 + a_i\lambda^4\,,$$

während:

$$(a^2) = 0\,, \quad (ab) = 0\,, \quad (cd) = 0\,, \quad (ad) = 0\,, \quad (bc) = 0\,,$$
$$(b^2) + 2\,(ac) = 0\,,$$
$$(c^2) + 2\,(bd) = 0\,,$$
$$(d^2) + 2\,(ac) = 0\,.$$

Die beiden Leitlinien $\gamma'\ \gamma''$, welche die Doppelcurve vertreten, sind bestimmt durch

(22) $(\gamma^2) = 0\,, \quad (\gamma a) = 0\,, \quad (\gamma b) = 0\,, \quad (\gamma c) = 0\,, \quad (\gamma d) = 0\,.$

Beide sind discrete Doppellinien der Fläche, so lange die Determinante von (22) nicht verschwindet. Die Fläche hat vier Cuspidalpunkte, bestimmt durch die Gleichung:

$$\Psi\lambda\lambda = ac\,(1 + \lambda^4) + (bd)\,\lambda^2 = 0\,.$$

Den Rang der Haupttangentencurven bestimmt man durch die Zahl ihrer Tangenten, welche eine willhührliche Gerade z schneiden, d. h. indem man das Eliminationsresultat der Gleichungen

$$\left(y\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right) = 0\,, \quad \left(y\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right) = 0\,, \quad \left(y\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}\right) = 0\,,$$
$$(yz) = 0\,, \quad y\gamma' + \varrho\,(y\gamma'') = 0,$$
$$(y^2) = 0$$

bildet. Man erhält damit eine Controle für die Formeln des § XII., welche ebenfalls den Rang bestimmen. Es ergiebt sich so:

Die Haupttangentencurven auf den windschiefen Flächen $p = 0$ mit Doppelgeneratrix sind vom Geschlechte Eins, sechster Ordnung und Classe, zwölften Ranges, mit zwölf stationären Tangenten, von denen vier in die Cuspidalpunkte der Fläche fallen. Die Fläche hat daher vier hyperbolische Erzeugende.

Die Parameter der letzteren bestimmt man auf folgende Weise. Damit die Gleichungen:

$$\left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^3}\right)=0, \quad \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\lambda^2\,\partial\mu}\right)=0, \quad \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^2\,\partial\lambda}\right)=0, \quad \left(y\,\frac{\partial^3\varphi}{\partial\mu^3}\right)=0, \quad (y^2)=0,$$

oder

(23) $4a_y+\lambda b_y=0, \quad 3b_y+2c_y\lambda=0, \quad 2c_y+3\lambda d_y=0, \quad d_y+4a_y\lambda=0$

unendlich viele Werthe von y zulassen, müssen die sechs Gleichungen:

$$\mu_1(4a_i+b_i\lambda)+\mu_2(3b_i+2c_i\lambda)+\mu_3(2c_i+3\lambda d_i)+\mu_4(d_i+4a_i\lambda)=0$$

bestehen können. Dies führt auf das Verschwinden einer Determinante von vier homogenen Gleichungen für die Coefficienten μ, welche man erhält, wenn man die letzteren Gleichungen mit $a_i\,b_i\,c_i\,d_i$ multiplicirt und nach i summirt, d. h. auf die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 & 0 \\ (b^2)\lambda & 3(b^2) & 3(bd)\lambda & (bd) \\ 4(ac) & 2(c^2)\lambda & 2(c^2) & 4(ac)\lambda \\ (bd)\lambda & 3(bd) & 3(d^2)\lambda & (d^2) \end{vmatrix} = 0\,,$$

welche reducirt die Gleichung

$$\lambda^4 = 1$$

liefert. Es ist übrigens von vornherein evident, dass die Gleichungen (23) für die Werthe

$$\lambda = \pm 1, \quad \lambda = \pm i$$

nur drei von einander wesentlich verschiedene darstellen. *Diese Flächen bilden die fünfte Classe von Cremona.*

Von den Flächen der fünften Cremona'schen Classe sind nicht wesentlich diejenigen verschieden, welche eine Rückkehrgeneratrix und zwei discrete Leitlinien besitzen. Aber in Ansehung der Haupttangentencurven und der hyperbolischen Erzeugenden zeigen dieselben ganz andere Eigenschaften, wie wir jetzt nachweisen werden.

Die Gleichung der Flächen mit Rückkehrgeneratrix a kann in der Form

$$\varrho x_i = a_i (1 + \lambda) + c_i \lambda^2 + d_i \lambda^3 + e_i \lambda^4$$

geschrieben werden, während

$$(a^2) = 0, \quad (e^2) = 0, \quad (de) = 0, \quad (ac) = 0, \quad (ad) = 0,$$
$$2(ce) + (d^2) = 0,$$
$$2(ae) + (c^2) = 0,$$
$$(ae) + (cd) = 0, \quad 2(cd) = -2(ae) = (c^2).$$

Man kann zu diesen Bedingungen noch $(d^2) = 0$, $(ec) = 0$ hinzufügen. Die Fläche hat zwei singuläre Erzeugende, von denen die eine dann dem Werthe $\lambda = \infty$ entspricht. Sie ist auf die drei Geraden a, d, e bezogen, d wird von a und e geschnitten. Durch den Cuspidalpunkt e, d geht die eine Leitlinie γ', durch den Punkt (ad) die andere. Zu den vierpunktigen Tangenten gehören zunächst die Linien, welche den drei Complexen

$$a_y = 0, \quad d_y = 0, \quad c_y = 0$$

gemeinschaftlich sind. Dieselben bilden aber kein Hyperboloid, sondern zwei ebene Büschel, von denen das eine die Gerade $a\gamma'$, das andere $a\gamma''$ enthält. *Die Rückkehrgeneratrix ist daher keine eigentliche hyperbolische Erzeugende, vielmehr hat die Fläche nur die Erzeugende $\lambda = -4$ zur hyperbolischen.*

Zur Untersuchung des Geschlechtes der Haupttangentencurven ist der Ausdruck $\Psi\lambda\lambda$ zu bilden. Da derselbe den Werth

$$(cd)\, 4\lambda^2 (2\lambda + 1)$$

annimmt, so sind die Haupttangentencurven rational.

Man erhält ferner als Rang derselben die Zahl 8. *Sie sind daher rationale Curven fünfter Ordnung und Classe achten Ranges, mit vier stationären Tangenten und sechs scheinbaren Doppelpunkten.*

Wir kehren jetzt wieder zu dem allgemeineren Falle einer Doppelgeneratrix zurück. Die beiden Doppelgeraden γ' γ'' werden coincidiren, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & (ac) & 0 \\ 0 & (b^2) & 0 & (bd) \\ (ac) & 0 & (c^2) & 0 \\ 0 & (bd) & 0 & (d^2) \end{vmatrix}$$

oder:

$$(ac)^2\left((b^2)(d^2) - (bd)^2\right)$$

verschwindet. Es sind demnach wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

Wenn *erstens*

$$(b^2)(d^2) - (bd)^2 = 0\,,$$

so folgt

$$(bd) = \pm (b^2)\,.$$

Unter Voraussetzung des positiven Zeichens ist die Gleichung der Doppelcurve

$$(\lambda_1\lambda_2 - 1)^2 = 0\,.$$

Die beiden Erzeugenden $x'\,x''$, welche sich in einem Punkte derselben kreuzen, sind daher:

$$\varrho_1 x_i' = a_i + b_i\lambda + c_i\lambda^2 + d_i\lambda^3 + a_i\lambda^4\,,$$
$$\varrho_{11} x_i'' = a_i\lambda^4 + b_i\lambda^3 + c_i\lambda^2 + d_i\lambda + a_i\,.$$

Daraus ergiebt sich

$$\varrho' x_i' - \varrho_2 x_i'' = b - d\,.$$

Die Doppelebene enthält daher immer den festen Strahl $b - d$, welcher zugleich die allen linearen Complexen, denen die Fläche angehört, gemeinschaftliche Leitlinie bildet. *Die Fläche besitzt daher die Doppelgeneratrix a und zwei dieselbe schneidende unendlich nahe Doppelgeraden b — d, welche immer mit den beiden sich auf ihnen kreuzenden Erzeugenden in einer Ebene liegen. Von den vier hyperbolischen Erzeugenden*

$$\lambda = \pm 1\,,\quad \lambda = \pm i$$

sind die beiden ersten zu singulären Erzeugenden geworden. Die Haupttangentencurven sind daher rationale Curven vierter Ordnung und Classe, sechsten Ranges mit zwei stationären Tangenten.

Diese Flächen bilden die *sechste* Classe bei Cremona, es sind dieselben, auf welche schon oben bei Betrachtung der Haupttangentencurven der windschiefen Fläche dritter Ordnung aufmerksam gemacht wurde.

Ist dagegen *zweitens:*

$$(ac) = 0\,,$$

also

$$(b^2) = 0\,,\quad (d^2) = 0\,,$$

so coincidirt die Doppelgeneratrix mit den beiden unendlich nahen Leitlinien. *Die Fläche hat dann vier hyperbolische Erzeugende, ihre*

Haupttangentencurven sind fünfter Ordnung und Classe, achten Ranges mit vier stationären Tangenten (Cremona X).

Auch die Fläche mit Rückkehrgeneratrix kann unendlich nahe Leitlinien erhalten. Dabei treten zwei Fälle auf, die den eben behandelten analog sind. Im ersten vereinigt sich die hyperbolische Erzeugende mit der singulären, die Haupttangentencurven sind dann Raumcurven dritter Ordnung, im zweiten ist die Rückkehrgeneratrix mit den Leitlinien vereinigt und noch eine hyperbolische Erzeugende vorhanden, die Haupttangentencurven sind rationale Curven vierter Ordnung und Classe, sechsten Ranges mit zwei stationären Tangenten.

2) *Die Fläche enthält keine Doppelerzeugende.* Von den beiden Leitlinien ist dann die eine dreifach, die andere einfach (Cremona IX).

Wir erhalten demnach die folgende *Uebersicht* über die windschiefen Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Null:

A. Die Fläche gehört einem linearen Complexe an.

1) *Der Complex ist allgemein Cremona I,*

2) *der Complex ist speciell.*

a) *Die Doppelcurve zerfällt in ungleichartige Gebilde, Cremona II.*

b) *Die Doppelcurve zerfällt nicht oder in gleichartige Gebilde, Cremona VII, VIII.*

c) *Die Axe des speciellen Complexes ist Erzeugende der Fläche Cremona III, IV.*

B. *Die Fläche gehört unendlich vielen linearen Complexen an.*

1) *Das Complexbüschel hat discrete Directricen:*

a) *Flächen mit Doppel- oder Rückkehrgeneratrix, Cremona V,*

b) *Fläche ohne Doppelerzeugende, Cremona IV.*

2) *Das Complexbüschel hat zusammenfallende Directricen.*

a) *Fläche mit Doppel- oder Rückkehrerzeugenden, welche nicht mit den beiden unendlich nahen Leitlinien coincidirt, Cremona VI.*

b) *Fläche mit Doppel- oder Rückkehrgeneratrix, welche mit den beiden Leitlinien coincidirt, Cremona X.*

Der Vollständigkeit halber sei hinzugefügt, dass die windschiefen Flächen vierter Ordnung vom Geschlechte Eins durch den Schnitt dreier Complexe erzeugt werden, von denen der erste zweiten Grades, die beiden anderen linear sind. Man hat daher zwei Classen dieser windschiefen Flächen zu unterscheiden, je nachdem die Directricen der beiden linearen Complexe verschieden sind oder zusammenfallen, wie dies auch Herr Cremona gethan hat. Die Haupttangentencurven der ersten Classe sind algebraische Curven vom Geschlechte Acht, achter Ordnung und Classe, vierundzwanzigsten Ranges, mit vierzig stationären Tan-

genten, von denen sich acht auf die singulären, die übrigen zweiunddreissig auf die sechzehn hyperbolischen Erzeugenden der Fläche beziehen. Die Haupttangentencurven der zweiten Classe sind vom Geschlechte Eins, sechster Ordnung und Classe, zwölften Ranges mit zwölf stationären Tangenten, von denen die zwölf hyperbolischen Erzeugenden der Fläche entsprechen.

Die *abwickelbaren* Flächen vierter Ordnung (vom Geschlechte Null) besitzen, da sie ebenfalls einem linearen Complexe angehören, eine in sich dualistische Rückkehrcurve. Die letztere kann daher nur die Raumcurve dritter Ordnung sein. Zugeordnet sind diesen Flächen Cayley'sche Linienflächen dritter Ordnung, welche die Rückkehrcurve zur Haupttangentencurve haben. Diese Beziehung ist es, vermöge der man in den Stand gesetzt ist, den Ausdruck XIV, (12) für die Haupttangentencurven der Cayley'schen Fläche dritter Ordnung ohne weitere Rechnung hinzuschreiben.

Es ist ersichtlich, wie man in der bisher eingeschlagenen Richtung weiter gehen kann. Die windschiefen Flächen fünfter Ordnung $p=0$ würden zunächst in drei Classen zerfallen, allgemeine, die einem linearen Complexe nicht angehören, zweitens Flächen eines linearen Complexes, endlich Flächen, die unendlich vielen Complexen angehören. Man übersieht ohne Weiteres, wie jeder dieser Fälle wieder eine Reihe besonderer einschliesst. Endlich treten noch abwickelbare Flächen auf, ihre Rückkehrcurven sind vierter Ordnung und Classe. Dieselben sind zugleich Haupttangentencurven der ihnen zugeordneten Flächen vierten Grades, gehören aber nicht zur Classe der vorhin behandelten Haupttangentencurven, da die Fläche fünfter Ordnung einem linearen Complexe im Allgemeinen nicht angehört.

Göttingen, 6. Februar 1874.

Ueber geometrische Deutung algebraischer Formen, die in der Theorie der Curven dritter Ordnung auftreten.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Die algebraische Theorie der ternären cubischen Formen ist in der letzten Zeit durch Gordan vermöge Aufstellung der 34 Grundformen eines vollständigen Systems in hohem Grade gefördert worden. Nicht das Gleiche lässt sich in geometrischer Hinsicht sagen, indem von diesen Grundformen nur sehr wenige eine geometrische Deutung erfahren haben.

Bei Bestrebungen nach dieser Richtung etwas weiter zu kommen, gelingt es zwar bald, fast für sämmtliche Formen entsprechende geometrische Sätze aufzufinden; jedoch haben dieselben grösstentheils wegen ihrer Complicirtheit einen zweifelhaften Werth. Nur einige wenige Ergebnisse sind einer verhältnissmässig einfachen Fassung fähig, und deren Mittheilung bildet den Gegenstand des Folgenden.

§. 1.

Definitionen.

Wir stellen in diesem Paragraphen die Definitionen der hier vorkommenden Formen kurz zusammen, indem wir uns dabei vollkommen der von Clebsch und Gordan in Band VI. dieser Annalen S. 436 ff. eingeführten Nomenclatur anschliessen.

Die evidente Zwischenform $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ bezeichnen wir wie immer mit u_x. Bedeutet ferner f die ternäre cubische Grundform der drei Veränderlichen $x_1x_2x_3$, und setzt man:

$$f_i = \tfrac{1}{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ik} = \tfrac{1}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_k} \qquad (i,\ k = 1, 2, 3),$$

so ist die Hesse'sche Determinante

$$\Delta = 6\,\Sigma \pm f_{11}f_{22}f_{33}\,.$$

Nennt man F_{ik} den Coefficienten von f_{ik} in der Determinante $\Sigma \pm f_{11}f_{22}f_{33}$, so ist die einfachste Zwischenform

$$\Theta = 2\,(F_{11}u_1^2 + 2\,F_{12}u_1u_2 + \cdots + F_{33}u_3^2)$$
$$= \Theta_{11}x_1^2 + 2\,\Theta_{12}x_1x_2 + \cdots + \Theta_{33}x_3^2,$$

aus der die beiden andern H und K vermittelst der Gleichung

$$\Theta_{xf+\lambda\Delta} = \varkappa^2\Theta + 2\,\varkappa\lambda\,\mathsf{H} + \lambda^2\mathsf{K}$$

abgeleitet werden.

Die zur Berechnung der Contravarianten Σ und T, sowie der Invarianten S und T geeignetsten Definitionen sind:

$$\tfrac{1}{3}\,\Sigma u_x = \Theta_{11}\,(f_{22}u_3^2 + f_{33}u_2^2 - 2\,f_{23}u_2u_3)$$
$$+ 2\,\Theta_{12}\,(f_{13}u_2u_3 + f_{23}u_1u_3 - f_{33}u_1u_2 - f_{12}u_3^2) + \cdots,$$
$$6\,\mathsf{T} = \Theta_{11}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial u_1^2} + 2\,\Theta_{12}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial u_1\partial u_2} + \cdots + \Theta_{33}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial u_3^2},$$
$$Su_x^2 = 12\,(\Theta_{11}F_{11} + 2\,\Theta_{12}F_{12} + \cdots + \Theta_{33}F_{33}),$$
$$12\,Tu_x = \frac{\partial^2\Sigma}{\partial u_1^2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_1^2} + 2\,\frac{\partial^2\Sigma}{\partial u_1\partial u_2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_1\partial x_2} + \cdots$$

Bezeichnet sodann V_{ik} den Coefficienten von $\Delta_{ik} = \frac{1}{6}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_i\partial x_k}$ in $\Sigma \pm \Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{33}$, so kann man als fundamentale Covariante sechsten Grades

$$\chi = (F_{22}V_{33} + F_{33}V_{22} - 2\,F_{23}V_{23})\,x_1^2 + \cdots,$$

oder besser die Brioschi'sche Combinante einführen:

$$\psi = \tfrac{3}{2}\,\chi - \frac{Tf^2}{12},$$

welche die Gleichung erfüllt:

$$\psi_{xf+\lambda\Delta} = \psi\,(\varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{1}{3}\,T\varkappa\lambda^3 - \frac{S^2}{12}\,\lambda^4)^2 = \psi\,G^2(\varkappa\lambda).$$

Von Zwischenformen, die im Folgenden gebraucht werden, erwähnen wir noch:

$$N = \tfrac{1}{9}\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta}{\partial x_2}u_3,$$
$$\mathsf{N} = \tfrac{1}{9}\,\Sigma \pm \frac{\partial\Sigma}{\partial u_1}\frac{\partial\mathsf{T}}{\partial u_2}x_3,$$
$$\Lambda = -\tfrac{1}{2}\sum_i\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}\frac{\partial\Sigma}{\partial u_i} + \tfrac{1}{2}\,\mathsf{T}u_x = \Lambda_1x_1 + \Lambda_2x_2 + \Lambda_3x_3,$$
$$\mathsf{M} = -\tfrac{1}{2}\sum_i\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}\frac{\partial\mathsf{T}}{\partial u_i} + \frac{S}{12}\,\Sigma u_x = \mathsf{M}_1x_1 + \mathsf{M}_2x_2 + \mathsf{M}_3x_3,$$
$$L = \tfrac{1}{8}\,\Sigma\frac{\partial\Theta}{\partial u_i}\frac{\partial\Delta}{\partial x_i} - \tfrac{1}{24}\,Sfu_x,$$
$$M = -\tfrac{1}{8}\,\Sigma\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial u_i} + \tfrac{1}{24}\,(2\,Tf + S\Delta).$$

§ 2.

Ueber die Combinante ψ.

Für die kanonische Form von f:

$$f = a\,(x^3 + y^3 + z^3) + 6\,bxyz$$

ist ψ von der Gestalt:

$$2\,\psi = (a^4 + 8\,ab^3)^2\,\{(x^3 + y^3 + z^3)^2 - 12\,(x^3y^3 + x^3z^3 + y^3z^3)\}$$
$$= (a^4 + 8\,ab^3)^2\,\{y^6 + z^6 - 10y^3z^3 + x^3\,(x^3 - 10y^3 - 10z^3)\}\,.$$

Hieraus folgt, dass die sechs Geraden

$$y^6 + z^6 - 10\,y^3z^3 = 0$$

die Curve $\psi = 0$ in deren Schnittpunkten mit $x = 0$ dreipunktig berühren, d. h.:

*Die 72 Wendepunkte der Brioschi'schen Curve $\psi = 0$ sind deren Schnittpunkte mit den 12 syzygetischen Geraden des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$. Sechs Wendetangenten, deren Berührungspunkte auf einer Seite eines syzygetischen Dreiseits liegen, schneiden sich in der gegenüberliegenden Ecke des letzteren und bilden zwei Tripel, deren jedes mit den beiden übrigen Seiten des Wendepunktsdreiecks ein cyklisch projectivisches System bildet**).

Eine weitere Beziehung der Brioschi'schen Curve zu den syzygetischen Geraden liegt in dem Satze:

Durch jeden Wendepunkt der Grundcurve ($f = 0$) gehen 4 syzygetische Gerade, welche auf drei verschiedene Arten in Gruppen von zwei Strahlenpaaren zerlegt, drei quadratische Involutionen erzeugen. Die Doppelstrahlen dieser Involutionen berühren $\psi = 0$ und die sechs harmonischen Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ in denselben, auf der zugehörigen harmonischen Polare gelegenen Punkten.

Der Beweis dieses Theorems, soweit es sich auf $\psi = 0$ bezieht, ist eine unmittelbare Folge der Formel:

$$16\,\psi = (a^4 + 8ab^3)^2\,\{8x^6 - 20x^3(y+z)^3 - (y+z)^6$$
$$+ 3(y-z)^2\,(3y^4 + 3z^4 + 8y^3z + 8yz^3 + 18y^2z^2 - 20x^3y - 20x^3z)\}\,,$$

indem $y - z = 0$ die zum Wendepunkte ($x = 0$, $x + y + z = 0$) gehörige harmonische Polare, und $8x^6 - 20x^3(y+z)^3 - (y+z)^6 = 0$ die drei betreffenden Doppelstrahlenpaare darstellt. Der übrige Theil des Satzes ergiebt sich entweder aus dem Ausdrucke Bioschi's für das Quadrat von $\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}\frac{\partial \psi}{\partial x_3}$ **), oder aus dem bekannten Zu-

*) Die Wendepunkte sind also algebraisch bestimmbar.

**) Vgl. Clebsch und Gordan in Bd. I. dieser Annalen S. 72.

sammenhange zweier Curven eines harmonischen Curvenpaares, wonach die eine die Hessiane der andern ist, und wonach also jede Wendetangente der einen Curve stets die andere noch in einem auf der zugehörigen harmonischen Polare gelegenen Punkte einfach berührt*).

Ohne Zuhülfenahme der kanonischen Form könnte das letzte Theorem auch auf folgendem, überdies zu einem neuen Ergebnisse führenden Wege bewiesen werden.

Nach der oben gegebenen Definition der Covariante χ gelten über dieselbe die Sätze**):

Die Wendetangenten von $f = 0$ berühren die Curven $\chi = 0$ und $\Delta = 0$ in denselben neun, auf den harmonischen Polaren gelegenen Punkten. Von jedem Punkte der Curve $\chi = 0$ lassen sich an dessen conische Polaren in Bezug auf $f = 0$ und $\Delta = 0$ harmonische Tangentenpaare legen.

Erwägt man nun, dass für irgend eine Wurzel $\frac{\varkappa}{\lambda}$ der Gleichung $T(\varkappa\lambda) = 0$:

$$\psi\, G^2(\varkappa\lambda) = \tfrac{3}{2}\, \chi_{\varkappa f + \lambda\Delta},$$

dass also für jede der sechs harmonischen Curven die Covariante χ mit der Brioschi'schen Combinante ψ zusammenfällt, so steht diese letztere zu den sechs harmonischen Curven nicht blos in der schon oben dargelegten Beziehung, sondern auch noch in der weiteren:

Von jedem Punkte der Curve $\psi = 0$ lassen sich an dessen conische Polaren in Bezug auf zwei zusammengehörige harmonische Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ harmonische Tangentenpaare legen, und umgekehrt.

Der Combinante ψ steht reciprok gegenüber die Contravariante

$$\Phi = -\frac{R}{2} F + T\mathsf{T}^2 - \frac{S^2}{3}\Sigma\mathsf{T} + \frac{ST}{6}\Sigma^2,$$

welche für die kanonische Form von f die Gestalt hat:

$$\Phi = 6(a^4 + 8ab^3)^4 \{2(U_1^3 + U_2^3 + U_3^3)^2 - 24(U_1^3 U_2^3 + U_1^3 U_3^3 + U_2^3 U_3^3)\}.$$

Indem man auf dieselbe das gleiche Raisonnement wie auf ψ anwendet, ergeben sich die Sätze:

Die 72 Rückkehrtangenten der Curve $\Phi = 0$ gehen durch die zwölf Ecken der syzygetischen Dreiseite.

Sechs Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in einem Scheitel eines

*) Clebsch in Bd. 57 des Borchardt'schen Journals S. 239.

**) Vgl. Salmon, Höhere ebene Curven, bearbeitet von Fiedler, S. 248—249.

syzygetischen Dreiecks schneiden, liegen auf der gegenüberliegenden Seite des letzteren und bilden zwei Tripel, deren jedes mit den beiden übrigen Scheiteln ein cyklisch projectivisches System bildet.

Auf jeder harmonischen Polare liegen vier Scheitel der syzygetischen Dreiecke, welche auf drei verschiedene Arten in Gruppen von zwei Punktepaaren zertheilt, drei Involutionen erzeugen. In den Doppelpunktepaaren dieser Involutionen werden $\Phi = 0$ *und die harmonischen Curven der Schaar* $\varkappa\Sigma + \lambda T = 0$ *von denselben durch den zugehörigen Wendepunkt gehenden Geraden berührt**) *etc. etc.*

§ 3.

Ueber die Formen T und $S\mathsf{T} - T\Sigma$.

Vermöge der im ersten Paragraphen gegebenen Definition für T hat man sofort das Theorem:

Jede Gerade, deren Polarkegelschnitt in Bezug auf Σ *und deren Poloconik* $(\Theta = 0)$ *conjugirt***) *liegen, berührt* $T = 0$, *und umgekehrt.*

Aus der Gleichung

$$\Sigma\Sigma \frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 T}{\partial u_i \partial u_k} = 2\, S\Sigma$$

und aus dem bekannten Satze über die Poloconik einer Tangente von Σ***) lässt sich ferner ohne Mühe der Satz ableiten:

Die Tangenten der Hessiane $\Delta = 0$ *in zwei conjugirten Polen* x *und* ξ *sind harmonische Polaren des Polarkegelschnitts der Geraden* $x\xi$ *in Bezug auf* $T = 0$.

Nennt man sodann ϑ_{ik} den Coefficienten von Θ_{ik} in $\Sigma \pm \Theta_{11}\Theta_{22}\Theta_{33}$ und setzt

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_{11}x_1^2 + 2\,\mathsf{H}_{12}x_1x_2 + \cdots + \mathsf{H}_{33}x_3^2,$$

so ist bis auf einen Zahlenfactor der Ausdruck

$$\vartheta_{11}\mathsf{H}_{11} + 2\,\vartheta_{12}\mathsf{H}_{12} + \cdots \vartheta_{33}\mathsf{H}_{33}$$

identisch mit $\Sigma\mathsf{T}$, was den Satz liefert:

Die Curve $T = 0$ *wird eingehüllt von allen Geraden, deren nichtzerfallende Poloconiken Systeme harmonischer Polaren ihrer* H-*Curven*†) *berühren.*

---

*) Diese 54 Geraden sind offenbar mit den bei der Curve ψ auftretenden identisch.

**) Ich adoptire hier die Bezeichnung von Rosanes in Bd. VI. dieser Annalen S. 265.

***) Vgl. Durège, Curven dritter Ordnung, Art. 526—528.

†) $\mathsf{H} = 0$ ist offenbar der Ort aller Punkte, deren conische Polaren in Bezug auf f und Δ die Gerade $u_x = 0$ harmonisch schneiden.

Eine wichtigere Rolle als die Form T spielt bekanntlich die Aronhold'sche Conjugirte $\Pi = T\Sigma - S\mathsf{T}$. Die fundamentale Gleichung $\Delta^{(\Pi)} = \frac{R^2}{3}\Sigma$ zeigt, dass Π und Σ in derselben Beziehung zu einander stehen wie die Grundcurve f und deren Hessiane Δ, und dass man also sämmtliche Eigenschaften über das gegenseitige Verhalten der letzteren in solche der ersteren (Π und Σ) umsetzen darf. So hat man beispielsweise:

Der Berührungspunkt einer Tangente der Cayley'schen Curve $\Sigma = 0$ ist gleichzeitig der Pol ihrer conjugirten Tangente in Bezug auf die Aronhold'sche Curve $\Pi = 0$.

Die Spitzen der Aronhold'schen Curve $\Pi = 0$ sind die 9 Punkte, in welchen die Hessiane $\Delta = 0$ und die Cayley'sche Curve $\Sigma = 0$ sich berühren.

Da ein Paar conjugirter Pole auf der Hessiane zu dem Kegelschnittgewebe

$$v_1 \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} + v_3 \frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = 0$$

gehört, so besteht:

Die acht Seiten zweier vollständiger Vierseite, deren Paare von Gegenecken conjugirte Pole der Hessiane $\Delta = 0$ sind, berühren einen bestimmten Polarkegelschnitt der Contravariante Π.

Alle diese durch Uebertragung gewonnenen Sätze, deren Zahl noch beliebig vermehrt werden könnte*), definiren jedoch $\Pi = 0$ nicht als Einhüllende einer veränderlichen Geraden.

In dieser Hinsicht gilt das charakteristische, allerdings complicirte und nur in Ermangelung eines besseren hier mitgetheilte Theorem:

Es giebt drei Curven des syzygetischen Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$, für welche irgend eine Tangente der Curve $\Pi = 0$ den Theil einer conischen Polare bildet. Das Tripel Tangenten dieser Curven in irgend einem Wendepunkte (w) und das Tripel der von w an $f = 0$ gezogenen Tangenten bestimmen eine cubische Involution, deren vier Doppelstrahlen äquianharmonisch sind.

Der Beweis ergiebt sich sofort aus der Bemerkung, dass die einfachste simultane Invariante**) der beiden in x und λ binären cubischen Formen

$$\Delta_{x\lambda} = \Delta x^3 + \tfrac{S}{2} f x^2\lambda + \left(Tf - \frac{S\Delta}{2}\right) x\lambda^2 + \left(\frac{S^2}{12} f - \frac{T}{3}\Delta\right)\lambda^3,$$

$$\Sigma_{x\lambda} = \Sigma x^3 + 3\,\mathsf{T} x^2\lambda + \frac{S}{2}\Sigma x\lambda^2 + \left(\frac{2}{3}\,T\Sigma - \frac{S}{2}\mathsf{T}\right)\lambda^3$$

*) Vgl. meine Arbeit in Band IV. dieser Annalen S. 144.

**) Vgl. meine Note über zwei simultane binäre cubische Formen in Band VII. dieser Annalen.

identisch mit der Combinante

$$\Delta\,(T\Sigma - S\mathsf{T}) + f\left(T\mathsf{T} - \frac{S^2}{6}\Sigma\right),$$

also für $f = 0$ identisch mit $\Delta\Pi$ ist.

§ 4.

Ueber die Zwischenform N.

Die geraden Polaren irgend eines Punktes x in Bezug auf das Büschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ schneiden sich in einem und demselben Punkte, dessen Gleichung in veränderlichen Liniencoordinaten u_i

$$N \equiv \tfrac{1}{9}\,\Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial \Delta}{\partial x_2}\,u_3 = 0\,,$$

und welchen man den zu x conjugirten Pol des Büschels nennen kann. Betrachtet man umgekehrt in $N = 0$ die u_i als gegeben und die x_i als veränderlich, so stellt diese Gleichung eine Curve vierter Ordnung dar, welche Eigenschaften besitzt, vollkommen analog denen des Polarkegelschnitts einer gegebenen Geraden in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel*).

*Die Curve $N = 0$ ist der geometrische Ort aller Punkte, deren conjugirte Pole (in Bezug auf das Büschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$) auf der Geraden $u_x = 0$ liegen. Insbesondere geht dieselbe durch die zwölf Scheitel der syzygetischen Dreiecke, durch die vier Punkte, in welchen die Gerade u_x von Curven des Büschels $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ berührt wird***) und durch die vier Pole dieser Geraden in Bezug auf die syzygetischen Dreiecke. Jede Seite (s) eines solchen wird von $N = 0$ ausser in dem Scheitelpaar noch in zwei zu diesen harmonischen Punkten geschnitten, nämlich in den harmonischen Mitteln zweiten Grades für die drei auf s gelegenen Wendepunkte in Bezug auf den Schnittpunkt von s und u_x als Pol.*

Endlich trifft $N = 0$ jede Curve $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ in den Berührungspunkten der Tangenten, welche sich an die letztere von deren Schnittpunkten mit der Geraden $u_x = 0$ legen lassen.

Die Beweise dieser Sätze sind überaus naheliegend und können daher übergangen werden, ebenso wie die reciproken Eigenschaften der Curve $\mathsf{N} = 0$.

Ueber die Zwischenformen Λ, M, L und M.

Betrachtet man in Λ die u_i als die Coordinaten einer gegebenen Geraden und die x_i als veränderliche Punktcoordinaten, so stellt $\Lambda = 0$

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte 1873, S. 495; Steiner-Schröter, Kegelschnitte, § 46.

**) Diese vier Berührungspunkte liegen stets äquianharmonisch.

eine Gerade dar, deren geometrische Bedeutung durch den Satz angegeben wird:

Die Gerade $u_x = 0$ trifft $f = 0$ in drei Punkten, deren Tangentialpunkte auf der Geraden $\Lambda = 0$ liegen.

$\Lambda = 0$ ist also die „Begleiterin" der Geraden $u_x = 0$*). Eliminirt man nämlich aus

$$f(y_1\, y_2\, y_3) = 0\,, \quad u_y = 0\,, \quad f'(y_1)\, x_1 + f'(y_2)\, x_2 + f'(y_3)\, x_3 = 0$$

die y_i, so erhält man das Product der drei Tangenten an die Grundcurve f in deren Schnittpunkten mit $u_x = 0$ nach einer kleinen Rechnung**) in der Gestalt:

$$fF - \Lambda u_x^2 = 0\,;$$

hieraus folgt, dass die Schnittpunkte dieser drei Tangenten mit $f = 0$ auf $\Lambda = 0$ liegen.

Aus der Identität

$$\Lambda_{\varkappa f + \lambda \Delta} = G(\varkappa\lambda)\,(\varkappa\Lambda + \lambda \mathsf{M})$$

folgen die beiden Theoreme:

Die Gerade $u_x = 0$ trifft die Hessiane $\Delta = 0$ in drei Punkten, deren Tangentialpunkte auf der Geraden $\mathsf{M} = 0$ liegen.

Die Begleiterinnen der Geraden $u_x = 0$ in Bezug auf das Curvenbüschel $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$ bilden einen zu diesem projectivischen Strahlenbüschel.

Betrachtet man ferner in der Gleichung $fF - \Lambda u_x^2 = 0$ die x_i als constant und die u_i als veränderlich, so stellt dieselbe das Product der sechs Berührungspunkte der vom Punkte x an f gezogenen Tangenten dar. Man hat also:

Von jedem Punkte x der Ebene gehen sechs Tangenten an $f = 0$. Die 24 Tangenten, welche von den Berührungspunkten noch weiter an $f = 0$ gezogen werden können, berühren die Curve vierter Classe $\Lambda = 0$.

Die reciproken Theoreme über L und M ergeben sich unmittelbar aus der Formel

---

*) Vgl. Cremona, Ebene Curven, übers. von Curtze, S. 57; Durège, Curven dritter Ordnung, Art. 230.

**) Setzt man symbolisch

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots$$

so ist nach Clebsch, Binäre Formen S. 88, Formel (25), die Resultante der obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &2\,(abu)^2\, a_x b_x \cdot (cdu)^2\,(ceu)\,(deu)\, e_x - (acu)\,(bcu)\,(adu)^2\,(beu)^2\, c_x\, d_x\, e_x \\ &\quad = 2\,\Theta \cdot \tfrac{1}{3}\,\Sigma u_x - (\tfrac{2}{3}\,\Theta\Sigma u_x + \tfrac{1}{2}\,fF - \tfrac{1}{2}\,\Lambda u_x^2) \\ &\quad = -\tfrac{1}{2}\,(fF - \Lambda u_x^2)\,. \end{aligned}$$

$$\Lambda^{\varkappa\Pi+\lambda P} = -\tfrac{2}{3} R^3 S(\varkappa\lambda)(\varkappa L + \lambda M)\ ^*).$$

Von den aus derselben ableitbaren Folgerungen führen wir nur noch an:

Zieht man von einem beliebigen Punkte x der Ebene an die Curve $\Pi = 0$ (resp. $\Sigma = 0$) drei Tangenten, so lassen sich von deren Berührungspunkten an $\Pi = 0$ (resp. $\Sigma = 0$) noch drei weitere Tangenten ziehen, die sich in dem Punkte $L = 0$ (resp. $TL - SM = 0$) schneiden.

Tübingen, Pfingsten 1874.

---

*) Vgl. Band VI. dieser Annalen S. 106.

Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen.

Darstellung und Erweiterung der v. Staudt'schen Theorie.

Von J. Lüroth in Carlsruhe.

„Indem die Mathematik dahin strebt, Ausnahmen zu beseitigen und verschiedene Sätze unter einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe einzuführen"*). Dieser Grund veranlasste vor langer Zeit schon die Einführung der gebrochenen Zahlen in die Analysis, später die Aufnahme der negativen und irrationalen; er liegt der Recipirung der complexen Zahlen in gleicher Weise zu Grunde. Stets aber lag das Bedürfniss vor, Ausnahmen fortzuschaffen (der Mangel eines solchen verzögert, wie es scheint, die Einführung der Quaternionen). Dieses Bedürfniss aber wurde in neuerer Zeit auch in der Geometrie rege, besonders seit durch die sog. neuere Geometrie weitere Gesichtspunkte gewonnen waren und die Behandlung der höheren Curven neue Classen von Aufgaben geschaffen hatte. Die analytische Geometrie schwang sich zuerst zu dieser Allgemeinheit empor und zwar einfach dadurch, dass sie bei den vorkommenden Functionen nicht nur reelle Werthe, sondern auch complexe zuliess und dabei die alten Bezeichnungen unverändert beibehielt. Man nannte also z. B. eine Gruppe von drei complexen Zahlen einen Punkt im Raume; man sagte, ein Punkt liege auf einer Ebene, wenn drei complexe Zahlen einer Gleichung ersten Grades genügten u. s. w. Freilich hörte damit eigentlich die Geometrie auf, insofern es an reellen Gebilden fehlte, die sich durch jene Systeme von complexen Zahlen, mit welchen man eigentlich operirte, darstellen liessen. Es ist nicht nöthig, an diesem Orte dem gegenüber den Nutzen hervorzuheben, welchen diese kurze Bezeichnung für die Darstellung hat; die Theorie der Abel'schen Functionen bietet dafür ein instructives Beispiel.

*) Aus der Vorrede zum ersten Hefte von v. Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856—60. Dies Werk wird künftig einfach durch St. B. citirt werden.

Ein principieller Fortschritt in dieser Beziehung war nur möglich, wenn es gelang, räumliche Gebilde nachzuweisen, die als reelle Substrate für die imaginären Punkte u. s. w. dienen konnten.

Genau dieselbe Forderung musste die reine Geometrie stellen, als es sich darum handelte, auch von ihrer Seite diejenige Allgemeinheit zu erreichen, welche die analytische Geometrie erreicht hatte.

Dabei war die Geometrie im Vortheil. Denn da die analytische Geometrie als einen imaginären Punkt z. B. eine Gruppe von drei complexen Zahlen, also eigentlich von sechs reellen Zahlen bezeichnet, so konnte nur ein solches Gebilde zur Darstellung eines Punktes gewählt werden, welches eine Bestimmung durch sechs reelle Zahlen zuliess. Die reine Geometrie kennt, an sich genommen, diese Beschränkung nicht und es könnte daher scheinen, dass man jedes beliebige Gebilde mit dem Namen imaginärer Punkt u. s. w. bezeichnen könnte. Dies ist nicht der Fall. Denn um die Gleichförmigkeit mit den reellen Punkten, Ebenen und Geraden aufrecht zu erhalten und nicht neue Ausnahmen einzuführen, wird man verlangen müssen, dass für die Combinationen der imaginären Elemente unter sich und mit den reellen dieselben Gesetze gelten, wie bei den reellen, dass z. B. drei Ebenen einen Punkt bestimmen, drei Punkte eine Ebene und dergl. Selbst wenn aber dies erreicht ist, ist es fraglich, ob bei den weiteren Theorieen, der Lehre von der projectivischen Beziehung, der Theorie der Kegelschnitte, oder der höheren Curven nun auch wirklich die Ausnahmen beseitigt und die Uebereinstimmung mit den analytischen Resultaten erreicht ist. Die Entscheidung hierüber kann selbst wieder auf analytischem oder rein geometrischem Wege gesucht und nur für jedes System zur Interpretation des Imaginären einzeln, wenn überhaupt mehrere möglich sind, getroffen werden.

Bis jetzt ist meines Wissens nur eine Interpretation des Imaginären in der Geometrie wirklich durchgeführt: diejenige, welche v. Staudt in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage auseinandergesetzt hat. v. Staudt benutzt dabei Involutionen ohne Ordnungselemente, die er mit einem Sinne begabt und die er mit den Namen imaginärer Punkt, Ebene oder Linie belegt, je nachdem sie Involutionen einer Punktreihe oder in einem Ebenenbüschel oder Strahlenbüschel sind. Seine Theorie ist also eigentlich eine Theorie von Involutionen im Raume und jeder Satz, der in ihr auftritt, kann sofort so ausgesprochen werden, dass nur von reellen Punkten, Ebenen oder Geraden die Rede ist. v. Staudt selbst hat in seinem classischen Werke auch die projectivische Beziehng von zwei Gebilden und die Theorie der Kegelschnitte mit Rücksicht auf das Imaginäre durchgeführt und gezeigt, dass nicht nur die Ausnahmen beseitigt werden, die die ausschliessliche Benützung des Reel-

len übrig lässt, sondern auch Uebereinstimmung mit den Resultaten der analytischen Geometrie stattfindet.

Leider hat diese scharfsinnige Untersuchung nicht diejenige Verbreitung gefunden, die sie verdient, woran dieselben Gründe in erhöhtem Maasse schuld sind, welchen Herr Reye in der Vorrede seiner Geometrie der Lage es zuschreibt, dass auch das v. Staudt'sche Hauptwerk wenig bekannt geworden ist. Seit v. Staudt's Publicationen ist erst einmal die Theorie wieder auseinandergesetzt worden und zwar von Herrn August in seinen „Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie" (Programm der Friedrichsrealschule zu Berlin, 1872). Er beschränkt sich indessen in dieser Publication auf die Betrachtung der Elemente und ihrer Combinationen, ohne auf die Lehre der Projectivität einzugehen. Da nun der II. Theil der vorliegenden Arbeit zu seinem Verständniss diese Theorie fordert, so erlaube ich mir als ersten Theil eine Darstellung der v. Staudt'schen Theorie voranzuschicken, mit einigen Abweichungen von dessen Werke, die im Folgenden angegeben werden sollen.

Die §§ 1—3. geben nach v. Staudt die Definitionen der Elemente erster Art und die gegenseitigen Beziehungen zwischen den Elementen. In § 4. wird dann ein Hülfssatz bewiesen, der in § 5. bei der Betrachtung der Geraden zweiter Art gebraucht wird. Ich habe dieses Gebilde abweichend von v. Staudt mit Anschluss an Herrn August definirt als Schnitt von zwei Ebenen, die keinen reellen Punkt gemein haben, weil mir dadurch die Nothwendigkeit der Einführung klarer hervorzutreten schien und man nicht nöthig hat, vorher die Theorie der Involutionssysteme im Raume zu betrachten. Der § 6. enthält dann die Theorie des Sinnes der Würfe bei Elementen einer Geraden zweiter Art. Abweichend von v. Staudt habe ich hier auch die neutralen Würfe in drei Classen eingetheilt. Der Grund dazu liegt in Resultaten neuerer Untersuchungen*), die gelehrt haben, dass die Definition der Projectivität reeller Gebilde, die v. Staudt in § 9. seiner Geometrie der Lage giebt, nicht ganz zureichend ist und durch eine Forderung ergänzt werden muss, die man so fassen kann: es soll jeder Folge von vier Elementen wieder eine Folge entsprechen. Durch die Eintheilung der neutralen Würfe in drei Classen kann ich die Definition der projectivischen Beziehung bei beliebigen Gebilden mit v. Staudt's Worten beibehalten. Die in dem § 6. aufgestellten Definitionen werden in den §§ 7. und 8. übertragen auf Würfe aus beliebigen Elementen § 9. handelt von den harmonischen Würfen und in § 10. wird dann die projectivische Beziehung untersucht und nachgewiesen, dass die wichtigsten, bei reellen Gebilden vorhandenen Eigenschaften erhalten bleiben.

*) Klein, diese Annalen Bd. VII, Seite 531.
Bd. XVII Seite 52

Bei der Betrachtung der imaginären Elemente eines reellen Kegelschnittes, der der § 11. gewidmet ist, zog ich es vor, mich an die gewöhnliche Erzeugung eines Kegelschnittes zu halten. Einige Beweise sind hierbei aus dem Buche des Herrn Reye übertragen. § 12. enthält die Theorie der Involution.

Zur leichteren Uebersicht habe ich mit grossen griechischen Buchstaben immer imaginäre Punkte oder Ebenen bezeichnet; mit grossen lateinischen Anfangs reelle Punkte oder Ebenen, später Punkte oder Ebenen, die reell oder imaginär sein können. Kleine lateinische Buchstaben bezeichnen reelle, kleine griechische imaginäre Gerade. Die beigefügten Figuren sind zum Theil schematische, die nur dazu dienen sollen, den Zusammenhang der eingeführten Bezeichnungen vor Augen zu stellen; es sind dabei alle Elemente reell angenommen, auch wenn im Texte imaginäre gemeint sind. Der Bequemlichkeit wegen habe ich statt eines beliebigen Kegelschnittes stets einen Kreis gezeichnet.

Es entsteht nun die Frage, ob auch in der Theorie der höheren algebraischen Curven die angeführte v. Staudt'sche Theorie zu denselben Resultaten führt, wie die Analysis. Auf analytischem Wege wurde diese Frage untersucht von Herrn Stolz, der in seiner Arbeit (diese Annalen Bd. IV., Seite 416) beweist, dass man die von v. Staudt eingeführten imaginären Elemente durch Systeme von complexen Zahlen darstellen kann und dass Eigenschaften wie die: ein Punkt liegt auf einer Ebene, durch die bekannten Beziehungen zwischen den complexen Zahlen sich ausdrücken. Dies zeigt aber, dass die obige Frage zu bejahen ist.

Um auf rein geometrischem Wege die Frage zu beantworten, kann man ausgehen von der von Herrn Grassmann*) gegebenen Definition einer algebraischen Curve. Ich führe dann in dem II. Theile der folgenden Arbeit aus, dass man das von v. Staudt erfundene Rechnen mit Würfen so erweitern und ausbilden kann (§§ 14. ff.), dass sich ein Beweis für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung übertragen lässt auf eine Gleichung, die einen unbekannten Wurf bestimmt. Es werden dann (§ 18.) Coordinaten eingeführt für Punkte und Gerade einer Ebene und gezeigt, dass zwischen diesen eine lineare Gleichung besteht, wenn der Punkt auf der Linie liegt. Daraus ist der Satz über den Schnitt einer Geraden mit einer Curve eine formale Folge.

Der Beweis ist geführt, ohne dass von Maassverhältnissen Gebrauch gemacht wurde; auch von Zahlen sind nur die, nirgend zu vermeidenden, positiven ganzen Zahlen gebraucht als Coefficienten und Exponenten, und der Bruch $\frac{1}{2}$ als blosses Zeichen bei Auflösung einer Gleichung.

*) Ausdehnungslehre (1862) Seite 189 ff. Crelle's Journal Bdd. 31, 36, 42, 44, 49.

Irrationale und complexe Zahlen kommen ebenso wenig zur Anwendung als von einer Zuordnung der Punkte einer Geraden und der Zahlen die Rede ist.

Man wird vielleicht mit Vorliegendem die Sache noch nicht für erledigt halten und einen noch mehr geometrischen, anschaulicheren Beweis jenes Satzes verlangen. Der Umstand, dass der gegebene Beweis Maass und Zahl nicht voraussetzt, zeigt wenigstens, dass Jemand, der einen andern zu suchen unternimmt, sich nicht eine von vornherein unmögliche Aufgabe stellt.

I.

Das Imaginäre in der Geometrie.

§ 1.

Der Sinn eines Gebildes. Involution.

1. Die in der Geometrie der Lage betrachteten einförmigen Grundgebilde (das gerade Gebilde, der Strahlbüschel, der Ebenenbüschel), ebenso wie die aus ihnen hervorgehenden (Curve II. Ordn., Strahl- und Ebenenbüschel II. Ordn., Regelschaar), sind in sich geschlossene Gebilde, die durch Bewegung eines Elementes erzeugt werden können. Dies ist auf zwei Arten möglich. Drei gegebene Elemente ABC können nämlich von dem beweglichen entweder in dieser Reihenfolge oder in der umgekehrten CBA getroffen werden; man kann also zwei Sinne der Bewegung, den ABC und den CBA unterscheiden. Weil jene Gebilde geschlossen sind, ist der erste auch mit BCA oder CAB, der zweite mit BAC, ACB identisch. Wenn nun von einem Gebilde gesagt ist, es habe den Sinn ABC, so soll damit bezeichnet sein, dass man es in dem Sinne ABC beschrieben denkt.

2. Sind zwei einförmige Gebilde projectivisch auf einander bezogen und denkt man sich jedes von einem beweglichen Elemente durchlaufen, so wird ein gegebener Bewegungssinn beim ersten Gebilde einen bestimmten Sinn des zweiten nach sich ziehen, wenn die beiden beweglichen Elemente sich stets entsprechen sollen. Wenn die beiden Gebilde ineinander liegen und den Elementen ABC des einen, die $A_1B_1C_1$ des zweiten entsprechen, so wird auch dem Sinne ABC im ersten der Sinn $A_1B_1C_1$ des zweiten entsprechen, der entweder mit ersterem übereinstimmt oder nicht*).

3. Liegen die Gebilde ineinander und ist die projectivische Beziehung derart, dass je zwei entsprechende Elemente sich abwechselnd entsprechen, so sagt man, die Elemente des Gebildes seien involutorisch

*) St. B. Nr. 47.

gepaart*), indem man je zwei sich abwechselnd entsprechende zu einem Paar rechnet. Sind also $AA_1, BB_1, CC_1 \cdots$ solche Paare einer Involution, so ist

$$AA_1\,BB_1\,CC_1 \cdots \overline{\wedge}\; A_1\,AB_1\,BC_1\,C \cdots.$$

Wenn nun der Sinn ABA_1 dem A_1B_1A entgegengesetzt ist, so sind die Elemente AA_1 durch die BB_1 nicht getrennt und das Gleiche gilt von je zwei andern Paaren. Dann giebt es also zwei sich selbst zugeordnete sog. Ordnungselemente, welche durch jedes andere Paar der Involution harmonisch getrennt sind.

Stimmt dagegen der Sinn ABA_1 mit dem A_1B_1A überein, so sind die beiden Elemente AA_1 durch die BB_1 getrennt und ebenso sind die Elemente jedes Paares durch die jedes anderen getrennt, so dass die Involution keine Ordnungselemente besitzen kann.

4. Wenn die Punkte einer Curve II. Ordn. involutorisch gepaart sind, so giebt es einen Punkt, der mit den Punkten eines jeden Paares auf einer Geraden liegt**). Seien AA_1 BB_1 CC_1 drei Paare, dann ist, weil

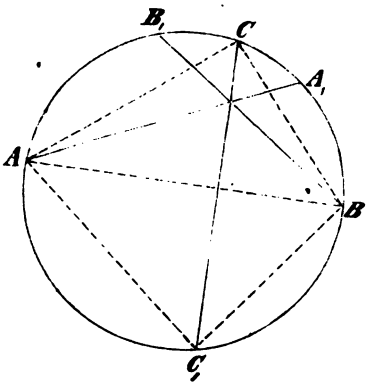
$$CC_1\,A_1B \wedge C_1C\,AB_1 \overline{\wedge}\; CC_1\,B_1A$$

der Büschel

$$A\,(CC_1\,A_1B) \overline{\wedge}\; B\,(CC_1\,B_1A)$$

und ausserdem zu ihm perspectivisch gelegen, so dass sich die entsprechenden Strahlen in Punkten der Geraden CC_1 schneiden. Es geht folglich CC_1 durch den Schnittpunkt der Linien AA_1 und BB_1; da CC_1 ein beliebiges Paar war, so ist der Satz bewiesen. Der hier auftretende Punkt heisst das Centrum der Involution. Liegt er im Innern des Kegelschnitts, so hat die Involution keine Ordnungselemente, während sie zwei hat, wenn der Mittelpunkt ausserhalb gelegen ist.

Fig. 1.



§ 2.

Die imaginären Elemente erster Art***).

5. In einem einförmigen Elementargebilde (gerades Gebilde, ebener Strahlbüschel, Ebenenbüschel) sei eine Involution gegeben, die *keine* Ordnungselemente besitzt. Wenn man sich dieselbe durch zwei beweg-

*) St. G. Nr. 213; B. Nr. 70; Reye I, S. 115.
**) St. B. Nr. 74; Reye I, S. 117.
***) St. B. § 7.

liche Elemente erzeugt denkt, die stets einander zugeordnet bleiben, so müssen diese sich in demselben Sinne bewegen, *so dass man also in diesem Falle von dem Sinne sprechen kann, in dem die Involution beschrieben ist oder kurz von dem Sinne der Involution selbst.*

*Eine Involution ohne Ordnungselemente, der man einen bestimmten Sinn beilegt oder die man in einem bestimmten Sinne beschrieben denkt, soll ein imaginäres Element erster Art heissen**) und zwar *imaginärer Punkt,* wenn das einförmige Gebilde ein gerades Gebilde war, *imaginäre Ebene,* wenn es ein Ebenenbüschel, und *imaginäre Gerade erster Art* (zum Unterschied von einer noch zu definirenden zweiter Art), wenn das Gebilde ein ebener Strahlbüschel war. Den Sinn kann man bei wirklicher Zeichnung durch einen Pfeil oder durch die Anordnung der Bezeichnung andeuten.

Der Involution, von der AA_1, BB_1 zwei Paare sind, kann man entweder den Sinn ABA_1 oder den A_1BA beilegen, und man erhält so zwei Gebilde, die als verschieden betrachtet und als einander *conjungirt* bezeichnet werden sollen.

6. Da die Involution durch zwei Elementenpaare bestimmt ist, so ist eines der oben definirten imaginären Elemente gegeben, wenn zwei Paare von Elementen gegeben sind (wobei natürlich die des einen Paares durch die des andern getrennt sein müssen) und zugleich der Sinn bestimmt ist. Sind die beiden Paare AA_1, BB_1 gegeben, so soll *dasjenige imaginäre Element, welches durch den Sinn ABA_1 gegeben ist, durch ABA_1B_1 und das conjungirte, dem Sinne A_1BA entsprechende, durch A_1BAB_1 dargestellt werden.*

Soll EFE_1F_1 dasselbe imaginäre Element darstellen wie ABA_1B_1, so müssen EE_1, FF_1 Paare der Involution sein, der AA_1, BB_1 angehören, und der Sinn EFE_1 muss mit dem ABA_1 übereinstimmen.

7. Wir definiren nun**):

Ein imaginäres Element ABA_1B_1 geht durch ein reelles Element s, wenn alle Elemente $AA_1BB_1\cdots$ des Grundgebildes durch s gehen.

Ein imaginäres Element ABA_1B_1 liegt in einem reellen Elemente u, wenn alle Elemente $AA_1BB_1\cdots$ des Grundgebildes in u liegen.

Diese Definition auf specielle Fälle angewandt liefert:

Ein imaginärer Punkt liegt in einer reellen Geraden, wenn die den Punkt darstellende Involution auf der Geraden liegt.

Eine imaginäre Ebene geht durch eine reelle Gerade, wenn die die Ebene darstellende Involution jene Gerade zur Axe hat.

Hieraus folgt, dass:

ein imaginärer Punkt stets auf einer reellen Geraden liegt, die der reelle Träger des Punktes heisst.

eine imaginäre Ebene stets durch eine reelle Gerade geht, welche die reelle Axe der Ebene heisst.

*) St. B. Nr. 116.

**) St. B. Nr. 119.

Eine *imaginäre Gerade erster Art geht stets durch einen reellen Punkt*, das Centrum des involutorischen Strahlbüschels, und *liegt in einer reellen Ebene*, nämlich der Ebene dieses Büschels.

§ 3.

Combination der imaginären Elemente.

8. Zwei involutorische Gebilde, z. B. ein Ebenenbüschel und eine Punktreihe, die beide einen bestimmten Sinn besitzen, sollen zu einander perspectivisch heissen*), wenn je zwei Ebenen, die im Ebenenbüschel gepaart sind, die Gerade in zwei Punkten treffen, die in der Punktinvolution einander zugeordnet sind, und wenn gleichzeitig eine Ebene, welche den Büschel in dem gegebenen Sinne durchläuft, auch die Punktreihe in dem richtigen Sinne beschreibt.

9. Hiermit definiren wir nun**):

Ein imaginärer Punkt liegt in einer imaginären Ebene, wenn entweder die reelle Axe der Ebene mit dem reellen Träger des Punktes zusammenfällt oder die Involution, welche den Punkt darstellt, perspectivisch ist zu der, welche die Ebene darstellt.

Ein imaginärer Punkt liegt in einer Geraden erster Art, wenn die Involutionen, die beide Gebilde darstellen, perspectivisch sind. Dann liegt der reelle Träger des Punktes in der reellen Ebene der Geraden.

Eine Gerade erster Art liegt in einer imaginären Ebene, wenn die Involutionen, die beide Gebilde darstellen, perspectivisch sind. Der reelle Punkt der Geraden liegt dann in der reellen Axe der Ebene.

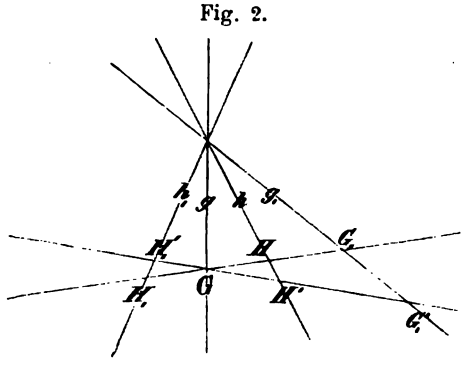
Sind zwei Involutionen perspectivisch bei einem gewissen Sinne beider, so bleiben sie es auch, wenn man in beiden den Sinn umkehrt. Daraus folgt, weil der Sinn die conjungirten Elemente unterscheidet, dass, *wenn zwei imaginäre Elemente in einander liegen, auch ihre conjungirten in einander liegen.*

10. Es sollen jetzt zwei Punkte betrachtet werden. Ist einer von beiden reell und der andere imaginär, so giebt es immer eine Gerade, die durch beide geht. Wenn diese Gerade reell sein soll, so kann sie nach der Definition in Nr. 7. nur der reelle Träger des imaginären Punktes sein, auf dem dann auch der reelle Punkt liegen muss. Wenn dies nicht der Fall ist, kann die Gerade nur imaginär sein. Nach Nr. 7. muss ihr reeller Punkt der gegebene sein und ihre reelle Ebene diejenige, welche den reellen Punkt mit dem Träger des imaginären verbindet. Die Gerade erster Art wird also durch den involutorischen Strahlbüschel dargestellt, dessen Mittelpunkt der reelle Punkt ist und der perspectivisch liegt zu der Involution, die den imaginären Punkt darstellt.

*) St. B. Nr. 72.

**) St. B. Nr. 120.

Wenn aber zwei imaginäre Punkte AA′ in derselben Geraden erster Art liegen sollen, so muss nach dem Früheren die reelle Ebene dieser Geraden die beiden reellen Träger der Punkte enthalten, d. h. diese müssen sich schneiden. Es kommt dann darauf an, in der Ebene der beiden Träger einen involutorischen Strahlbüschel zu finden, der zu den beiden gegebenen Punktinvolutionen nach Lage und Sinn perspectivisch ist*). Es sei nun G der Schnittpunkt der beiden Träger. In der einen Involution sei ihm G_1, in der zweiten G_1' zugeordnet. Die nach G und G_1 gehenden Strahlen des zu suchenden Büschels mögen g und g_1 sein. Dann muss g_1 auch durch G_1' gehen. Sind H und H_1 zwei Punkte eines anderen Paares der ersten Involution und ist GHG_1H_1 eine Darstellung von A, so ist ghg_1h_1 eine Darstellung der Geraden, welche durch A geht, wenn h und h_1 die nach H und H_1 gehenden Strahlen des Büschels sind. Weil aber diese Gerade auch durch A′ gehen soll, müssen die Punkte H' und H_1', in welchen h und h_1 die zweite Involution schneiden, in dieser gepaart sein, ferner muss der Sinn ghg_1 oder der $GH'G_1'$ mit dem Sinne der zweiten Involution übereinstimmen und endlich $GHG_1H_1 \overline{\wedge} GH'G_1'H_1'$ sein, weil beide perspectivisch sind. Kann man umgekehrt ein Punktepaar $H'H_1'$ der zweiten Involution finden, welches den obigen Bedingungen genügt, so schneiden sich, weil GHG_1H_1 und $GH'G_1'H_1'$ projectivisch sind und, da sie G entsprechend gemein haben, perspectivisch liegen, die Strahlen HH', G_1G_1', H_1H_1' in einem Punkte und die Involution $gg_1 \cdot hh_1 \cdots$ ist perspectivisch zu den beiden gegebenen Punktinvolutionen, weil die beiden Strahlenpaare gg_1, hh_1 durch zwei Punktepaare einer jeden Involution gehen. Auch ist dann der Sinn ghg_1 eine Projection der Sinne GHG_1 und $GH'G_1'$ und somit geht die imaginäre Gerade ghg_1h_1 durch A und A′.

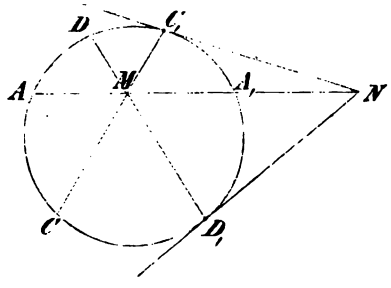


11. Es ist noch der Beweis der obigen Behauptung zu liefern, dass man zu einem Paare AA_1 einer Involution ohne Ordnungselemente stets ein anderes BB_1 so finden kann, dass $ABA_1B_1 \overline{\wedge} GHG_1H_1$ (wobei natürlich, weil AA_1 durch BB_1 getrennt sind, auch GG_1 durch HH_1 getrennt sein müssen) und der Sinn ABA_1 ein gegebener ist**).

*) St. B. Nr. 126.
**) St. B. Nr. 83.

Man kann sich auf den Fall beschränken, dass die Involution eine Punktinvolution auf einem reellen Kegelschnitte ist; denn auf diesen lassen sich alle durch Projection zurückführen. Es sei M das Centrum dieser Involution. Man suche auf der Geraden AMA_1 einen Punkt N, so dass $AMA_1N \wedge GHG_1H_1$ ist. Weil die Involution keine Ordnungselemente haben soll, ist M ein Punkt im Innern des Kegelschnitts und weil je GG_1 durch HH_1 und folglich auch AA_1 durch MN getrennt sein soll, N ein äusserer Punkt, daher lassen sich von N aus zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen, die in den Punkten C_1 und D_1 berühren mögen. C und D seien die C_1 und D_1 zugeordneten Punkte. Dann ist, wenn man von C_1 oder D_1 projicirt,

Fig. 3.



$$AMA_1N \wedge ACA_1C_1 \wedge ADA_1D_1 \wedge GHG_1H_1,$$

da C_1 und D_1 durch AA_1 getrennt sind und ebenso CC_1 und DD_1, so sind auch CD durch AA_1 getrennt; daher der Sinn ACA_1 dem ADA_1 entgegengesetzt ist. Somit muss einer dieser beiden Sinne der gegebene sein und es ist also entweder CC_1 oder DD_1 das gesuchte Punktepaar.

Am einfachsten ist die Construction, wenn GG_1 durch HH_1 harmonisch getrennt sind, dann ist N von M durch AA_1 harmonisch getrennt und die Linie C_1D_1 geht durch M; daher C mit D_1 und D mit C_1 übereinstimmt. Dann hat also entweder $AC_1A_1D_1$ oder $AD_1A_1C_1$ den gewünschten Sinn.

12. Der eben bewiesene Satz zeigt, dass man in einer Involution ohne Ordnungselemente stets zu einem Elementenpaar AA_1 ein zweites BB_1 finden kann, so dass AA_1 durch BB_1 harmonisch getrennt sind. Dann stellen ABA_1B_1 und AB_1A_1B die beiden conjugirten imaginären Elemente dar. Eine solche Darstellung soll eine *harmonische* heissen. Da das vierte Element durch die drei übrigen bestimmt ist, so reicht es hin, drei, z. B. AA_1 und B resp. B_1, zu geben, womit zugleich auch der Sinn dargestellt ist. Bei einem imaginären Punkt reicht man mit zweien aus, wenn man A z. B. in den einzigen ausgezeichneten Punkt des Trägers, den unendlich fernen fallen lässt. Doch fehlt hier die Analogie im Ebenen- und Strahlenbüschel.

13. Wenn zwei imaginäre Punkte in derselben reellen Geraden liegen sollen, müssen ihre Träger zusammenfallen mit dieser Geraden.

Fassen wir das Vorstehende zusammen, so erhalten wir den Satz, dem sofort sein dualistisch entsprechender an die Seite gestellt ist.

Zwei Punkte, die in einer reellen Ebene liegen, liegen stets auf einer reellen Geraden oder imaginären Geraden erster Art.

Zwei Ebenen, die durch denselben reellen Punkt gehen, schneiden sich in einer reellen Geraden oder einer imaginären Geraden erster Art.

Ferner ergeben sich auf ähnliche Weise die Sätze:

Zwei Gerade, die in derselben reellen Ebene liegen, schneiden sich in einem reellen oder imaginären Punkte.

Zwei Gerade, die einen reellen Punkt gemein haben, liegen in einer reellen oder imaginären Ebene.

14. Es seien gegeben ein Punkt und eine Gerade. Jedenfalls besitzt die Gerade mindestens einen reellen Punkt. Man lege durch ihn und den gegebenen Punkt eine Gerade. Dann hat man zwei Gerade, die durch denselben reellen Punkt gehen und folglich in einer Ebene liegen, die den gegebenen Punkt und die gegebene Gerade enthält. Jene beiden Geraden sind nicht verschieden, wenn der gegebene Punkt in die gegebene Gerade fällt. In diesem Falle geht jede Ebene durch letztere auch durch den ersteren. Daher:

Ein Punkt und eine Gerade liegen entweder ineinander oder sie bestimmen eine Ebene.

Eine Ebene und eine Gerade liegen entweder ineinander oder sie bestimmen einen Punkt.

Zwei Gerade erster Art haben im Allgemeinen weder einen Punkt gemein, noch liegen sie in derselben Ebene, aber:

Zwei Gerade, die einen imaginären Punkt gemein haben, liegen in derselben Ebene.

Zwei Gerade, die in derselben imaginären Ebene liegen, haben einen Punkt gemein.

Ist nämlich die reelle Ebene der beiden Geraden die nämliche, so ist dies die im Satze gemeinte. Sind aber diese beiden Ebenen verschieden, so projicire man von der Verbindungslinie der reellen Punkte beider Geraden aus den imaginären Punkt, den sie gemein haben, durch eine imaginäre Ebene, welches dann die im Satze erwähnte ist, weil sie zu beiden Strahlbüscheln nach Lage und Sinn perspectivisch ist.

§ 4.

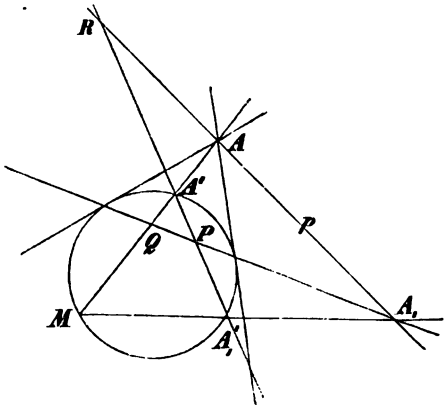
Hülfssatz.

15. Im vorigen § hat sich ergeben, dass zwei Ebenen nur dann eine Gerade erster Art bestimmen, wenn ihre reellen Axen sich schneiden. Es ist aber wünschenswerth, ganz allgemein sagen zu können, zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, resp. zwei Punkte bestimmen eine Gerade. Um dies zu erreichen, wird man das Punktgebilde, welches zwei Ebenen gemein haben, auch dann als Gerade bezeichnen, wenn jene Ebenen nicht die eben erwähnte specielle Lage besitzen. Und ähnlich wird man bei zwei Punkten verfahren. Diese

so erhaltenen Gebilde sind aber identisch. Dem Beweise dafür sei das Folgende*) vorausgeschickt:

In einer Ebene sei der Kegelschnitt k gegeben. Zwei Punkte heissen dann conjugirt in Bezug auf k, wenn jeder in der Polare des andern gelegen ist. Seien AA_1 zwei conjugirte Punkte. Von einem Punkte M des Kegelschnitts k werden diese durch zwei Linien projicirt, die k in $A'A_1'$ wieder treffen. Die Polare von A, die durch A_1 geht, möge $A'A_1'$ in P und MA in Q treffen. Ferner sei R der Schnittpunkt von $A'A_1'$ mit AA_1. Wenn man dann $MQA'A$ von A_1 aus auf $A'A_1'$ projicirt, so findet sich, dass $A'A_1'$ durch P und R harmonisch getrennt sind. Weil somit P ein Punkt der Polare von R und auch der Polare von A ist, ist er der Pol von AA_1. Ist umgekehrt P gegeben und man projicirt die beiden Punkte A' und A_1', die mit P in einer Geraden liegen, auf die Polare p von P nach A und A_1, so sind, wenn R dieselbe Bedeutung hat wie vorher, RP harmonisch getrennt durch $A'A_1'$. Durch Projection von A_1 auf AM folgt hieraus, dass MA' harmonisch getrennt sind durch AQ. Nun ist Q ein Punkt der Polare von A, die durch P gehen muss, und A_1PQ liegen auf einer Geraden, also geht die Polare von A durch A_1, d. h. diese beiden Punkte sind conjugirt.

Fig. 4.



Wenn man nun auf einer Geraden p je zwei Punkte sich zuordnet, die conjugirt sind, so sind dieselben bekanntlich involutorisch gepaart. Projicirt man vom Punkte M von k aus diese Involution auf k, so entsteht dort eine Involution, deren Centrum nach dem oben bewiesenen der Pol P von p ist. *Dieses Centrum, und folglich auch die Involution auf dem Kegelschnitte, ist daher von der Lage von M unabhängig.* Ist andererseits auf dem Kegelschnitte eine Involution mit dem Centrum P gegeben und wird sie von einem Punkte M der Curve aus auf die Polare p projicirt, so erhält man dort eine Involution, in welcher nach dem Obigen die Punkte eines Paares conjugirt sind, *so dass auch diese Involution vom Projectionscentrum M unabhängig ist.* Legt man der Involution auf dem Kegelschnitt einen bestimmten Sinn bei, so wird er durch die Projection auch auf p

*) St. B. Nr. 75.

übertragen. *Wenn die Gerade p den Kegelschnitt nicht schneidet, so ist auch der Sinn der Involution auf p vom Projectionscentrum unabhängig.* Projicirt man nämlich eine auf k gelegene Punktreihe, die in einem bestimmten Sinne durchlaufen wird von zwei Centren M und N, die Punkte von k sind, auf eine Gerade p, so entstehen dort zwei projectivische Punktreihen. Würden beide in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, so müssten zweimal zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, die dann die Schnittpunkte von p und k wären. Wenn also p die Curve k nicht schneidet, so können die beiden Reihen nur in gleichem Sinne durchlaufen sein.

Es möge auf dem Kegelschnitt k eine Involution vorhanden sein, die einen bestimmten Sinn besitzt, und deren Centrum P im Innern von k liege. *Man projicire sie von zwei Punkten M und N der Curve auf eine Gerade p und erhalte dort dieselbe Involution mit demselben Sinne. Dann muss p die Polare von P sein.* Denn die beiden projicirenden Strahlbüschel stellen zwei imaginäre Gerade dar, die sich nur in einem Punkte schneiden. Daher giebt es nur eine Involution, welche zu beiden Büscheln nach Lage und Sinn perspectivisch ist. Nun ist aber nach dem Vorigen eine gewisse Involution auf der Polare von P zu den beiden Büscheln perspectivisch; folglich muss p diese Polare sein. Man kann also sagen:

Wenn man aus einer Involution ohne Ordnungselemente mit einem bestimmten Sinne, die auf einem Kegelschnitt k gelegen ist, durch Projection von zwei Punkten M und N des Kegelschnitts aus auf einer Geraden p dieselbe Involution nach Lage und Sinn erhält, so ist p die Polare des Involutionscentrums, und durch Projection von jedem andern Punkte des Kegelschnittes aus entsteht auf p wieder dieselbe Involution, in welcher je zwei gepaarte Punkte conjugirt sind in Bezug auf den Kegelschnitt.

§ 5.

Die Gerade zweiter Art.

16. Seien nun zwei imaginäre Ebenen A und B gegeben, deren reelle Axen sich nicht schneiden; *es soll das System der Punkte untersucht werden, welche beiden Ebenen angehören.* In jeder reellen Ebene liegt ein und nur ein solcher Punkt. Denn die beiden imaginären Ebenen schneiden (nach Nr. 12.) die reelle Ebene in je einer Geraden erster Art. Die beiden reellen Punkte derselben können aber nicht zusammenfallen, weil, gegen die Voraussetzung, die reellen Axen p und q von A und B sich sonst schneiden würden. Daher müssen sich die beiden Geraden erster Art in einem Punkte schneiden. Folglich *liegt in jeder reellen Ebene, und geht durch jeden reellen Punkt nur ein Träger eines imaginären Punktes, der auf* A *und* B *zugleich liegt,*

so dass diese Träger ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe bilden. Jeder Strahl dieses Systems trägt eine Involution, die nach Lage und Sinn zu den beiden Ebeneninvolutionen perspectivisch ist, die A und B darstellen. Zu dem System gehören auch die beiden Axen p und q, welche die reellen Träger der Punkte A′ und B′ sind, in welchen sie von resp. B und A geschnitten werden.

Sei nun r ein Strahl dieses Strahlensystems, also der reelle Träger eines Punktes Γ′, der gleichzeitig A und B angehört. Legt man dann durch irgend einen Punkt T von r und die beiden Linien p und q die Ebenen der Büschel A und B, so müssen die ihnen in diesen Involutionen zugeordneten r wieder in demselben Punkte T_1 treffen, so dass TT_1 ein Paar der Involution ist, welche Γ′ darstellt. Die beiden ersteren Ebenen schneiden sich in dem durch T gehenden, die beiden letzteren in dem durch T_1 gehenden Leitstrahl der Regelschaar pqr*). Man kann auf diese Weise jedem dieser Leitstrahlen einen zweiten zuordnen, so dass je zwei solche in den Ebenen eines Paares der involutorischen Büschel A und B liegen, oder mit andern Worten, man kann die Leitstrahlen der Regelschaar pqr so involutorisch paaren, dass die beiden Involutionen A und B zu dieser Involution perspectivisch sind nach Lage und Sinn. Dabei wird man sich die Regelschaar von einem Leitstrahl in einem bestimmten Sinne durchlaufen vorzustellen haben, der sich aus den Sinnen ergiebt, in welchen die Ebenenbüschel A und B durchlaufen werden, oder, was damit identisch ist, aus den Sinnen, die den Involutionen A′B′Γ′ beizulegen sind.

Durch diese und die dualistisch entsprechende Betrachtung hat sich also ergeben:

Die Träger der imaginären Punkte, welche gleichzeitig auf zwei imaginären Ebenen A *und* B *liegen, bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe. Ein Strahl r gehört diesem Strahlensysteme an, wenn man die Geraden der Regelschaar, von der r und die reellen Axen von* A *und* B *Leitstrahlen sind, so involutorisch paaren kann, dass diese Involution zu den* A *und* B *nach Lage und Sinn perspectivisch ist.*

Die reellen Axen der imaginären Ebenen, welche gleichzeitig durch zwei imaginäre Punkte A, B *gehen, bilden ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe. Ein Strahl r gehört diesem Systeme an, wenn man die Geraden der Regelschaar, von der r und die reellen Träger von* A *und* B *Leitstrahlen sind, involutorisch so paaren kann, dass diese Involution zu den* A, B *nach Lage und Sinn perspectivisch ist.*

17. Indem wir an den Satz links anknüpfen, bezeichnen wir, wie oben schon, mit A′ und B′ die beiden Punkte, in welchen die reellen

*) Drei Gerade pqr, die sich nicht schneiden, bestimmen ein einfaches Hyperboloid. Alle Geraden auf demselben, die jene drei pqr nicht schneiden, sollen als die Geraden der Regelschaar pqr bezeichnet werden; alle Geraden abc dagegen, die pqr schneiden, sollen die Leitstrahlen der Regelschaar pqr heissen; sie bilden entsprechend die Regelschaar abc, zu der pqr Leitstrahlen sind.

Geraden pq von den imaginären Ebenen B und A geschnitten werden. Man lege nun durch diese beiden Punkte nach dem Satze rechts eine imaginäre Ebene. Jeder Strahl des im Satze links auftretenden Strahlensystems ist dann reelle Axe einer solchen Ebene. Denn wenn eine involutorische Regelschaar nach Lage und Sinn perspectivisch ist zu den Involutionen, welche A′ und B′ darstellen, ist sie es auch zu den involutorischen Ebenenbüscheln, welche A′ und B′ aus den Axen q und p projiciren, d. h. zu den Ebenen A und B. Daher haben die obigen dualistischen Sätze die Fortsetzung:

Die Strahlen dieses Strahlensystems sind die Axen der imaginären Ebenen, welche durch die beiden Punkte A′ B′ *gehen, in welchen p und q von resp.* B *und* A *geschnitten werden.*

Die Strahlen dieses Strahlensystems sind die Träger der imaginären Punkte, welche auf den Ebenen B′ *und* A′ *liegen, die* A *mit q und* B *mit p verbinden.*

18. Seien nun r und s zwei Strahlen des im Satze linker Hand auftretenden Strahlensystems. Dann sind zwei Fälle möglich; entweder gehört s der Regelschaar pqr an, oder es hat mit dieser Regelschaar gar keinen Punkt gemein. Denn sonst würden zwei Strahlen des Strahlensystems sich schneiden. Im ersten Falle wird s von den involutorisch gepaarten Leitstrahlen der Regelschaar pqr in einer involutorischen Punktreihe geschnitten, die nach Lage und Sinn perspectivisch ist zu dem involutorischen Ebenenbüschel oder der imaginären Ebene Γ, welcher von r aus die Punkte A′ und B′ projicirt, d. h. die Ebene Γ geht dann auch durch den auf s liegenden Punkt Δ′, der beiden Ebenen A und B angehört. Wenn aber s mit jener Regelschaar keinen Punkt gemein hat, so lege man durch s eine reelle Ebene, welche die involutorische Regelschaar in einem Kegelschnitte k schneidet, dessen Punkte gepaart sind und auf dem die Schnittpunkte PQR mit den Linien pqr liegen. Die beiden Ebenen A und B werden dagegen in involutorischen Strahlbüscheln geschnitten, deren Centren P und Q sind und die zu der Involution auf dem Kegelschnitt k perspectivisch sind. Weil aber s der Träger des Punktes Δ′ ist, der beiden Ebenen A und B angehört, sind jene Strahlbüschel zu einer und derselben Involution auf s perspectivisch. Daher ist nach Nr. 15. das Centrum der Involution auf k der Pol von s in Bezug auf k, und ein Strahlbüschel, dessen Centrum R ist und der die Involution auf k projicirt, ist zu der Involution Δ′ ebenfalls perspectivisch nach Lage und Sinn. Dieser letzte Strahlbüschel ist aber der Schnitt jener reellen Ebene mit der oben Γ genannten Ebene, so dass Γ durch Δ′ geht. Somit an die letzten Parallelsätze anschliessend:

geht jede Ebene durch die beiden Punkte A′ *und* B′ *durch alle übrigen Punkte, welche* A *und* B *gemein sind.*

liegt jeder Punkt, welcher den beiden Ebenen A′ *und* B′ *angehört, in allen übrigen Ebenen, die durch* A *und* B *gehen.*

Wendet man den Satz links auf die Punkte B′ und Γ′ an und auf die Ebenen B und Γ, von welchen nach dem Vorigen B von der Axe q den Punkt A′ oder den Γ′ und Γ von der Axe r aus A′ oder B′ projicirt, so folgt: jede Ebene durch B′ und Γ′ geht auch durch alle übrigen B und Γ gemeinsamen Punkte oder auch durch alle A und B gemeinsamen Punkte; denn weil Γ durch A′ und B′ geht, liegen alle die genannten Punkte nach dem letzten Satze auf ihr.

Sowie man hier den Punkt A′ durch den Punkt Γ′ ersetzt hat, kann man auch B′ durch einen Punkt Δ′ ersetzen und gelangt so zu den Sätzen:

Jede Ebene durch zwei Punkte des Systems geht durch alle übrigen.

Jeder Punkt, der auf zwei Ebenen gelegen ist, liegt auf allen übrigen.

Fasst man nun alles Gefundene zusammen, so ergiebt sich:

Zwei Punkte und zwei durch beide gehende Ebenen bestimmen ein Strahlensystem erster Ordnung und Classe. Jeder Strahl des Systems ist Träger einer Involution mit einem gewissen Sinne und Axe eines involutorischen Ebenenbüschels mit einem bestimmten Sinne. Alle involutorischen Punktreihen sind zu allen Ebenenbüscheln nach Lage und Sinn perspectivisch, oder jeder Strahl des Systems ist Träger eines imaginären Punktes und Axe einer imaginären Ebene. Jeder der Punkte liegt in jeder der Ebenen.

Dieses ganze Gebilde heisst Gerade zweiter Art.

19. Nach dem Obigen ist eine Gerade zweiter Art bestimmt durch zwei imaginäre Punkte oder durch zwei imaginäre Ebenen oder auch durch eine Regelschaar, deren Geraden so involutorisch gepaart sind, dass keine Ordnungselemente existiren und der man einen bestimmten Sinn beigelegt hat. Seien $aa_1, bb_1 \cdots$ zwei Paare von Geraden dieser Involution und die Bezeichnung so gewählt, dass aba_1 der Sinn ist, so kann man die Gerade durch aba_1b_1 darstellen. Alle Leitstrahlen $pq \cdots$ der Regelschaar würden dann Träger von Involutionen und Axen von Ebenenbüscheln, die nach Lage und Sinn zu der Involution perspectivisch sind.

Ist f eine beliebige reelle Gerade, die nicht dem erwähnten Strahlensysteme angehört, dann geht durch jeden ihrer Punkte ein Strahl dieses Systems. Seien pqr drei solcher. Diese bestimmen eine Regelschaar, deren Geraden dem Strahlensysteme angehören und zu deren Leitstrahlen f gehört. Da aber durch jeden Punkt von f nur eine Gerade dieses Systems gehen kann, so folgt, *dass alle Strahlen, welche eine Gerade schneiden, die nicht zum System gehört, eine Regelschaar bilden.* Die Leitstrahlen derselben, von welchen f einer ist, sind dann involutorisch gepaart. Diese Involution oder zwei Linienpaare derselben können zur Darstellung der Geraden zweiter Art dienen.

20. Ersetzt man in den beiden ersten Bestimmungsarten die Elemente durch ihre *conjugirten* und *dreht bei den letzten den Sinn um*, so bleiben alle Involutionen dieselben, aber die Sinne kehren sich um: *das ganze Gebilde ist wieder eine Gerade zweiter Art, welche zur früheren conjungirt heissen soll.* Ist p ein Strahl des Strahlensystems der ersten Geraden, so gehört er auch dem der conjungirten Geraden an, trägt aber in beiden Fällen dieselbe Involution mit entgegengesetztem Sinne. Daher:

Schneidet eine reelle Gerade eine imaginäre zweiter Art, so schneidet sie auch die conjungirte und zwar sind die gemeinsamen Punkte und Ebenen conjungirt.

Seien vier reelle Gerade gegeben $pqrs$, die von keiner reellen Geraden geschnitten werden, dann werden sie auch von keiner Geraden erster Art getroffen, aber es giebt stets zwei conjungirte Gerade zweiter Art, die jede der gegebenen schneiden.

Da auf pqr je ein Punkt einer solchen Geraden liegen muss, wird sie durch eine Involution der Leitstrahlen der Regelschaar pqr dargestellt werden. Diese Involution muss aber so beschaffen sein, dass auf s ein Punkt der Geraden liegt. Nach dem Vorigen findet dies statt, wenn eine durch s gelegte reelle Ebene jene Regelschaar in einem Kegelschnitte schneidet, dessen Punkte involutorisch so gepaart sind, dass das Involutionscentrum der Pol von s ist.

Da die Involutionen der Lage nach, aber nicht dem Sinne nach bestimmt sind, kann jeder der beiden möglichen Sinne angewendet werden. Folglich giebt es zwei conjungirte Gerade zweiter Art, welche vier reelle treffen, wenn diese von keiner reellen Geraden getroffen werden.

21. Aus dem Vorigen folgt, dass *eine Gerade zweiter Art*

mit jeder reellen Ebene einen und nur einen Punkt gemein hat. | *mit jedem reellen Punkte eine und nur eine Ebene bestimmt.*

Combiniren wir jetzt eine Gerade zweiter Art und eine imaginäre Ebene Γ. Beide können nur einen Punkt gemein haben, weil sonst (Nr. 18.) die Ebene die Gerade ganz enthielte. Um zu beweisen, dass sie aber stets einen Punkt gemein haben, lege man durch die Gerade zwei Ebenen A und B, und zwar so, dass ihre reellen Axen pq die reelle Axe r der gegebenen Ebene schneiden, was, wenn r nicht selbst diesem Systeme angehört, stets möglich ist, weil ja durch jeden Punkt ein Strahl des Strahlensystems geht. Dann schneiden sich A und Γ, sowie B und Γ in Geraden erster Art, weil sie einen reellen Punkt gemein haben. Weil diese Geraden erster Art aber in derselben Ebene Γ liegen, schneiden sie sich in einem Punkte (Nr. 14.). Gehört aber r dem Strahlensysteme an, so ist er Träger eines Punktes, der der Geraden zweiter Art angehört und in Γ gelegen ist, weil er in der reellen Axe dieser Ebene liegt. Daher die Sätze:

Drei Ebenen gehen durch dieselbe Gerade oder schneiden sich in einem Punkte,	*Drei Punkte liegen in einer Geraden oder in einer Ebene**),

die wir allgemein aussprechen können, weil alle möglichen Fälle jetzt erörtert sind (Nr. 14.).

Mit diesen Sätzen identisch sind die folgenden:

Durch einen Punkt, der nicht auf einer Geraden gelegen ist, und diese Gerade lässt sich eine und nur eine Ebene legen.	*Eine Ebene, die nicht durch eine Gerade geht, schneidet diese nur in einem Punkte.*
Wenn zwei Gerade zweiter Art einen Punkt gemein haben, liegen sie in einer Ebene.	*Wenn zwei Gerade zweiter Art in derselben Ebene liegen, haben sie einen Punkt gemein.*

Um den Satz links zu beweisen, legen wir durch irgend einen Punkt der einen Geraden und die zweite eine Ebene. Diese muss dann auch die erste Gerade ganz enthalten, weil sie zwei Punkte von ihr enthält.

Hiermit sind jetzt für die imaginären Elemente unter sich und in ihrer Verbidung mit den reellen ganz dieselben Gesetze nachgewiesen, die für die letzteren gelten.

§ 6.

Vom Sinne bei Elementen einer Geraden zweiter Art.

22. Vier (reelle oder imaginäre) Elemente eines Elementargebildes zusammen genommen sollen *ein Wurf* heissen**). Dabei ist jedoch Rücksicht zu nehmen auf die Ordnung, in welcher die Elemente genommen werden, so dass z. B. die beiden Würfe $ABCD$ und $ABDC$ als verschieden betrachtet werden. Aus der Betrachtung der Geraden zweiter Art ergiebt sich nun eine Unterscheidung der Würfe in Arten, die sich auch auf andere Gebilde übertragen lässt und für die Theorie der Projectivität imaginärer Gebilde von Wichtigkeit ist.

Es seien $AB\Gamma\Delta$ vier (natürlich imaginäre) Elemente einer Geraden zweiter Art, also vier Punkte oder vier Ebenen. $pqrs$ seien im ersten Falle ihre reellen Träger, im zweiten ihre reellen Axen. *Wenn nun die vier Geraden $pqrs$ einer und derselben Regelschaar angehören, so sagt man, der Wurf $AB\Gamma\Delta$ sei neutral oder die vier Elemente gehörten einer Kette an****). Da eine Regelschaar durch drei Gerade bestimmt ist, so wird eine Kette durch drei Elemente einer Geraden zweiter Art bestimmt sein.

---

*) St. B. Nr. 139.
**) St. B. Nr. 24.
***) St. B. Nr. 196.

Man nennt nun einen Wurf $ABCD$ von vier reellen Elementen eines Gebildes einen *ordentlichen Wurf**), wenn das erste und dritte durch das zweite und vierte getrennt sind, wenn also AC durch BD getrennt sind, oder wenn die Elemente $ABCD$ in dieser Ordnung auf einander folgen, was wir dadurch ausdrücken wollen, dass wir sagen, die vier Elemente $ABCD$ bilden eine Folge. Wendet man diesen Begriff auf den Wurf $pqrs$ an, so sind drei Fälle möglich.

Nämlich entweder sind pr getrennt durch qs oder ps durch qr oder pq durch rs, d. h. entweder ist $pqrs$ oder $pqsr$ oder $psqr$ ein ordentlicher Wurf. Je nachdem der erste, zweite oder dritte Fall stattfindet, soll $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ ein neutraler Wurf von der ersten, zweiten oder dritten Art genannt werden.

23. Es mögen nun die vier Linien $pqrs$ nicht derselben Regelschaar angehören. Dann kann man wenigstens eine Regelschaar bestimmen, zu deren Geraden pqr gehören. Weil s diese Regelschaar nicht schneidet (§ 5.), muss es ganz auf einer und derselben Seite der Fläche liegen und es liegt nun nahe, den Wurf $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ zu classificiren nach der Seite, auf welcher s liegt. Dies soll im Folgenden geschehen unter der Voraussetzung, $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ seien vier Punkte der Geraden.

Es seien aa_1bb_1 vier Leitstrahlen der Regelschaar pqr. Die Leitstrahlen sind in der Geraden zweiter Art involutorisch gepaart und ihre Schaar wird mit einem gewissen Sinne behaftet angenommen; die Bezeichnungen seien so gewählt, dass aa_1bb_1 Gerade zweier Paare sind und aba_1 den Sinn angiebt, also aba_1b_1 eine Darstellung der Geraden zweiter Art ist. Da Δ in der imaginären Ebene $p(aba_1b_1)$ liegt, welche je alle Punkte der Geraden enthält, so wird s von dem Schnittpunkte mit den Ebenen des Büschels $p(aba_1b_1)$ in demselben Sinne durchlaufen, welchen die auf s liegende Punktinvolution Δ hat. Schneiden wir aber s mit dem Büschel $a(pqr)$, den wir uns im Sinne $a(pqr)$ durchlaufen denken, so wird sich dieser Schnittpunkt entweder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne bewegen wie der vorige. Auf diesen Unterschied ist die Eintheilung gegründet. Sie ist aber scheinbar abhängig von dem Leitstrahle a, der hierbei benutzt wurde. Es soll in den nächsten Nummern gezeigt werden, dass dies nur scheinbar ist und dass zwei Gerade auf verschiedenen Seiten der Regelschaar pqr liegen, wenn die eine in gleichem, die andere in entgegengesetztem Sinne von beiden Ebenenbüscheln durchlaufen wird.

24. Sei c irgend ein anderer Leitstrahl. Würde nun der Schnittpunkt von s mit einer um c im Sinne $c(pqr)$ sich drehenden Ebene in entgegengesetztem Sinne sich bewegen, wie der Schnittpunkt mit $a(pqr)$, so müssten die beiden so auf s erzeugten, zu der Regelschaar

*) St. B. Nr. 83.

perspectivischen und daher unter sich projectivischen Punktreihen zwei Punkte entsprechend gemein haben. Durch diese müssten dann gleichzeitig gehen eine Ebene durch a und eine durch c und folglich eine Gerade der Regelschaar pqr, d. h. s müsste diese Fläche schneiden, was im vorliegenden Falle ausgeschlossen ist. Folglich ist die Eintheilung der vorigen Nummer von der Wahl des Leitstrahles unabhängig*).

Wenn s die Fläche schneidet, so lässt dies noch nicht schliessen, dass die beiden Büschel diese Linie in Punktreihen entgegengesetzten Sinnes schneiden. Dazu ist noch nöthig, dass die den beiden Punktreihen gemeinsamen Elemente durch je zwei entsprechende getrennt sind. Seien A und B die gemeinsamen Punkte auf s und $a'b'$ die durch sie gehenden Leitstrahlen der Regelschaar pqr; t sei eine beliebige Gerade dieser Regelschaar. Dann schneiden die beiden Ebenen at, ct s in zwei entsprechenden Punkten, die durch A und B getrennt sind, daher auch die Ebenen at, ct durch die Elemente $a't$, $b't$ getrennt sind, welche man durch t und A, B legen kann. Hieraus folgt aber, da dies für eine beliebige Gerade t der Regelschaar pqr gilt, dass die beiden Leitstrahlen ac durch die $a'b'$ getrennt sein müssen.

25. Es soll jetzt gezeigt werden, dass zwei Strahlen s und t, die die Fläche nicht schneiden und von welchen die eine s von den beiden Büscheln $a(pqr)$ und $p(aba_1)$ in gleichem Sinne, die andere t in entgegengesetztem Sinne beschrieben wird, auf verschiedenen Seiten von pqr liegen.

Um zwei Linien a und p, die sich schneiden, drehen sich zwei Ebenen, jede in einem bestimmten Sinne. Wenn beide eine Gerade s schneiden, so können sich die beiden Schnittpunkte in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung bewegen. Was eintritt, wird davon abhängen, in welchem von den beiden Scheitelräumen, in die die Ebene ap durch a und p getheilt wird, jene Gerade s diese Ebene trifft. Denn in einem dieser Räume bewegen sich beide Ebenen in gleicher Richtung, im andern in entgegengesetzter. Sind zwei Linien nun vorhanden, so werden die Schnittpunkte jener beiden Ebenen auf einer in gleichem Sinne, auf der andern in entgegengesetztem Sinne sich bewegen, wenn beide die Ebene ap in verschiedenen Scheitelräumen treffen.

Da dies der Annahme nach für s und t zutrifft, werden ihre Schnittpunkte mit der Ebene ap in verschiedene Scheitelräume fallen oder durch die Linien ap getrennt sein, daher auf verschiedenen Seiten der Fläche liegen. Dies gilt demnach auch von den Linien s, t selbst, weil sie die Fläche nicht schneiden.

*) St. B. Nr. 55.

26. Wir haben also jetzt die Berechtigung zu definiren*):

Sind ABΓΔ *vier Punkte einer Geraden zweiter Art, pqrs ihre reellen Träger, so soll vom Punkte* Δ *gesagt werden, er liege im Sinne* ABΓ *oder im entgegengesetzten, je nachdem die beiden Ebenenbüschel* $a(pqr)$ *und* $p(aba_1)$ *in gleichem oder entgegengesetztem Sinne s beschreiben oder je nachdem s vom Ebenenbüschel* $a(pqr)$ *in einem Sinne beschrieben wird, der dem gleich oder entgegengesetzt ist, in welchem s beschrieben werden muss, um* Δ *darzustellen.*

Sind ABΓΔ *vier Ebenen einer Geraden zweiter Art, pqrs ihre reellen Axen, so soll von der Ebene* Δ *gesagt werden, sie liege im Sinne* ABΓ *oder im entgegengesetzten, je nachdem die beiden Punktreihen* $a(pqr)$ *und* $p(aba_1)$ *den Ebenenbüschel s in gleichem oder entgegengesetztem Sinne beschreiben, oder je nachdem s von der Punktreihe* $a(pqr)$ *in gleichem oder entgegengesetztem Sinne beschrieben wird, mit dem, in welchem s beschrieben werden muss, um* Δ *darzustellen.*

Auf der rechten Seite ist dabei unter der Punktreihe $a(pqr)$ die verstanden, in welcher die Linie a von den Linien pqr getroffen wird, und analog ist es bei der $p(aba_1)$. Die beiden Punktreihen $a(pqr)$ und $p(aba_1)$ beschreiben das Ebenenbüschel s in gleichem (entgegengesetztem) Sinne, wenn zwei Ebenen sich in gleichem (entgegengesetztem) Sinne drehen, welche s mit zwei Punkten verbinden, von welchen einer auf a im Sinne $a(pqr)$, der andere auf p im Sinne $p(aba_1)$ sich bewegt.

Da die Definition auf dem Bewegungssinne $a(pqr)$ beruht, der mit $a(qrp)$ und $a(rpq)$ identisch ist, so ist es einerlei zu sagen, Δ liege im Sinne ABΓ oder BΓA oder ΓAB. Wenn Δ nicht im Sinne ABΓ liegt, so muss es im Sinne ΓBA liegen, der mit BAΓ, AΓB identisch ist.

27. Bei den Definitionen der vorigen Nummer kommt es einerseits darauf an, ob die Punktreihe s von den beiden Büscheln in gleichem oder entgegengesetztem Sinne beschrieben wird, andererseits wie der Ebenenbüschel s von zwei Punktreihen beschrieben wird. Diese beiden Arten stehen in Beziehung; es gilt nämlich der Satz**):

Wird die Punktreihe s von den beiden Büscheln $a(pqr)$ und $p(aba_1)$ in gleichem Sinne beschrieben, so wird der Ebenenbüschel s von den Punktreihen $a(pqr)$ und $p(aba_1)$ in entgegengesetztem Sinne beschrieben und umgekehrt. Ob s von jenen beiden Büscheln in gleichem oder entgegengesetztem Sinne beschrieben wird, hängt davon ab, in welchem der beiden Scheitelräume es die Ebene ap trifft. Davon hängt aber auch, wie man sofort sieht, ab, ob der Ebenenbüschel s von den beiden Punktreihen auf a und p in gleichem oder entgegengesetztem Sinne beschrieben wird. Betrachten wir nun die Gerade t, welche die Punkte bq und a_1r verbindet, oder in der sich die Ebenen

*) St. B. Nr. 196.
**) St. B. Nr. 64.

br und a_1q schneiden und welche nicht durch den Punkt ap geht. Die Ebenen $a(pqr)$ schneiden dann t in denselben Punkten der Reihe nach wie die $p(aba_1)$, daher wird t von den beiden Büscheln in gleichem Sinne beschrieben. Dagegen geht eine Ebene durch t und den Punkt pb auch durch den Punkt a_1r und die Ebene durch t und den Punkt pa_1 durch den Punkt aq. Folglich, wenn sich eine Ebene so um t dreht, dass sie die Punktreihe $p(aba_1)$ in diesem Sinne durchläuft, bewegt sich ihr Schnittpunkt mit a im Sinne $a(prq)$, der dem $a(pqr)$ entgegengesetzt ist. Für die Gerade t ist also der Satz bewiesen. Trifft s nun die Ebene ap in demselben Scheitelraume, so findet dasselbe statt wie bei t; treffen beide aber die Ebene in verschiedenen Scheitelräumen, so wird die Punktreihe s von den beiden Büscheln in entgegengesetztem Sinne beschrieben, während die beiden Punktreihen den Büschel s im gleichen Sinne beschreiben, so dass der Satz für jede Linie s gilt.

28. Seien nun wieder $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ vier Ebenen einer Geraden zweiter Art α und $pqrs$ ihre reellen Axen. Wir schneiden die conjungirte Gerade α' durch jede dieser vier Ebenen. Da jede nur einen Punkt mit ihr gemein haben kann, muss der Schnittpunkt der conjungirten Geraden mit A den reellen Träger p haben, denn er liegt dann in A. Ebenso haben die Schnittpunkte der Ebenen $\mathsf{B\Gamma\Delta}$ mit α' die reellen Träger qrs. Seien nun aa_1bb_1 Leitstrahlen der Regelschaar pqr und aba_1b_1 eine Darstellung von α, so ist a_1bab_1 eine Darstellung von α'. Daher sind die drei Punktinvolutionen $p(a_1bab_1)$, $q(a_1bab_1)$, $r(a_1bab_1)$ Darstellungen der Schnittpunkte $\mathsf{A'B'\Gamma'}$ der Ebenen $\mathsf{AB\Gamma}$ und α', und das Ebenenbüschel $p(a_1ba_1b_1)$ schneidet s in einer Darstellung des Punktes Δ', der auf α' und Δ gelegen ist.

Ist nun s eine Gerade der Regelschaar pqr, so ist der Wurf $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ und der $\mathsf{A'B'\Gamma'\Delta'}$ neutral und beide Würfe gehören auch zu derselben Art der neutralen Würfe, weil diese nur von der Anordnung der Geraden $pqrs$ auf der Regelschaar abhängt.

Gehört aber s nicht der Regelschaar an und ist Δ im Sinne $\mathsf{AB\Gamma}$ gelegen, so wird der Büschel s von den beiden Punktreihen $p(aba_1)$ und $a(pqr)$ in demselben Sinne beschrieben; daher nach der vorigen Nummer die Punktreihe s von den beiden Büscheln $a(pqr)$ und $p(aba_1)$ in entgegengesetztem Sinne beschrieben ist. Folglich wird s in gleichem Sinne beschrieben von den Büscheln $a(pqr)$ und $p(a_1ba)$. Dies sagt aber aus, dass auch Δ' im Sinne $\mathsf{A'B'\Gamma'}$ liegt.

Man sagt, zwei Würfe $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ *und* $\mathsf{A'B'\Gamma'\Delta'}$ *seien gleicher Art, wenn entweder beide neutral sind und derselben Classe von neutralen Würfen angehören oder* Δ *im Sinne* $\mathsf{AB\Gamma}$ *und* Δ' *im Sinne* $\mathsf{A'B'\Gamma'}$, *oder* Δ *nicht im Sinne* $\mathsf{AB\Gamma}$ *und* Δ' *nicht im Sinne* $\mathsf{A'B'\Gamma'}$ *gelegen ist.*

Daher kann man jetzt den Satz*) aussprechen:

Wenn vier Punkte einer Geraden zweiter Art in vier Ebenen der conjungirten Geraden liegen, so ist der Wurf der vier Punkte von derselben Art wie der Wurf der vier Ebenen.

§ 7.

Fortsetzung.

29. Wenn zwei reelle räumliche Systeme projectivisch auf einander bezogen sind**), so entspricht jedem einförmigen Gebilde in einem ein solches im zweiten, jeder Involution wieder eine Involution, daher kann man auch jedem imaginären Elemente in einer ein imaginäres Element des andern zuordnen. Vier Punkten $\mathsf{ABΓΔ}$ einer Geraden zweiter Art entsprechen also wieder vier Punkte $\mathsf{A'B'Γ'Δ'}$ einer Geraden zweiter Art.

Es mögen $pqrs$ die reellen Träger der vier Punkte $\mathsf{ABΓΔ}$ sein, $p'q'r's'$ die ihnen entsprechenden Geraden, so sind dies die Träger der entsprechenden Punkte $\mathsf{A'B'Γ'Δ'}$. Ist ferner aba_1b_1 eine Darstellung der einen Geraden und sind aa_1, bb_1 Leitstrahlen von pqr, so ist $a'b'a_1'b_1'$ eine Darstellung der entsprechenden Geraden und $a'b'a_1'b_1'$ sind Leitstrahlen von $p'q'r'$. Gehört nun s der Regelschaar pqr an, so gehört auch s' der Regelschaar $p'q'r'$ an, und beide Würfe sind neutral. Welcher Classe von neutralen Würfen $\mathsf{ABΓΔ}$ angehört, hängt davon ab, welcher der drei Würfe $pqrs$, $pqsr$, $psqr$ ordentlich ist. Da nun einem ordentlichen Wurfe wieder ein solcher entspricht, muss der Wurf $\mathsf{A'B'Γ'Δ'}$ derselben Classe der neutralen Würfe angehören wie $\mathsf{ABΓΔ}$. Gehört aber s der Regelschaar pqr nicht an und wird es von den beiden Büscheln $a(pqr)$ und $p(aba_1)$ in gleichem Sinne beschrieben, so gehört auch s' der Regelschaar $p'q'r'$ nicht an und wird von den Büscheln $a'(p'q'r')$ und $p'(a'b'a_1')$ in demselben Sinne beschrieben. Folglich:

*Wenn zwei reelle räumliche Systeme projectivisch auf einander bezogen sind, entspricht jedem imaginären Elemente wieder ein solches und jedem Wurf aus vier Elementen einer Geraden zweiter Art entspricht wieder ein Wurf, der mit jenem gleicher Art ist. Man nennt dann die beiden Gebilde reell projectivisch****).

30. Seien nun $ABCD$ vier reelle oder imaginäre Punkte einer reellen Geraden f, α und α' zwei Gerade zweiter Art, die f nicht schneiden. Durch drei reelle Punkte PQR von f lege man die drei

---

*) St. B. Nr. 197.

**) St. B. Nr. 198.

***) St. B. Nr. 149.

Strahlen des Strahlensystems von α, was stets angeht, weil f diesem Systeme nicht angehört. Diese bestimmen dann im Strahlensysteme eine Regelschaar, von der f ein Leitstrahl ist, weil er drei Punkte mit ihr gemein hat (Nr. 19.). Unter $f_1 g g_1$ drei andere Leitstrahlen verstanden, sei $f g f_1 g_1$ eine Darstellung von α; $p' q' r'$ seien die Strahlen aus dem zu α' gehörigen Systeme, welche durch PQR gehen, und $f g' f_1' g_1'$ eine Darstellung von α', wobei natürlich $f f_1' g' g_1'$ Leitstrahlen von $p' q' r'$ sind. Bezieht man nun zwei räumliche Systeme so auf einander, dass den fünf Punkten P, Q, pg, qg, rf entsprechen der Reihe nach die fünf Punkte P, Q, $p'g'$, $q'g'$, $r'f'$, so entsprechen den Geraden f und g die Linien f und g'. Daher auch der Linie r die r', der Punkt rf sich selbst, folglich auch jeder reelle oder imaginäre Punkt der Geraden f sich selbst. Den Linien $g f_1 g_1$ entsprechen die Linien $g' f_1' g_1'$ und daher der Geraden zweiter Art α die α'. Somit auch den Ebenen, welche die Punkte $ABCD$ auf f aus α projiciren, die Ebenen, welche $ABCD$ aus α' projiciren, so dass die beiden Würfe von vier Ebenen gleicher Art sind. Folglich*):

Wenn man vier reelle oder imaginäre Punkte $ABCD$ einer reellen Geraden von zwei Geraden zweiter Art $\alpha\alpha'$ aus durch je vier Ebenen projicirt, so sind die beiden Würfe $\alpha(ABCD)$, $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art.

Wenn man vier reelle oder imaginäre Ebenen $ABCD$ einer reellen Geraden mit zwei Geraden zweiter Art $\alpha\alpha'$ schneidet, so sind die beiden Würfe $\alpha(ABCD)$, $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art.

31. Der Satz soll nun auf den Fall erweitert werden, dass die vier Punkte $ABCD$ nicht in einer reellen Geraden f, sondern in einer beliebigen Geraden β liegen, die aber weder α noch α' schneidet**).

Zuerst sei der Fall betrachtet, dass α und α' sich in einem Punkte A treffen, die durch A und B gelegte Ebene imaginär ist und ihre reelle Axe f nicht durch A geht. Die zweimal vier Ebenen $\alpha(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ schneiden dann f in den nämlichen Punkten, in welchen f von den vier Linien getroffen wird, die A mit $ABCD$ verbinden, daher sind nach dem vorigen Satze die beiden Würfe $\alpha(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art, weil sie dieselben Punkte einer reellen Geraden projiciren. Seien nun α und α' beliebig, so lege man eine Gerade zweiter Art γ so, dass sie α und α' schneidet in zwei Punkten A und A', und wende dann das eben erhaltene Resultat an. Dann folgt, dass die beiden Würfe $\alpha(ABCD)$ und $\gamma(ABCD)$ gleicher Art sind und dass die Würfe $\gamma(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art sind, was zeigt, dass auch $\alpha(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art sind.

Der vorige Satz beruht aber auf den Voraussetzungen, dass die

*) St. B. Nr. 199, I.
**) St. B. Nr. 199, II., III.

Ebenen $A\beta$ und $A'\beta$ imaginäre sind, die reelle Axe der Ebene $A\beta$ nicht durch A und die von $A'\beta$ nicht durch A' geht; ferner musste γ eine Gerade zweiter Art sein, die reellen Träger von A und A' dürfen sich also nicht schneiden.

Ist β eine Gerade erster Art, so wird die Ebene $A\beta$ reell, wenn A in der reellen Ebene von β gelegen ist. Ist dies nicht der Fall, so kann die reelle Axe von $A\beta$ nur dann durch A gehen, wenn der reelle Träger von A den reellen Punkt von β enthält. Es giebt aber nach dem Früheren nur einen Punkt von α, dessen Träger dieser Bedingung genügt. Daher darf für A jeder Punkt der Geraden α gewählt werden, der nicht mit einem der beiden erwähnten zusammenfällt. Für A' kann nun jeder Punkt von α' genommen werden, mit Ausnahme von zweien, dessen reeller Träger nicht den von A schneidet. Alle Träger, welche den von A schneiden, bilden aber nach Nr. 19. eine Regelfläche, und ausser diesen sind noch unzählig viele vorhanden. Daher sind hier die Bedingungen stets erfüllbar.

Ist aber β eine Gerade zweiter Art, so sind die Ebenen $A\beta$ und $A'\beta$ stets imaginär. Dagegen kann die reelle Axe von $A\beta$ durch A gehen, wenn nämlich der reelle Träger p von A auch die reelle Axe der Ebene βA ist. Dann gehört p gleichzeitig den Strahlensystemen der Geraden α und β an. Beide Strahlensysteme können aber nur die Geraden einer Regelschaar gemein haben, ohne zusammenzufallen oder conjungirt zu sein. Denn haben sie vier Strahlen gemein, die nicht einer und derselben Regelschaar angehören, so müssen die Geraden $\alpha\beta$ conjungirt sein, und die Strahlensysteme haben alle Strahlen gemein. Es giebt unzählig viele Punkte A von α, deren reelle Träger jener Regelschaar nicht angehören, und irgend einer von ihnen liefert eine Ebene $A\beta$, deren reelle Axe nicht durch A geht, wenn die Geraden α und β nich conjungirt sind. Ist A gewählt, so muss, wenn α' und β nicht conjungirt sind, A' auf α' nach dem Vorigen so gewählt werden, dass sein Träger keiner von zwei Regelschaaren angehört. Solche Punkte giebt es aber noch unzählig viele. Denn durch jeden Punkt, der auf keiner der beiden Regelschaaren liegt, geht ein Träger eines solchen Punktes. Somit gilt der geführte Beweis nur, wenn keine der beiden Geraden $\alpha\alpha'$ zu β conjungirt ist.

Ist nun drittens eine der beiden Geraden, z. B. α zu β conjungirt, so lege man eine weitere Gerade zweiter Art γ so, dass sie α in einem Punkte B schneidet, ohne zu α' conjungirt zu sein. Nimmt man nun in der Ebene $B\beta$ eine beliebige Gerade β' an, die weder zu α' noch zu β conjungirt ist und nicht durch B geht, was stets möglich ist, so wird diese von den beiden Büscheln $\alpha(ABCD)$ und $\gamma(ABCD)$ in denselben vier Punkten geschnitten. Nach dem ersten Theile des vorliegenden Beweises sind dann die beiden Würfe gleicher Art. Nach

dem zweiten Theile aber sind auch die beiden $\gamma(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art.

Alles zusammengefasst hat man jetzt die Sätze:

Wenn man vier Punkte einer Geraden $ABCD$ von zwei die Gerade nicht schneidenden Geraden zweiter Art $\alpha\alpha'$ projicirt, so sind die beiden Würfe $\alpha(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art.

Wenn man vier Ebenen $ABCD$ einer Geraden durch zwei Gerade zweiter Art $\alpha\alpha'$ schneidet, so sind die beiden Würfe $\alpha(ABCD)$ und $\alpha'(ABCD)$ gleicher Art.

§ 8.

Vom Sinne bei Elementen der übrigen Gebilde.

32. Sind nun $ABCD$ vier Elemente einer reellen Geraden oder einer Geraden erster Art f, so soll die Art des Wurfes $ABCD$ bestimmt werden*), indem man eine Gerade zweiter Art α, die f nicht schneidet, mit den vier Elementen schneidet oder verbindet und die Art des Wurfes $\alpha(ABCD)$ festsetzt. Nach dem Satze der vorigen Nummer ist diese Art unabhängig von der Wahl der Geraden zweiter Art.

Sind die vier Elemente reell, so ist der Wurf neutral. Denn die vier reellen Axen oder Träger von $\alpha(ABCD)$ sind dann Gerade, welche die reelle Gerade AD schneiden und folglich einer Regelschaar angehören. Da die Aufeinanderfolge der vier Elemente $ABCD$ dieselbe ist wie die jener Träger, so ist die Art des neutralen Wurfes nach der früheren Bestimmung (Nr. 22.) mit der identisch, die nach der gewöhnlichen Bestimmung sich ergiebt.

Sind aber die drei Punkte ABC reell und der vierte Δ imaginär und EFE_1F_1 eine Darstellung, so gehen die reellen Axen pqr der drei Ebenen αA, αB, αC durch die drei Punkte ABC. Ist s die reelle Axe der vierten Ebene $\alpha\Delta$, so ist diese Ebene dargestellt durch die vier Ebenen $s(EFE_1F_1)$. Es liegt nun Δ im Sinne ABC, wenn die Ebene $\alpha\Delta$ im Sinne $\alpha(ABC)$ liegt, d. h. nach Nr. 26., wenn die Punktreihe $f(pqr)$ den Ebenenbüschel s in demselben Sinne beschreibt, in welchem er beschrieben werden muss, um die Ebene $\alpha\Delta$ darzustellen, d. h. im Sinne EFE_1. Folglich liegt Δ im Sinne ABC, wenn der Sinn ABC mit dem EFE_1 übereinstimmt. Natürlich gilt auch der dualistisch entsprechende Satz, wenn $ABC\Delta$ Ebenen sind, also kann man sagen:

Sind die drei Elemente ABC der reellen Geraden f reell, Δ aber imaginär und EFE_1F_1 eine Darstellung, so liegt Δ im Sinne ABC

*) St. B. Nr. 200.

oder nicht, je nachdem der Sinn ABC mit dem EFE_1 übereinstimmt oder nicht.

33. Jetzt kann man den allgemeinen Satz*) aufstellen:

Wenn vier Punkte einer Geraden in vier Ebenen einer zweiten Geraden liegen, so sind beide Würfe gleicher Art.

Es sind hierbei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Sind die beiden Geraden conjungirt und beide zweiter Art, so ist der Satz schon oben (28.) bewiesen. Sind aber die beiden Linien $\alpha\beta$ nicht conjungirt und zweiter Art, so sei α_1 zu α conjugirt. Durch α mögen die vier Ebenen $AB\Gamma\Delta$ gehen und β in den vier Punkten $A'B'\Gamma'\Delta'$, α_1 aber in den $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ schneiden. Dann sind aber die beiden Würfe $AB\Gamma\Delta$ und $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ gleicher Art nach dem ersten Falle (resp. Nr. 28.).

Die beiden Würfe $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$ sind aber gleicher Art nach Nr. 31., weil sie Schnitte der Geraden zweiter Art $\alpha_1\beta$ mit vier Ebenen einer andern Geraden sind. Folglich sind $AB\Gamma\Delta$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$ gleicher Art.

Ist eine der beiden Geraden a, in welcher die Ebenen $ABCD$ sich schneiden, reell oder erster Art und die andere α zweiter Art, so ist die Art des Wurfes $ABCD$ der Definition in Nr. 32. gemäss gleich der Art des Wurfes $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, den man erhält, wenn man die vier Ebenen durch eine Gerade zweiter Art γ schneidet. Der Wurf $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ist aber gleicher Art mit dem $A'B'\Gamma'\Delta'$, in welchen $ABCD$ die Gerade α schneidet, weil α und β zweiter Art sind (Nr. 31.).

Sind dagegen $AB\Gamma\Delta$ vier Ebenen der Geraden α zweiter Art, welche die Gerade a (reell oder erster Art) in den vier Punkten $ABCD$ schneiden, so wird die Art des Wurfes $ABCD$ bestimmt, indem man von einer Geraden zweiter Art β diese vier Punkte projicirt. Der Wurf $ABCD$ ist dann mit $\beta(ABCD)$ gleicher Art und dieser mit $AB\Gamma\Delta$ nach Nr. 31., weil die Axen beider Büschel α, β Gerade zweiter Art sind.

Also ist auch in den drei letzten Fällen die Behauptung bewiesen.

Ist endlich jede der beiden Geraden a, b mit mindestens einem reellen Punkte versehen, so nehme man auf a einen imaginären Punkt Λ so an, dass die Ebene Λb eine imaginäre Ebene wird, was stets möglich ist. In dieser Ebene nehme man nun eine Gerade zweiter Art α an, die nicht durch Λ geht, und also von den vier Ebenen $ABCD$, die durch a gehen, in den vier Punkten $AB\Gamma\Delta$ getroffen wird. Dann sind nach dem vorigen Falle die beiden Würfe $ABCD$ und $AB\Gamma\Delta$ gleicher Art. Nun lege man ferner durch Λ eine beliebige Gerade zweiter Art β, die b nicht schneidet, so werden sich von ihr

*) St. B. Nr. 201.

aus die vier Punkte $AB\Gamma\Delta$ auf α projiciren nach $A'B'C'D'$ auf b. Dann ist der Wurf $\beta(AB\Gamma\Delta)$ gleicher Art mit $AB\Gamma\Delta$ nach den beiden ersten Fällen und ferner $\beta(AB\Gamma\Delta)$ gleicher Art mit $A'B'C'D'$ nach dem vorigen Falle, so dass auch schliesslich $a(ABCD)$ mit $A'B'C'D'$ gleicher Art ist. Womit dann der Satz vollständig bewiesen ist.

34. Wenn vier Gerade erster Art $\alpha\beta\gamma\delta$ in derselben Ebene K liegen und durch denselben Punkt K' gehen, so soll*) der Wurf $\alpha\beta\gamma\delta$ der Art nach gleich genannt werden

dem Wurfe aus den vier Ebenen AB CD, welche die vier Geraden $\alpha\beta\gamma\delta$ enthalten und sich in einer Geraden a schneiden, die durch K geht.

dem Wurfe aus den vier Punkten $A'B'$ $C'D'$, welche die Schnittpunkte der vier Linien $\alpha\beta\gamma\delta$ sind, mit einer Linie a', die in der Ebene K' gelegen ist.

Weil die vier Punkte, die auf der rechten Seite auftreten, in den vier Ebenen liegen, die links vorkommen, so sind nach dem vorigen Satze die Würfe gleicher Art, also die Definitionen identisch. Um zu zeigen, dass die links von der Geraden a nicht abhängt, lege man durch K eine zweite Gerade b und in der Ebene K' die Linie a', dann ist $a(ABCD)$ gleichen Sinnes mit $A'B'C'D'$ und dieses wieder mit $a'(ABCD)$, was zu beweisen war.

35. Die vorhergehenden Definitionen und die Sätze, die sich aus ihnen ergeben haben, lassen sich zusammenfassen in den einen**): *Perspectivische Würfe sind in Bezug auf den Sinn gleicher Art.* Sind nun zwei Systeme reell projectivisch, d. h. die reellen Elemente, und in Folge dessen auch die imaginären (Nr. 29.), projectivisch auf einander bezogen, so entspricht jedem imaginären Elemente wieder ein solches und vier Elementen eines reellen Elementargebildes wieder vier Elemente eines reellen Gebildes. Diese beiden Systeme sind nun entweder perspectivisch gelegen oder sie lassen sich wenigstens durch eine Reihe von anderen so verbinden, dass jedes zum folgenden perspectivisch ist. Die Würfe aus den beiden Gruppen von vier Elementen sind also gleicher Art. Sind aber die Elemente $AB\Gamma\Delta$ einem nicht reellen Gebilde, z. B. einer Geraden zweiter Art α angehörig, so nehme man eine reelle Gerade p, die α nicht schneidet, dann ist der Wurf $AB\Gamma\Delta$ dem $p(AB\Gamma\Delta)$ der Art nach gleich. Der Geraden α entspricht eine Gerade zweiter Art α', der reellen Geraden p wieder eine solche p' und den vier Punkten $AB\Gamma\Delta$ die $A'B'\Gamma'\Delta'$. Dann sind die Würfe $p(AB\Gamma\Delta)$ und $p'(A'B'\Gamma'\Delta')$ gleicher Art der projectivischen Beziehung wegen, weil sie aus Elementen von zwei reellen Geraden gebildet sind, und $p'(A'B'\Gamma'\Delta')$ gleicher Art mit $A'B'\Gamma'\Delta'$, was beweist, dass auch die

*) St. B. Nr. 202.
**) St. B. Nr. 203.

Würfe $AB\Gamma\Delta$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$ gleicher Art sind. Auf diesen Fall kann mann die übrigen durch Projection zurückführen.

36. *Wenn man in einem Wurfe zwei Elemente und zugleich die beiden andern vertauscht, so entsteht ein Wurf, der mit dem ursprünglichen gleicher Art ist**).

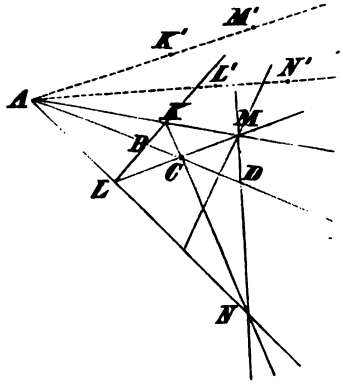
Seien z. B. $ABCD$ vier Punkte einer Geraden a. Man lege durch A eine zweite Gerade b und projicire von einem Punkte K aus, der weder auf a noch auf b, aber in der Ebene ab gelegen ist, die vier Punkte von a nach b in die Punkte $AB'C'D'$; nun projicire man ferner $AB'C'D'$ von D aus auf KC nach $CB''C'K$ und diese wieder von B' aus zurück auf a nach $CDAB$. Dann ist von den Würfen $ABCD$, $AB'C'D'$, $CB''C'K$, $CDAB$ jeder folgende eine Projection des vorhergehenden und folglich der letzte gleicher Art mit dem ersten. Auf dieselbe Weise zeigt man die Richtigkeit der übrigen Behauptungen.

§ 9.

Harmonische Elemente.

37. Es seien ABC drei Punkte einer Geraden. Man kann nun die Construction des vollständigen Vierecks anwenden, um einen vierten Punkt aus jenen dreien zu construiren. Man lege zu dem Zwecke etwa durch A (Fig. 5, die übrigens nur schematisch ist) die beiden Linien ab, durch C die beiden cd, so dass von den Verbindungslinien der Schnittpunkte dieser Linienpaare eine KL durch B geht. Die zweite MN wird dann in einem Punkte D die Linie AC treffen. Sind die drei Punkte ABC und also die ganze Construction reell, so sind die beiden Punkte B und D auch wirklich von einander und von AC verschieden.

Fig. 5.



Im allgemeinen Falle, der hier betrachtet wird, in welchem alle oder einige der Punkte imaginär sind, muss dies jedoch bewiesen werden. Dies kann so geschehen**):

Sei zunächst der Punkt A reell angenommen. Man lege durch ihn eine reelle Ebene, die die Geraden ab nicht enthält, nehme in ihr vier reelle Punkte $K'L'M'N'$ so an, dass die Linien $K'M'$ und $L'N'$ sich in A schneiden. Dann schneiden sich die Linien MM'

*) St. B. Nr. 205.
**) St. B. Nr. 142.

und KK', so dass das Viereck $KLMN$ eine Projection des Vierecks $K'LM'N$ ist. Weil aber auch NN' und LL' sich schneiden, ist $K'LM'N$ eine Projection von $K'L'M'N'$. Von diesem letzten Viereck gilt aber, weil es reell ist, der Satz, dass eine Diagonale von den beiden andern in verschiedenen Punkten geschnitten wird. Somit gilt er auch von den vorhergehenden Vierecken, weil jedes eine Projection des andern ist und folglich auch vom gegebenen, so dass der Satz jetzt bewiesen ist für einen reellen Punkt A.

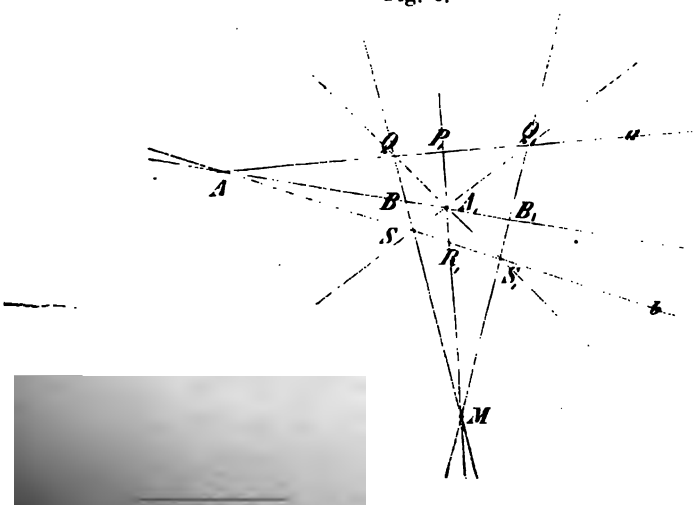
Ist aber A imaginär, so nehme man in einer beliebigen Ebene einen reellen Punkt A' an und projicire das Viereck $KLMN$ auf diese Ebene aus einem Punkte von AA' (der natürlich von diesen beiden verschieden sein muss). Von dieser Projectiven gilt der Satz, weil ein Eckpunkt reell ist, nach dem Vorigen; also auch von dem ursprünglichen Viereck.

Der Punkt D ist aber derselbe, auf welche Weise er auch aus den drei ABC construirt werden mag. Dies wird wörtlich durch dieselben Schlüsse bewiesen, die man anwendet, um den Satz für reelle Punkte zu beweisen*).

Vom Punkte D soll gesagt werden, dass er von B durch die beiden AC harmonisch getrennt ist. Dann gelten alle Sätze über harmonische Würfe, die für den Fall reeller Elemente bewiesen sind, auch für imaginäre Elemente und werden auch auf genau dieselbe Art bewiesen. Der wichtigste dieser Sätze ist der, *dass durch Projection eines harmonischen Wurfes wieder ein solcher entsteht.*

38. Seien AA_1, BB_1 zwei Punktenpaare einer Involution und AA_1 durch BB_1 harmonisch getrennt; dann stellt ABA_1B_1 einen imaginären Punkt A vor. Dieser ist von AA_1 harmonisch getrennt durch einen Punkt A_1, den wir jetzt construiren wollen. In einer AA_1 enthaltenden reellen Ebene legen wir durch A die reellen Geraden ab. Um nun die Construction von A_1 am einfachsten zu machen, legen wir durch B eine Gerade BM (Fig. 6),

Fig. 6.



*) St. Geometrie der Lage Nr. 93.

die a und b in Q und S schneide. Die Linie A_1Q möge dann b in S_1 und die A_1S a in Q_1 schneiden. Dann geht Q_1S_1 durch B_1 der Voraussetzung gemäss, dass ABA_1B_1 harmonisch ist. Dann ist $M(ABA_1B_1)$ eine durch A gehende imaginäre Gerade, die a und b in zwei Punkten trifft, deren Darstellungen sind AQP_1Q_1 und ASR_1S_1 und die den Punkten K und L der vorigen Nummer entsprechen. Durch diese Punkte und A_1 sind dann zwei Linien zu legen, c und d entsprechend, die durch $A_1(AQP_1Q_1)$ und $A_1(ASR_1S_1)$ dargestellt werden. Die erste schneidet b in dem Punkte N, dessen Darstellung AS_1R_1S ist, während der Schnitt M der zweiten mit a durch AQ_1P_1Q gegeben ist. Ihre Verbindungslinie ist $M(AB_1A_1B)$ und schneidet also die Gerade AA_1 in dem imaginären zu A conjungirten Punkte AB_1A_1B. Es ist also der zu A conjungirte Punkt A_1 durch AA_1 harmonisch getrennt von A, und da AA_1 ein beliebiges Paar der Involution war, die A und A_1 zu Grunde liegt, so folgt: *zwei conjungirte imaginäre Elemente werden durch jedes Paar der sie darstellenden Involution harmonisch getrennt**). Der Satz ist allgemein ausgesprochen, denn er überträgt sich von Punkten einer Geraden auf die andern imaginären Elemente.

39. Seien nun der reelle Punkt A, die beiden conjungirt imaginäre AA′ gegeben und der von A durch A und A′ harmonisch getrennte gesucht. Da nur ein solcher exisirt, so muss es zu der A gepaarte A' sein, der nach der vorigen Nummer die Bedingung erfüllt. Man kann also weiter sagen: Wenn zwei conjungirte imaginäre Punkte durch zwei reelle harmonisch getrennt sind, so sind diese gepaart in der Involution, welche die imaginären Punkte darstellt. Daraus folgt, dass *nur ein Punktenpaar existirt, welches die Punkte von zwei gegebenen reellen Paaren gleichzeitig harmonisch trennt.* Seien diese AA_1 und BB_1. Sind AA_1 durch BB_1 nicht getrennt, so besitzt die Involution $AA_1 \cdot BB_1$ zwei Ordnungselemente, welche die Bedingung erfüllen. Wenn aber AA_1 durch BB_1 getrennt sind, so müssen die gesuchten Punkte imaginär sein. Angenommen, es gäbe zwei imaginäre Punktenpaare AA′, BB′, welche gleichzeitig durch jene getrennt sind. Dann müssen A und A′ sowie B und B′ conjungirt sein und AA_1 sowie BB_1 Paare der Involution, welche die Punkte AA′BB′ darstellen müsste. Eine Involution stellt aber nur zwei conjungirte Punkte dar, folglich kann auch nur ein Punktepaar AA′ existiren, dessen Punkte durch ABA_1B_1 und A_1BAB_1 dargestellt werden.

40. Seien nun ABΓΔ vier Punkte einer Geraden zweiter Art und AΓ durch BΔ harmonisch getrennt. Die vier reellen Träger seien

*) St. B. Nr. 145.

$pqrs$ und a ein Leitstrahl der Regelschaar pqr. Nach der letzten Bemerkung Nr. 37. muss der Wurf $a(\mathsf{AB\Gamma\Delta})$, weil er einen harmonischen Wurf projicirt, selbst harmonisch sein. Die Ebenen durch a und $\mathsf{AB\Gamma}$ gehen auch durch die drei Geraden pqr, so dass $a(pqr\Delta)$ ein harmonischer Wurf sein muss. Die vierte harmonische zu drei reellen Ebenen ist aber reell. Folglich muss die Ebene $a\Delta$ reell sein, kann also nur die as sein. Daher gehören $pqrs$ derselben Regelschaar an und auf ihr sind pr durch qs harmonisch getrennt.

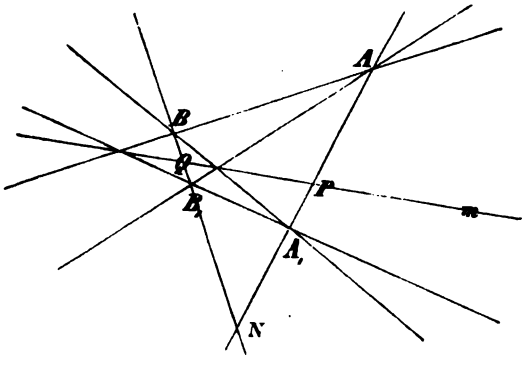
Somit*) bilden vier Punkte einer Geraden zweiter Art einen harmonischen Wurf, wenn ihre reellen Träger harmonisch liegen, und ein harmonischer Wurf aus vier Elementen einer Geraden zweiter Art ist neutral.

Der Satz überträgt sich nach den Definitionen und Sätzen der beiden vorhergehenden Paragraphen auf harmonische Würfe aus anderen Elementen, so dass man sagen kann:

Ein harmonischer Wurf ist stets neutral oder vier harmonische Elemente bilden eine Kette.

41. Wir betrachten zwei reelle Regelschaaren $mnaa_1$, $mnbb_1$, die zwei Gerade mn gemein haben; diese mögen durch aa_1 und durch bb_1 harmonisch getrennt sein. Durch m legen wir eine Ebene, welche die Strahlen naa_1bb_1 in den Punkten NAA_1BB_1 (Fig. 7) schneiden mögen. Diese Ebene enthält je einen Leitstrahl beider Regelschaaren, daher liegen die Punkte ANA_1 und BNB_1 in zwei Geraden, welche m in den Punkten P und Q resp. schneiden.

Fig. 7.



Weil nun mn durch aa_1 und bb_1 harmonisch getrennt sind, sind die Punkte PN durch AA_1 und QN durch BB_1 harmonisch getrennt, folglich ist $PANA_1 \overline{\wedge} QBNB_1 \overline{\wedge} QB_1NB$; und weil diese Punktreihen den Punkt N entsprechend gemein haben, liegen sie perspectivisch, woraus folgt, dass die Linien AB und A_1B_1 sowohl, als auch die AB_1 und A_1B sich in Punkten von m schneiden. Dies beweist, dass die Schnittcurve der beiden Regelschaaren mab und ma_1b_1 nur aus m und Leitstrahlen bestehen kann. Denn wäre ausserdem noch ein gemeinsamer Punkt R vorhanden, so würde eine durch ihn und m

*) St. B. Nr. 143.

gelegte Ebene, welche die Strahlen aa_1bb_1 in den Punkten AA_1BB_1 träfe, mab in dem Leitstrahl AB und ma_1b_1 im Leitstrahl A_1B_1 schneiden, und der Schnittpunkt von AB und A_1B_1 wäre dann R. Nach dem eben Bewiesenen liegt aber R auf m. Daher kann kein solcher Punkt existiren. Nur wenn für eine bestimmte Lage der Schnittebene die vier Punkte AA_1BB_1 in eine Gerade fallen und R auf dieser Geraden liegt, hört jener Widerspruch auf, so dass die beiden Regelschaaren Leitstrahlen (natürlich höchstens zwei) gemein haben können. Gleiches gilt von mab_1 und ma_1b.

Umgekehrt sei bekannt, dass die Schnittcurve der beiden Regelschaaren mab und ma_1b_1 nur aus m und Leitstrahlen bestehe und das Nämliche gelte für die Regelschaaren mab_1, ma_1b. Legen wir dann durch m eine Ebene, die keinen gemeinsamen Leitstrahl enthält und die Strahlen aa_1bb_1 in den Punkten AA_1BB_1 schneidet, so sind AB und A_1B_1 Leitstrahlen der ersten beiden Regelschaaren, ihr Schnittpunkt gehört beiden an und muss folglich nach der Annahme auf m liegen. Ebenso der Schnittpunkt von AB_1 und A_1B.

Man hat also in der Ebene ein vollständiges Viereck, in welchem der Schnittpunkt N von AA_1 mit BB_1 harmonisch getrennt ist von P durch AA_1 und von Q durch BB_1. Sei nun die Gerade m von n harmonisch getrennt durch die beiden aa_1, so ist N der Schnittpunkt von n mit jener Ebene, und das erhaltene Resultat lehrt dann, dass m von n auch durch bb_1 harmonisch getrennt ist.

42. Seien jetzt $\mathsf{MANA_1}$, $\mathsf{MBNB_1}$ zwei harmonische Würfe von Punkten oder Ebenen einer Geraden zweiter Art und MN getrennt durch $\mathsf{AA_1}$ und $\mathsf{BB_1}$, so sind auch nach Nr. 40, unter $mnaa_1bb_1$ die entsprechenden reellen Träger verstanden, die Geraden mn in der Regelschaar $mnaa_1$ durch aa_1 und in der Regelschaar $mnbb_1$ durch bb_1 harmonisch getrennt. Das Vorige zeigt dann, dass die beiden Regelschaaren mab und ma_1b_1 keine weitere Gerade gemein haben. Die Geraden mab und ma_1b_1 bestimmen aber zwei Ketten von Elementen, deren Träger nämlich den beiden Regelschaaren angehören. Folglich haben die Ketten MAB und $\mathsf{MA_1B_1}$ kein von M verschiedenes Element gemein und das Gleiche gilt von den Ketten $\mathsf{MAB_1}$ und $\mathsf{MA_1B}$.

Umgekehrt: haben weder die Ketten MAB und $\mathsf{MA_1B_1}$, noch die $\mathsf{MAB_1}$ und $\mathsf{MA_1B}$ ein Element ausser M gemein, so haben weder die Regelschaaren mab und ma_1b_1 noch die mab_1 und ma_1b ausser m eine Gerade gemein. Die beiden Regelschaaren mab und ma_1b_1 können aber keinen Punkt gemein haben, der nicht auf m gelegen ist. Denn durch einen solchen Punkt müsste von jeder Schaar eine Gerade gehen, was unmöglich ist, weil alle Geraden dem Strahlensystem einer imaginären Geraden zweiter Art angehören und folglich durch jeden Punkt nur

ein Strahl geht. Nach dem Vorigen ist also eine Gerade n, welche von m durch aa_1 harmonisch getrennt ist, auch durch bb_1 von m harmonisch getrennt. Weil sie der Regelschaar maa_1 angehört, ist sie Träger eines Punktes oder Axe einer Ebene N der Geraden zweiter Art und die beiden Würfe $MANA_1$ und $MBNB_1$ sind dann harmonisch.

Durch Projection überträgt sich dieser Satz auf Würfe und Ketten in anderen Gebilden als Geraden zweiter Art, so dass er allgemein lautet:

*Haben weder die Ketten MAB und MA_1B_1 noch die MA_1B und MAB_1 ausser M ein viertes Element gemein, so giebt es stets noch ein Element N, welches von M durch AA_1 und BB_1 harmonisch getrennt ist**); *und umgekehrt.*

§ 10.

Projectivische Beziehung.

43. *Zwei einförmige reelle oder imaginäre Gebilde (Gerade, Punktreihe, Ebenenbüschel, Strahlbüschel in der Ebene) sollen nun zu einander projectivisch genannt werden***), wenn jedem Elemente des einen, reellen sowohl als imaginären, ein Element des andern entspricht und dabei je zwei entsprechende Würfe dem Sinne nach derselben Art sind. Es entsprechen dann vier Elementen, die eine Kette bilden, wieder vier Elemente einer Kette.

Diese Bedingungen sind nach Nr. 35. erfüllt für zwei Gebilde, welche perspectivisch liegen, wenn je zwei ineinanderliegende Elemente sich entsprechen. Folglich sind sie auch projectivisch.

Da in Nr. 36. durch zweimalige Projection aus einem Wurfe ein anderer hergeleitet wurde, in welchem zwei Elemente unter sich und die beiden andern unter sich vertauscht sind, so folgt, dass zwei solche Würfe projectivisch sind.

Da wir ferner oben gesehen haben, dass bei zwei reellen Gebilden, die reell projectivisch zu einander sind, jedem imaginären Elemente wieder ein solches entspricht und dass je zwei entsprechende Würfe gleicher Art sind, so folgt: zwei reelle reellprojectivische Gebilde sind auch mit Rücksicht auf die imaginären Elemente projectivisch.

44. Es mögen zwei einförmige Gebilde projectivisch auf einander bezogen und MN zwei Elemente des einen Gebildes sein, die durch die beiden AC harmonisch getrennt sind. BD seien zwei andere Elemente, die MN ebenfalls harmonisch trennen, aber nicht der Kette $MANC$ angehören. Dann haben nach Nr. 42. die Ketten MAB,

---

*) St. B. Nr. 211.

**) St. B. Nr. 215.

MCD und die MAD, MBC ausser M kein weiteres Element gemein. Seien nun die $MABCD$ entsprechenden Elemente des zweiten Gebildes mit $M'A'B'C'D'$ bezeichnet, so entsprechen den Ketten MAB, MCD, MAD, MBC wieder die Ketten $M'A'B'$, $M'C'D'$, $M'A'D'$, $M'B'C'$, die ausser M' kein Element gemein haben können, weil sonst die Ketten des ersten Gebildes noch ein Element gemein haben müssten. Entspricht dem Elemente N im zweiten Gebilde das Element N', so ist dies den beiden Ketten $M'A'C'$ und $M'B'D'$ gemeinsam und muss folglich nach dem Satze der Nr. 42. von M' durch $A'C'$ und $B'D'$ harmonisch getrennt sein. *Es entspricht also jedem harmonischen Wurfe wieder ein harmonischer Wurf**).

45. *Zwei reelle Gerade seien projectivisch und zwar so auf einander bezogen, dass drei reellen Punkten ABC der einen drei reelle Punkte $A'B'C'$ der zweiten entsprechen.* Ist dann D ein reeller Punkt der ersten Geraden, D' sein entsprechender, so ist $ABCD$ ein neutraler Wurf, folglich muss, weil entsprechende Würfe gleicher Art sein müssen, auch $A'B'C'D'$ ein neutraler Wurf, also D' ein reeller Punkt sein. Beide Würfe müssen auch derselben Art der neutralen Würfe angehören. Nach der vorigen Nummer entspricht einem harmonischen Wurfe aus vier reellen Punkten wieder ein harmonischer Wurf. Daher sind also die reellen Punkte der beiden Geraden so bezogen, dass jedem Punkt ein anderer entspricht, jedem harmonischen Wurfe wieder ein solcher, und dass zwei entsprechende Würfe gleicher Art sind. Folglich sind die reellen Punkte beider Geraden projectivisch auf einander bezogen.

In der gegebenen projectivischen Beziehung ist nun jedem imaginären Punkte A ein Punkt A′ der zweiten Geraden zugeordnet.

Sei $ABCD$ eine Darstellung von A und B zu A conjungirt. Da A und B durch AC und BD harmonisch getrennt sind (Nr. 38.) und jedem harmonischen Wurfe wieder ein solcher entsprechen soll, müssen die A und B entsprechenden Punkte A′ und B′ harmonisch getrennt sein durch $A'C'$ und $B'D'$. Folglich können sie nur die beiden sein, die durch $A'B'C'D'$ und $C'B'A'D'$ dargestellt werden, weil nach Nr. 39. nur ein solches Paar existirt. Nun müssen aber entsprechende Würfe gleicher Art sein und A liegt im Sinne ABC, daher muss A′ im Sinne $A'B'C'$ liegen und also durch $A'B'C'D'$ dargestellt werden.

Die beiden Geraden sind folglich nach dem oben (Nr. 29.) *aufgestellten Begriffe reell projectivisch***).

---

*) St. B. Nr. 214.

**) St. B. Nr. 216.

Liegen sie also ineinander und haben die drei reellen Punkte ABC entsprechend gemein, so haben sie alle reellen und imaginären Punkte entsprechend gemein.

46. Nun mögen zwei Ebenenbüschel, welche dieselbe Gerade zweiter Art zur Axe haben, projectivisch so auf einander besogen sein, dass die drei imaginären Ebenen ABF sich selbst entsprechen. Es seien pqr die drei reellen Axen dieser Ebenen. Man schneide einen Leitstrahl der Regelschaar pqr durch beide Büschel, so erhält mnn auf ihm (nach Nr. 43.) zwei projectivische Punktreihen, welche die drei Schnittpunkte mit pqr und folglich nach der vorigen Nummer alle reellen und imaginären Elemente entsprechend gemein haben. Daher haben auch jene Büschel alle Elemente entsprechend gemein. Jeder andere Fall ist durch Projection auf diesen zurückzuführen; daher kann man den Hauptsatz der Lehre von der Projectivität allgemein aussprechen:

*Wenn zwei zu einander projectivische einförmige Gebilde, welche ineinander liegen, drei Elemente entsprechend gemein haben, so haben sie alle Elemente entsprechend gemein**).

Hieraus ergeben sich dann die anderen Sätze der Theorie genau auf demselben Wege wie bei ausschliesslicher Betrachtung reeller Elemente, insbesondere gelten die Sätze:

Die projectivische Beziehung ist bestimmt, wenn zu drei Elementen die entsprechenden gegeben sind.

Zwei projectivische Punktreihen liegen perspectivisch, wenn sie ihren Schnittpunkt entsprechend gemein haben.

Wenn $ABCD \overline{\wedge} ADCB$, so sind AC durch BD harmonisch getrennt. Zwei projectivische Gebilde liegen entweder perspectivisch oder sie können doch als erstes und letztes einer Reihe von Gebilden betrachtet werden, von welchen jedes zum folgenden perspectivisch ist.

47. Dass man bei der Theorie der Projectivität den Sinn eines Wurfes nicht entbehren kann, wenn die letzterwähnte Eigenschaft festgehalten werden soll, zeigt das folgende lehrreiche Beispiel**). Man beziehe eine reelle Gerade so auf sich selbst, dass jeder reelle Punkt sich selbst, jeder imaginäre aber seinem conjungirten zugeordnet wird. Dann entspricht jeder Kette wieder eine Kette, jedem harmonischen Wurfe wieder ein solcher, aber die Beziehung ist nicht projectivisch, man kann beide nicht durch eine Reihe unter sich perspectivischer Gebilde verbinden. Denn bei solcher Beziehung bleibt der Sinn eines Wurfes unverändert, während bei der oben vorausgesetzten,

---

*) St. B. Nr. 217.
**) St. B. Nr. 225.

wenn A im Sinne ABC liegt, der conjungirte A′ im Sinne CBA liegt und folglich die Würfe ABCA und ABCA′ nicht gleicher Art sind.

§ 11.

Imaginäre Elemente eines reellen Kegelschnitts.

48. Zwei reelle projectivische Strahlbüschel, die in derselben Ebene liegen, erzeugen durch den Schnitt entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt, der die Centren A, B der beiden Büschel enthält. Da die beiden Büschel reell projectivisch sind, so entspricht auch jedem imaginären Strahle des einen ein imaginärer des zweiten; beide schneiden sich in einem Punkte A, von dem gesagt werden soll, er gehöre dem Kegelschnitte an.

Der eine der beiden Strahlen ist gegeben durch eine Involution des Büschels A, der andere durch die entsprechende Involution von B. Weil nun ein Strahl aus A den entsprechenden von B in einem Punkte des Kegelschnittes trifft, so sind beide Involutionen perspectivisch zu derselben Involution auf dem Kegelschnitte und folglich ist nach Nr. 15. der Träger p des imaginären Punktes A die Polare des Involutionscentrums P. Dieses Centrum stellt daher den imaginären Punkt vollständig dar, wenn man noch den Sinn zufügt, in welchem die durch das Centrum bestimmte Involution beschrieben werden muss.

Ist eine reelle Gerade gegeben, die den Kegelschnitt nicht schneidet, aber in seiner Ebene liegt, so kann man auf ihr zwei imaginäre Punkte angeben, die gleichzeitig auf dem Kegelschnitte liegen. Denn ihr Pol muss das Centrum für die Involution sein, welche beide darstellt, während der Sinn noch unbestimmt ist.

Jede reelle Gerade, die keinen reellen Punkt mit einem Kegelschnitte gemein hat, in dessen Ebene sie liegt, schneidet ihn in zwei conjungirt imaginären Punkten.

Nimmt man auf dem Kegelschnitte einen dritten Punkt C an und projicirt die Involution, welche A darstellt, von ihm aus auf den Kegelschnitt, so entsteht dort dieselbe Involution, welche die Büschel AA und BA erzeugten. Daher entspricht in den beiden Büscheln A, C, die durch die reellen Punkte des Kegelschnittes reell projectivisch sind, dem imaginären Strahle AA ein Strahl CA, der auch durch denselben Punkt A geht.

49. Es soll nun der Schnitt einer imaginären Geraden mit dem Kegelschnitte bestimmt werden. Hierzu sind zwei Hülfssätze nöthig.

In der Ebene des Kegelschnittes seien zwei reelle Gerade ab gegeben. Dann ist jedem Punkte P von a ein Punkt Q von b conjugirt, in welchem nämlich b von der Polare des Punktes A geschnitten wird. Diese Polaren bilden einen Strahlbüschel, der zu der Punktreihe

auf a projectivisch und zu der auf b perspectivisch ist, wodurch also diese beiden Punktreihen projectivisch sind. Die Verbindungslinien PQ umhüllen folglich als Tangenten einen Kegelschnitt, der auch die beiden Geraden a, b berührt, und zwar in den Punkten, in welchen sie von der Polare des Schnittpunktes ab getroffen werden.

Dies gilt aber nur, wenn nicht der Pol A von a auf b und folglich umgekehrt der Pol B von b auf a gelegen ist. In diesem Falle ist A zu jedem Punkte von a und B zu jedem Punkte von b conjugirt. Soll also eine Gerade die beiden a, b in zwei conjugirten Punkten treffen, so muss sie durch einen der Pole A, B gehen. Diese Punkte AB sind die Schnittpunkte von b, a mit der Polare des Schnittpunktes ab.

Ferner ist nöthig der Satz: Wenn die Strahlen eines Büschels auf zwei Arten involutorisch gepaart sind und mindestens in einer der beiden Involutionen keine Ordnungselemente vorhanden sind, so kann man immer zwei Strahlen finden, die in beiden Involutionen gepaart sind. Man lege einen beliebigen Kegelschnitt durch das Centrum des Büschels, so wird er in zwei Involutionen geschnitten, von welchen mindestens eine ihr Centrum im Innern des Kegelschnittes hat. Legt man durch beide Centren eine Gerade, so schneidet sie sicher den Kegelschnitt in zwei Punkten, die in beiden Involutionen ein Paar bilden und zwei Strahlen mit der gleichen Eigenschaft liefern.

50. Es sei nun gegeben ein reeller Kegelschnitt und eine imaginäre Gerade α, deren reeller Punkt M sei. Ist M auf dem Kegelschnitte gelegen, so trifft die Involution, welche α darstellt, den Kegelschnitt in einer Involution, deren Centrum zur Darstellung des imaginären Punktes dienen kann, in welchem α den Kegelschnitt ausser M noch schneidet.

Liegt aber M nicht auf dem Kegelschnitte, so kommt es darauf an, eine Gerade p zu finden, welche von α in einer Involution geschnitten wird, in der die Punkte eines jeden Paares zugleich conjugirte Punkte sind. Ist $ab a_1 b_1$ eine Darstellung von α, so müssen demnach die Schnittpunkte von p mit aa_1 und bb_1 conjugirte Punkte sein; dann findet dies bei jedem andern Strahlenpaare statt, weil zwei Paare die ganze Involution bestimmen. Man kann nun nach dem zweiten Hülfssatz stets annehmen, dass a und a_1 conjugirt sind, d. h. a_1 den Pol von a enthält. Die Polare m von M schneide nun aa_1 in zwei Punkten RR_1; dann muss nach dem ersten Satze p durch einen der beiden Punkte gehen, weil sie die beiden Linien aa_1 in conjugirten Punkten schneiden soll.

Wenn nun die beiden Strahlen bb_1 nicht auch conjugirt sind, so muss p gleichzeitig nach der vorigen Nummer Tangente eines Kegelschnitts sein, der b und b_1 in den Punkten S und S_1 berührt, in wel-

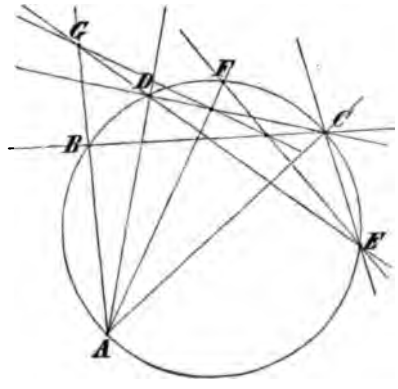
chen sie von m getroffen werden. Weil die Punkte RR_1 durch SS_1 getrennt sind, kann man von einem der beiden Punkte RR_1 sicher, aber auch nur von einem zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen, welches die gesuchten Linien sind. Dann schneidet also die Gerade den Kegelschnitt in zwei imaginären Punkten. Wenn endlich die Geraden b und b_1 ebenfalls conjugirt sind, so sind alle Paare der α darstellenden Involution aus conjugirten Geraden gebildet; die Linie p muss dann durch einen der Punkte RR_1 und einen der SS_1 gehen, also mit m zusammenfallen, so dass in diesem Falle nur ein Schnittpunkt existirt. Die Gerade heisst dann Tangente der Curve und der einzige Schnittpunkt ihr Berührungspunkt.

Im Ganzen folgt also: *eine imaginäre Gerade schneidet einen reellen Kegelschnitt, in dessen Ebene sie liegt, in einem oder zwei Punkten.*

Die vorhergehende Untersuchung zeigt, dass durch jeden imaginären Punkt der Curve, wie durch jeden reellen, nur eine Tangente geht, deren reeller Punkt der Pol des Trägers des gegebenen Punktes ist.

51. Auf dem Kegelschnitte seien A und E zwei reelle Punkte, $BCDF$ reelle oder imaginäre Punkte. Dann sind die beiden Büschel $A(BCDF)$ und $E(BCDF)$ projectivisch und schneiden daher bezüglich die Geraden DC und CB in zwei projectivischen Punktreihen, welche den Punkt C entsprechend gemein haben und folglich perspectivisch liegen.

Fig. 8.



Das Projectionscentrum ist der Schnitt G von AB mit ED und durch ihn muss also die Gerade gehen, die den Schnittpunkt von AF und DC verbindet mit dem Schnittpunkte von EF mit CB, so dass also die drei Schnittpunkte von AB mit DE, BC mit EF, CD mit FA in einer Geraden liegen. Man lasse nun den Punkt C sich ändern, indem die übrigen Punkte festbleiben. Dann ist der Schnittpunkt G von AB mit DE fest, der Schnittpunkt von BC mit EF beschreibt EF und der von CD mit FA diese letztere Gerade und weil die Verbindungslinie der drei Punkte immer durch den ersten geht, sind die beiden Punktreihen auf AF und EF perspectivisch, folglich die beiden Büschel, deren Centren B und D sind, projectivisch, wenn Strahlen entsprechend genannt werden, die sich in einem Punkte des Kegelschnitts treffen.

Ein Strahl des Büschels D ist die Tangente des Kegelschnitts in D.

Da diese nur den Punkt D mit der Curve gemein hat, so muss der entsprechende Strahl aus B sie in D schneiden, denn sonst würden wir auf der Tangente noch einen andern Schnittpunkt erhalten.

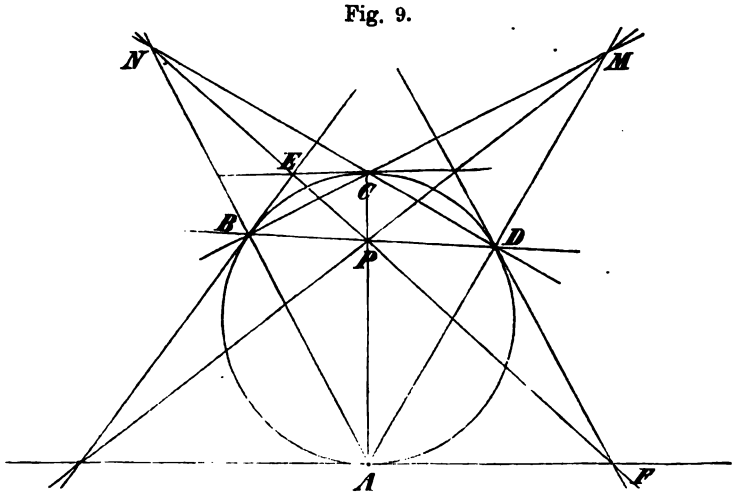
Da B und D ganz beliebige Punkte des Kegelschnittes waren, so können wir sagen:

Zwei Büschel von Geraden, welche von zwei (reellen oder imaginären) Punkten eines reellen Kegelschnittes aus diese Curve projiciren, sind projectivisch. Der Verbindungslinie der Centren entsprechen dabei die Tangenten in diesen Punkten.

Nun kann man genau wie oben, indem man auch die Punkte AE beliebig lässt, ganz allgemein den Pascal'schen Satz beweisen über ein Sechseck, dessen Ecken Punkte eines Kegelschnittes sind.

52. Es seien $ABCD$ (Fig. 9) vier (reelle oder imaginäre) Punkte des Kegelschnittes N der Schnittpunkt von AB und CD, M der von

Fig. 9.



AD und BC, und endlich P der von AC und BD. Dann schneidet die Linie NP die Seiten AD und BC in zwei Punkten QR, welche nach den Eigenschaften des vollständigen Vierecks von M harmonisch getrennt sind durch resp. AD und BC. Legen wir in B und C die Tangenten und ist E ihr Schnittpunkt, so ist nach der vorigen Nummer $B(ECDA) \overline{\wedge} C(BEDA) \overline{\wedge} C(EBAD)$. Der erste und letzte dieser Büschel sind aber perspectivisch gelegen, weil sie einen Strahl BC entsprechend gemein haben, daher schneiden sich die andern in Punkten einer Geraden, so dass die Punkte E, P, N in einer Geraden liegen. Schneiden sich die Tangenten in A und D in einem Punkte F, so muss ebenso F mit P und N in einer Geraden liegen. In

gleicher Weise liegen der Schnittpunkt H der Tangenten in A und B und der Schnittpunkt K der Tangenten in C und D in derselben Geraden mit dem Punkte P. Man ändere den Punkt A, indem man die andern Punkte BCD unverändert lässt. Dann bleibt die Linie BD unverändert und auf ihr bewegt sich der Punkt P, dieser wird aber von K und E, die gleichfalls fest bleiben, nach A und F projicirt, so dass diese beiden Punkte projectivische Punktreihen beschreiben, d. h. aber:

Zwei Tangenten des Kegelschnitts werden von allen übrigen in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten.

Wenn man nun Betrachtungen anstellt, die denen in Nr. 50. dualistisch entsprechen, so ergiebt sich jetzt:

Durch jeden reellen oder imaginären Punkt gehen zwei Tangenten des Kegelschnitts oder nur eine Tangente. Im letzten Falle gehört der Punkt der Curve an.

Denn wenn wir das in Nr. 50. erhaltene Resultat dualistisch übertragen, folgt, dass durch einen Punkt nur eine Tangente geht, wenn die den Punkt darstellende Involution aus Paaren von conjugirten Punkten besteht. Dann liegt aber der betreffende Punkt auf dem Kegelschnitt.

§ 12.

Involution.

53. Wenn zwei Gebilde, die ineinander liegen, projectivisch so aufeinander bezogen sind, dass je zwei entsprechende Elemente sich abwechselnd entsprechen, so sagt man, die Elemente seien involutorisch gepaart. Da diese Definition wörtlich mit der übereinstimmt, die bei alleiniger Benützung reeller Elemente gegeben wird, so kann man, genau wie in diesem Falle, beweisen, dass zwei ineinander liegende projectivische Gebilde schon dann in Involution sind, wenn irgend zwei Elemente sich abwechselnd entsprechen.

Projicirt man eine Involution durch ein anderes Gebilde, so sind auch dessen Elemente involutorisch gepaart.

Schneidet man einen reellen Kegelschnitt durch die Strahlen eines involutorischen Strahlbüschels, dessen reelles oder imaginäres Centrum ein Punkt des Kegelschnittes ist, so werden die Punkte der Curve gepaart, wenn man je zwei zuordnet, die in gepaarten Strahlen des Büschels liegen. Projicirt man die Punktreihe auf dem Kegelschnitt von einem andern Punkte des Kegelschnittes aus, so entsteht wieder ein Strahlbüschel, dessen Strahlen involutorisch gepaart sind. Man sagt daher auch, die Punkte des Kegelschnittes seien involutorisch gepaart und beweist dann, ebenso, wie bei reellen Punkten in

Nr. 4. geschah, dass die beiden Punkte eines jeden Paares mit demselben festen Punkte, dem Centrum der Involution, in gerader Linie liegen. Weil dieser Punkt nicht auf dem Kegelschnitte gelegen sein kann, gehen durch ihn zwei Tangenten, die die Curve in je einem Punkte treffen. Es giebt also in der Involution zwei sich selbst zugeordnete sog. Ordnungselemente*). Dies Resultat überträgt sich auf eine beliebige Involution, weil man von ihr durch Projection stets zu einer Involution der Punkte eines reellen Kegelschnittes übergehen kann.

Sind M, N die beiden Ordnungselemente und AA_1 die Elemente eines Paares einer Involution, so ist $MNAA_1 \overline{\wedge} MNA_1A$, daher sind die Ordnungselemente durch die Elemente eines jeden Paares harmonisch getrennt.

54. Auf derselben Geraden mögen zwei Punktreihen liegen, die projectivisch so aufeinander bezogen sind, dass sie nur einen Punkt C entsprechend gemein haben, während den Punkten AB_1 der einen die BA_1 der zweiten zugeordnet sind. *Dann ist* $CC\cdot AA_1\cdot BB_1$ *eine Involution***), in der C ein Ordnungselement ist. Wäre C nicht ein Ordnungselement, so müsste es mit einem andern D gepaart sein, so dass $CD\cdot AA_1\cdot BB_1$ eine Involution, also $CDAB_1 \overline{\wedge} DCA_1B \overline{\wedge} CDBA_1$ wäre. Dann würde aber in den beiden gegebenen projectivischen Punktreihen auch D sich selbst entsprechen gegen die Voraussetzung.

Ist umgekehrt $CC\cdot AA_1\cdot BB_1$ eine Involution, so haben die beiden projectivischen Punktreihen $CAB_1\cdots$ und $CBA_1\cdots$ das Element C und nur dieses gemein. Denn hätten sie noch ein zweites D gemein, so wäre $CDAB_1 \overline{\wedge} CDBA_1 \overline{\wedge} DCA_1B$, d. h. $CD\cdot AA_1\cdot BB_1$ eine Involution und C gegen die Annahme kein Ordnungselement.

Die beiden projectivischen Punktreihen $CAB\cdots$ *und* $CA_1B_1\cdots$ *mögen nur das Element* C *entsprechend gemein haben; ebenso die projectivischen Reihen* $CAB\cdots$ *und* $CA_2B_2\cdots$. *Dann haben die Reihen* $CA_1B_1\cdots$ *und* $CA_2B_2\cdots$ *auch nur* C *entsprechend gemein, oder sie sind identisch und haben alle Elemente entsprechend gemein****).

Angenommen, sie hätten ausser C noch das Element D entsprechend gemein, so dass $CA_1B_1D \overline{\wedge} CA_2B_2D$ wäre. Man suche nun den Punkt E, so dass $CABE \overline{\wedge} CA_1B_1D \wedge CA_2B_2D$ und bestimme D_1 und D_2 aus den Bedingungen $CABD \overline{\wedge} CA_1B_1D_1 \overline{\wedge} CA_2B_2D_2$. Weil nun $CABED \overline{\wedge} CAB_1DD_1$ und der Annahme nach beide Punktreihen nur C entsprechend gemein haben, so ist $CC\cdot ED_1\cdot DD$ eine Involution, also $CEDD_1$ ein harmonischer Wurf. Ebenso zeigt sich, dass

*) St. B. Nr. 220.
**) St. B. Nr. 221.
***) St. B. Nr. 223.

$CEDD_2$ ein harmonischer Wurf ist. Daher sind die beiden Punkte D_1 und D_2 identisch.

Weil aber $CA_1B_1D_1 \overline{\wedge} CA_2B_2D_2$ war, haben die beiden projectivischen Punktreihen $CA_1B_1 \cdots$ und $CA_2B_2 \cdots$ ausser C und D auch noch $D_1 = D_2$ gemein. Sie müssen also alle Punkte entsprechend gemein haben. Ist dies nicht der Fall, so können sie demnach nur C gemein haben. Dann ist wieder $CC \cdot A_1B_2 \cdot B_1A_2$ eine Involution.

55. Zwei projectivische Punktreihen, die ineinander liegen, können nicht mehr als zwei Elemente entsprechend gemein haben, wenn sie nicht ganz identisch sein sollen; dass sie aber immer ein oder zwei Punkte entsprechend gemein haben müssen, soll jetzt bewiesen werden.

Es möge dem Punkte A der einen Reihe der A_1 der zweiten entsprechen. Wenn nun dem A_1, als der ersten Reihe angehörig, wieder A entspricht, so liegen die Reihen involutorisch, und es ist oben gezeigt, dass sie dann zwei Punkte entsprechend gemein haben. Wir können also annehmen, dass dem A_1 ein von A verschiedener Punkt A_2 entspricht. Wenn nun die beiden Reihen nur ein Element C entsprechend gemein haben, so entsprechen den Punkten CAA_1 der ersten die CA_1A_2 der zweiten, und nach der vorigen Nummer ist also $CC \cdot AA_2 \cdot A_1A_1$ eine Involution oder CAA_1A_2 ein harmonischer Wurf. Umgekehrt ist C so bestimmt und entspricht es in beiden Reihen sich selbst, so haben sie nur C entsprechend gemein. Entspricht aber dem Punkte C der ersten Reihe der Punkt D der zweiten, so müssen die beiden Punktreihen zwei Elemente M, N entsprechend gemein haben. Soll dies der Fall sein, so muss $MNAA_1 \overline{\wedge} MNA_1A_2 \overline{\wedge} NMA_2A_1$ sein. Folglich ist $MN \cdot AA_2 \cdot A_1A_1$ eine Involution, von der A_1 ein Ordnungselement ist. Das andere ist von A_1 durch AA_2 harmonisch getrennt und somit C; daher ist auch der Wurf MA_1NC ein harmonischer, und weil $MA_1NC \overline{\wedge} MA_2ND$, auch MA_2ND, d. h. M und N sind die Ordnungselemente einer Involution, von der A_1C und A_2D zwei Paare sind. Weil aber diese Involution stets zwei Ordnungselemente hat, giebt es auch stets solche Punkte M, N. Daher kann man sagen: *zwei incinander liegende projectivische Elementargebilde haben stets ein oder zwei Elemente entsprechend gemein**).

Sind die beiden Gebilde reell und reell projectivisch, so kann man die Elemente A_1, A_2, C, D reell annehmen; daher hat die Involution $A_1C \cdot A_2D$ entweder zwei reelle oder conjungirt imaginäre Ordnungselemente und folglich haben die projectivischen Gebilde entweder ein reelles Element, oder zwei reelle Elemente, oder zwei conjungirt imaginäre Elemente entsprechend gemein.

*) St. B. Nr. 222.

Sind AA_1A_2 drei reelle Elemente eines reellen Gebildes und bezieht man dieses Gebilde so projectivisch auf sich selbst, dass den Elementen AA_1A_2 resp. A_1A_2A entsprechen, so ist das Element D so zu bestimmen, dass $A_1A_2AD \overline{\wedge} AA_1A_2C$, während dieser letzte Wurf harmonisch ist. D ist also von A_2 getrennt durch A und A_1, und C von A_1 durch A und A_2. Die Involution, von der A_1C und A_2D zwei Paare sind, hat folglich zwei conjungirte imaginäre Ordnungselemente, von welchen eines den Sinn AA_1A_2, das andere den entgegengesetzten Sinn A_2A_1A hat. Diese beiden Elemente, die zu den dreien AA_1A_2 *cyclisch-projectivisch* genannt werden*), lassen sich also durch die drei reellen AA_1A_2 darstellen. Hierauf beruht die von Herrn Klein (Göttinger Nachrichten 1872 Seite 373) vorgeschlagene Interpretation des Imaginären in der Geometrie.

II.

Das Rechnen mit Würfen.

§ 13.

Gleichheit und Addition.

56. Im Folgenden sollen nun gewisse geometrische Operationen angegeben werden, die gestatten, aus mehreren Würfen auf gesetzmässige Art neue abzuleiten. Da die Gesetze dieser Operationen mit den für das Zahlenrechnen gültigen übereinstimmen, so werden wir sie mit v. Staudt als *Rechnen mit Würfen* bezeichnen.

Hierbei *sollen zwei Würfe als gleich gelten (bezeichnet durch =), wenn sie projectivisch sind*, ohne Rücksicht darauf, ob sie demselben Gebilde angehören oder nicht. Da nach Nr. 43. die vier Würfe $ABCD$, $BADC$, $CDAB$, $DCBA$ projectivisch sind, so sind sie also auch gleich.

Ein Wurf soll im Folgenden durch einen kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben bezeichnet oder durch Nebeneinanderstellung jener vier Elemente in der richtigen Reihenfolge dargestellt werden.

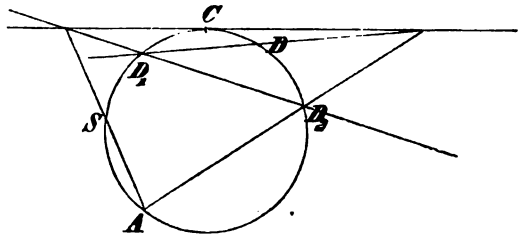
57. Seien nun u_1 und u_2 zwei Würfe. Um sie darzustellen, nehme man auf einem Elementargebilde drei Elemente A, B, C willkührlich an und bestimme nun zwei andere D_1 und D_2, so dass $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$. Dann kann man ein Element S des Gebildes so finden, dass $CC \cdot AS \cdot D_1D_2$ eine Involution ist. *Der Wurf $ABCS$*

*) Clebsch, Crelle's Journal Bd. 68, Seite 167; Binäre Formen Nr. 132.

soll dann die Summe der gegebenen Würfe genannt und durch $u_1 + u_2$ *bezeichnet werden**).

Die Construction von S gestaltet sich am einfachsten, wenn man für ABC drei reelle Punkte eines reellen Kegelschnittes wählt (Fig. 10). Weil die Punkte $CC \cdot AS \cdot D_1 D_2$ eine Involution bilden müssen, so schneiden sich nach Nr. 53. die Tangente in C, die Linien AS und $D_1 D_2$ in einem Punkte. Der Punkt S wird also construirt, wenn man die Tangente in C durch die Linie $D_1 D_2$ schneidet und den Schnittpunkt mit A verbindet. Es ist hierbei gleichgültig, ob die Würfe u_1 und u_2 neutral sind oder nicht. Wenn sie neutral sind, sind die Punkte $D_1 D_2$ reelle Punkte des Kegelschnitts und die Construction führt dann zu einem reellen Punkte S, so dass also der Wurf $u_1 + u_2$ auch neutral ist. *Die Summe von zwei neutralen Würfen ist wieder ein neutraler Wurf.*

Fig. 10.



Die eben definirte Summe von zwei Würfen scheint abhängig von dem Elementargebilde, auf welchem man die Elemente $ABCD_1D_2$ annimmt, und von der Wahl der ABC. Dies ist jedoch nicht der Fall. Man nehme in einem andern oder demselben Elementargebilde die drei Elemente $A'B'C'$ an, es sei $u_1 = A'B'C'D_1'$, $u_2 = A'B'C'D_2'$, Dann ist $ABCD_1 = A'B'C'D_1'$ und $ABCD_2 = A'B'C'D_2'$. Die Summe $A'B'C'S'$ wird nun gefunden, indem man das Element S' sucht, welches $C'C' \cdot A'S' \cdot D_1'D_2'$ zu einer Involution macht. Wenn man nun beide Gebilde projectivisch so aufeinander bezieht, dass den Elementen ABC des ersten die $A'B'C'$ des zweiten entsprechen, so entsprechen D_1D_2 die $D_1'D_2'$ und, weil der Involution $CC \cdot AS \cdot D_1D_2$ wieder eine Involution entsprechen muss, S dem S'. Dann ist aber $ABCS = A'B'C'S'$. *Die Summe ist folglich durch die beiden Würfe vollständig bestimmt.*

Da bei der Construction von S die beiden Punkte D_1 und D_2 symmetrisch benützt werden, so ist $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$, d. h. *die Operation der Addition ist eine commutative.*

58. Bei der Construction zur Bestimmung der Summe kann es eintreten, dass das *Element* S mit einem der *Punkte* ABC zusammenfällt. Dann giebt es eigentlich keinen Wurf, der die Summe darstellt,

*) St. B. Nr. 258.

insofern ja ein Wurf aus vier Elementen bestehen muss. Um aber keine Ausnahme zuzulassen, wollen wir die drei Gruppen von Elementen $ABCA$, $ABCB$ und $ABCC$ uneigentliche Würfe*) nennen und sie mit den Zeichen 0, 1, ∞ bezeichnen, weil sie genau dieselben Gesetze befolgen, wie die so bezeichneten Zahlen. Wenn man bei den uneigentlichen Würfen zwei Elemente und gleichzeitig die beiden andern vertauscht, so entstehen drei Würfe der Formen $BAAC$, $BABC$, $CCAB$, die den drei ersten gleich sein sollen. Sind $A'B'C'$ drei Elemente eines andern Elementargebildes oder drei andere Elemente des nämlichen, dem auch ABC angehören, so sollen auch zwei uneigentliche Würfe gleich heissen, wenn der eine aus ABC auf dieselbe Art gebildet ist, wie der andere aus $A'B'C'$. Hiernach und nach der vorigen Definition ist z. B. $A'B'C'A' = ABCA = BAAC = CAAB$.

Die Definition der Summe zweier Würfe soll nun auch auf den Fall angewandt werden, wenn einer oder beide der zu addirenden Würfe uneigentliche sind. Dabei ist jedoch der Wurf ∞, wie im Folgenden, stets ausgeschlossen. Denn wäre z. B. $u_1 = \infty$, so wäre, um $u_1 + u_2 = ABCC_1 + ABCD_2$ zu construiren, S so zu suchen, dass $CC \cdot AS \cdot CD_2$ eine Involution wäre, was nicht angeht.

Wendet man die Definition auf die Summe $0 + u_2 = ABCA + ABCD_2$ an, so ist S aus der Involution $CC \cdot AS \cdot AD_2$ zu bestimmen, aus der sich ergiebt, dass S mit D_2 zusammenfallen muss. Es ist folglich $0 + u_2 = u_2$.

Dass die Summe von zwei Würfen auch im Falle, dass einer oder beide uneigentliche sind, unabhängig ist von der Construction, folgt mit dem obigen Begriffe der Gleichheit aus dem bezüglichen Beweise der Nr. 56.

59. *Es ist aber die Addition auch eine associative Operation*, d. h. es besteht die Gleichung

$$(u_1 + u_2) + u_3 = (u_1 + u_3) + u_2.$$

Um sie zu beweisen**), stellen wir die drei Würfe auf einem Elementargebilde dar durch

$$u_1 = ABCD_1, \quad u_2 = ABCD_2, \quad u_3 = ABCD_3.$$

Es habe sich dann ergeben

$$u_1 + u_2 = ABCS_3, \quad u_1 + u_3 = ABCS_2.$$

Dann ist $CC \cdot D_1D_2 \cdot AS_3$ eine Involution und nach Nr. 54. haben also die beiden projectivischen Reihen $CAD_1 \cdots$ und $CD_2S_3 \cdots$ nur C entsprechend gemein. Ferner ist $CC \cdot AS_2 \cdot D_1D_3$ eine Involution,

*) St. B. Nr. 256.
**) St. B. Nr. 259.

so dass die projectivischen Reihen $CAD_1 \cdots$ und $CD_3S_2 \cdots$ auch nur C entsprechend gemein haben. Nach Nr. 54. ist also $CC \cdot D_2S_2 \cdot D_3S_3$ eine Involution. Ist in dieser dem Element A das Element S zugeordnet, so ist nach der Definition der Summe

$$ABCD_2 + ABCS_2 = ABCS,$$
$$ABCD_3 + ABCS_3 = ABCS,$$

womit der Satz an der Spitze bewiesen ist.

Der obige Beweis stützt sich darauf, dass die beiden Reihen $CAD_1 \cdots$ und $CD_2S_3 \cdots$ nur C entsprechend gemein haben, weil $CC \cdot AS_3 \cdot D_1D_2$ eine Involution ist. Wenn sie mehr Elemente gemein haben sollen, so müssen sie nach Nr. 54. identisch sein, also speciell A mit D_2 zusammenfallen. Dann ist aber einer der Würfe 0, und weil $(u_1 + 0) + u_3 = (u_1 + u_3) = (u_1 + u_3) + 0$ ist, gilt das Associationsgesetz auch in diesem Falle.

60. *Die Differenz $u_2 - u_1$ sei definirt durch die Gleichung*

$$(u_2 - u_1) + u_1 = u_2.$$

Stellt man u_1 durch den Wurf $ABCD_1$ und u_2 durch $ABCD_2$ dar, wo ABC drei reelle Punkte eines reellen Kegelschnittes, so findet man den Wurf $u_2 - u_1 = ABCD$, indem man (Fig. 10) die Tangente in C durch die Linie AD_2 schneidet und durch den Schnittpunkt und D_1 eine Linie zieht, die den Kegelschnitt wieder im Punkte D trifft. Somit giebt es stets einen Wurf, der der obigen Gleichung genügt, und nur einen.

Die specielle Differenz $0 - u$ soll einfacher durch $-u$ bezeichnet werden. Hiermit sind nun die aus der Definition der Addition und Subtraction abzuleitenden Prämissen bewiesen, aus welchen alle übrigen Eigenschaften dieser Operationen rein formale Folgerungen sind, die man herleiten kann, ohne auf die specielle Natur der Verknüpfungen einzugehen*).

§ 14.

Multiplication.

61. Um das Product von zwei Würfen u_1 und u_2 zu bilden, stellen wir beide dar durch je vier Elemente eines Elementargebildes in der Form, dass $u_1 = ABCD_1$ und $u_2 = ABCD_2$. Dann kann man ein Element P so finden, dass $AC \cdot D_1D_2 \cdot BP$ eine Involution ist. *Der Wurf $ABCP$ soll dann das Product der beiden gegebenen heissen und durch u_1u_2 bezeichnet werden***); dass dieser Wurf unabhängig ist

*) Siehe darüber Hankel, Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen § 4 ff.; Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Bd. I, § 79 ff.

**) St. B. Nr. 268.

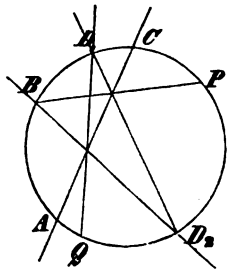
von der Darstellung der Würfe selbst, wird ebenso wie der entsprechende Satz der Addition bewiesen.

Ist $u_1 = 1 = ABCB$, so muss $AC \cdot BD_2 \cdot BP$ eine Involution sein, also D_2 mit P coincidiren. Demnach ist

$$1 \cdot u_2 = u_2 .$$

Die Construction von P gestaltet sich am einfachsten, wenn man wieder für ABC drei Punkte des Kegelschnittes annimmt. Man hat dann (Fig. 11) AC durch $D_1 D_2$ zu schneiden und den Schnittpunkt mit B durch eine Linie zu verbinden, die den Kegelschnitt nochmals im Punkte P trifft. Denn nach Nr. 53. ist dann $AC \cdot BP \cdot D_1 D_2$ eine Involution.

Fig. 11.



Sollte das Product $u_1 u_2$ gleich 0 sein, so müsste der Punkt P nach A fallen, also auch $D_1 D_2$ durch A gehen, so dass einer der beiden Punkte $D_1 D_2$ mit A identisch, also einer der beiden Würfe u_1, u_2 der uneigentliche Wurf $ABCA$ sein müsste. Ist aber u_1 z. B. $= 0$, so ist P aus der Involution $AC \cdot AD_2 \cdot BP$ zu bestimmen, was nicht angeht. Da aber die Construction am Kegelschnitt in diesem Falle für P den Punkt A liefert, so definiren wir: *ein Product, dessen einer Factor* 0 *ist, soll gleich* 0 *sein**). Dann haben wir nach dem oben Bemerkten den Satz: *Ein Product von zwei Factoren ist dann und nur dann* $= 0$, *wenn einer der Factoren* 0 *ist.*

62. Da bei der Construction des Punktes P die beiden Punkte D_1 und D_2 symmetrisch benutzt werden, so ist die *Multiplication eine commutative Operation.* Um zu beweisen, dass sie auch associativ ist, betrachten wir zuerst das Product von zwei Würfen $ABCE$ und $ABCF$. Ist es $ABCG$, so ist $AC \cdot BG \cdot EF$ eine Involution, folglich $ABCF = CGAE = AECG$. Daher ist $(ABCE)\,(AECG) = ABCG$.

Sind nun drei Würfe

$$u_1 = ABCD_1, \quad u_2 = ABCD_2, \quad u_3 = ABCD_3$$

gegeben und keiner von ihnen $= 0$, so kann man auch

$$u_2 = AD_1CP_3, \quad u_3 = AP_3CP$$

setzen. Dann ist

$$u_1 u_2 = (ABCD_1)\,(AD_1CP_3) = ABCP_3$$

und

$$(u_1 u_2) u_3 = (ABCP_3)\,(AP_3CP) = ABCP.$$

---

*) St. B. Nr. 269 (Ende).

Dagegen ist

$$u_2 u_3 = (AD_1CP_3)\,(AP_3CP) = AD_1CP$$

und

$$(u_2 u_3)u_1 = (AD_1CP)\,(ABCD_1) = ABCP,$$

folglich

$$(u_1 u_2)u_3 = (u_2 u_3)u_1 \text{*}),$$

welche Gleichung zusammen mit dem Commutationsgesetz das *allgemeine Associationsgesetz* ausspricht**).

Dass der Satz auch dann gilt, wenn einer der drei Würfe Null ist, folgt daraus, dass das ganze Product dann 0 gleich ist.

63. Seien wieder drei Würfe $u_1 u_2 u_3$ gegeben, $u_1 = ABCD_1$ aber $u_2 = AD_1CD_2$, $u_3 = AD_1CD_3$ und $u_2 + u_3 = AD_1CS$, so dass $CC \cdot D_2D_3 \cdot AS$ eine Involution ist. Dann ist

$$u_1\,(u_2 + u_3) = (AD_1CS)\,(ABCD_1) = ABCS.$$

Andrerseits ist $u_1 u_2 = ABCD_2$, $u_1 u_3 = ABCD_3$. Um dann die Summe $u_1 u_2 + u_2 u_3 = ABCD_2 + ABCD_3$ zu finden, hat man das Element zu suchen, welches A zugeordnet ist, in der Involution von der CC und D_2D_3 zwei Paare bilden. Dieses Element ist aber S, also $u_1 u_2 + u_1 u_3 = ABCS$ oder

$$u_1\,(u_2 + u_3) = u_1 u_2 + u_1 u_3\,,$$

welcher Satz auch für $u_1 = 0$ richtig bleibt, weil $0 = 0 + 0$, und auch für $u_2 + u_3 = 0$. Denn in diesem Falle ist S mit A identisch, also $CC \cdot D_2D_3 \cdot AA$ eine Involution und deswegen auch $u_1 u_3 + u_2 u_3 = ABCA = 0$.

Das so bewiesene Distributionsgesetz in Verbindung mit dem Commutationsgesetz und dem Associationsgesetz reichen aber aus, um alle Sätze über Addition, Multiplication und Division in ihrem Zusammenhange rein formal zu beweisen***), wenn noch die Existenz des Quotienten dargethan ist. Dass aber ein Wurf $\frac{u_2}{u_1}$ existirt, dessen Product mit u_1 gleich u_2 ist, zeigt am einfachsten die Construction am Kegelschnitt. Man ziehe (Fig. 11) BD_2 und verbinde den Schnittpunkt der Linie AC und BD_2 mit D_1, so schneidet diese Linie den Kegelschnitt zum zweiten Mal in einem Punkte Q. Dann ist $\frac{u_2}{u_1} = ABCQ$. Diese Construction wird nicht ausführbar, wenn $u_1 = 0$ ist. Folglich ist 0 als Nenner auszuschliessen.

64. Die Summe von n Würfen, von welchen jeder u ist, soll durch nu bezeichnet werden. Weil $u = (ABCB)u$, so ist nach dem Distri-

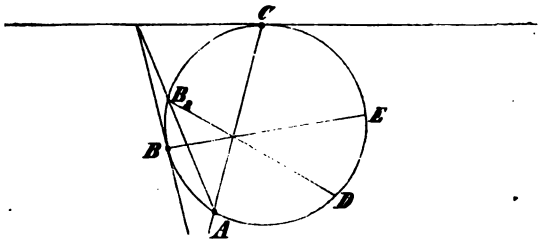
*) St. B. Nr. 269.

**) Vgl. Schröder l. c. § 87, S. 268.

***) Hankel, Schröder ll. cc.

butionsgesetz $nu=n(ABCB)\cdot u$. Man kann diesen Wurf construiren, indem man sich durch wirkliche Addition den Wurf $n(ABCB)=(ABCB_n)$ herstellt; dann ist $nu=(ABCB_n)u$. Soll nun umgekehrt ein Wurf u so gefunden werden, dass nu gleich einem gegebenen Wurfe v ist, so ist dies nicht schwer auszuführen. Den Wurf u, der der Gleichung $nu=v$ genügt, bezeichnen wir mit $\frac{1}{n}v$. In Fig. 12 ist die Construction von $ABCD=\frac{1}{2}(ABCE)$ mit Hülfe des Wurfes $ABCB_2$ wirklich durchgeführt.

Fig. 12.



Mit u^n soll ein Product von n Factoren bezeichnet werden, von welchen jeder $=u$ ist. Die Gesetze des Rechnens mit Potenzen

$$u^m \cdot u^n = u^{m+n}.$$
$$(u^m)^n = u^{mn}$$

sind rein formale Folgerungen der Definition und der Multiplicationsgesetze.

§ 15.

Vergleichung der neutralen Würfe.

65. Während die Betrachtungen der beiden letzten Paragraphen sich auf beliebige, neutrale oder nicht neutrale Würfe bezogen, beschränken wir uns jetzt auf neutrale Würfe.

Ein neutraler Wurf $ABCD$ soll *negativ* heissen, wenn er nach der Eintheilung des § 6 ff. zu der ersten Art der neutralen Würfe gehört, positiv dagegen, wenn er zur zweiten oder dritten Art gehört.

Auch diese Festsetzungen sind von der Darstellung des Wurfes unabhängig. Denn ist $ABCD=A'B'C'D'$, so gehört, weil die beiden Würfe projectivisch sind, $A'B'C'D'$ zu derselben Art der neutralen Würfe wie $ABCD$. Sind ABC drei reelle Elemente eines reellen Gebildes, so ist auch D ein reelles Element (Nr. 32.). Ist nun der Wurf $ABCD$ negativ, so sind AC durch BD getrennt oder D liegt auf *dem* Theile AC des Gebildes, der B nicht enthält; dagegen liegt es auf dem B enthaltenden Theile ABC, wenn der Wurf positiv ist.

Im Folgenden setzen wir stets diese Darstellung voraus.

66. *Das Product von zwei negativen oder zwei positiven Würfen ist positiv.*

Seien die Würfe $u_1 = ABCD_1$ und $u_2 = ABCD_2 = AD_1CP$. Sind beide positiv, so sind AC weder durch BD_1 noch durch D_1P getrennt, folglich können sie auch nicht durch BP getrennt sein. Die gleiche Folgerung ergiebt sich aber, wenn u_1 und u_2 negativ sind. Dann sind AC sowohl durch BD_1 als durch D_1P getrennt, so dass auch hier AC durch BP nicht getrennt sein können. Weil aber $(ABCD_1)\,(AD_1CP) = ABCP_2 = u_1u_2$, so ist der Satz bewiesen.

Ist aber einer der Würfe, u_1 etwa, positiv und u_2 negativ, so ist u_1u_2 negativ. Denn dann sind AC durch BD_1 nicht getrennt, aber durch D_1P getrennt, so dass sie durch BP getrennt sein müssen, also $ABCP$ ein negativer Wurf ist.

Wenn man die Construction des Productes an einem Kegelschnitt ausführt, überzeugt man sich durch die Anschauung von der Richtigkeit der Sätze.

67. *Die Summe von zwei positiven Würfen ist positiv, von zwei negativen Würfen negativ.*

Sind die beiden Würfe $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$ positiv, so sind AC weder durch BD_1 noch durch BD_2 getrennt. Gesetzt nun, die Summe $u_1 + u_2 = ABCS$ wäre negativ, so wäre AC durch BS getrennt, daher wären sie auch durch D_1S und D_2S getrennt, also AD_1CS und AD_2CS ordentliche Würfe. Sind u_1 und u_2 negativ, so sind AC durch BD_1 und BD_2 getrennt; wenn $u_1 + u_2$ positiv wäre, so wäre AC durch BS nicht getrennt, also durch D_1S und D_2S getrennt, so dass also auch jetzt die Würfe AD_1CS und AD_2CS ordentliche sein würden. Es soll gezeigt werden, dass darin ein Widerspruch liegt. Es ist $CC \cdot D_1D_2 \cdot AS$ eine Involution, daher $AD_1CS \,\overline{\wedge}\, SD_2CA \,\overline{\wedge}\, ACD_2S$. Wenn nun AD_1CS ein ordentlicher Wurf ist, muss auch ACD_2S einer sein, während wir oben gesehen haben, dass AD_2CS einer ist. Diese beiden Würfe ACD_2S und AD_2CS können nicht gleichzeitig ordentliche sein, weil nicht gleichzeitig (nach dem ersten) AD_2 durch CS getrennt und (nach dem zweiten) nicht getrennt sein können.

Also sind die obigen Annahmen falsch und der Satz bewiesen.

Die Summe von zwei positiven oder zwei negativen Würfen kann auch nicht $= 0$ *sein.* Denn in beiden Fällen sind AC durch D_1D_2 nicht getrennt. Wäre aber die Summe $= 0$, so wäre $CC \cdot D_1D_2 \cdot AA$ eine Involution, also AC durch D_1D_2 getrennt.

68. *Ein Wurf* u_1 *soll grösser heissen als ein anderer* u_2, *in Zeichen* $u_1 > u_2$, *wenn* $u_1 - u_2$ *positiv ist.* Ein positiver Wurf u ist dann > 0. Denn $u - 0 = u$ ist positiv. Der Wurf $-u$ ist dann negativ und < 0. Denn weil $u + (-u) = 0$, so kann nach der vorigen Nummer $-u$ nicht positiv sein, und weil $0 - (-u) = u$, so ist $0 > -u$.

Sei nun $u_1 > u_2$ und $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2$; $u_1 - u_2$ aber $ABCT$. Weil $u_1 > u_2$ sein soll, muss $u_1 - u_2$ positiv sein; daher sind AC durch BT nicht getrennt. T ist durch die Involution $CC \cdot TD_2 \cdot AD_1$ bestimmt, die ein Ordnungselement C und folglich noch eines besitzt. Deswegen muss der Sinn ATC dem D_1D_2C entgegengesetzt (Nr. 3.) oder dem CD_2D_1 gleich sein. Weil aber AC durch BT nicht getrennt sind, ist der Sinn ABC dem ATC gleich; folglich sind die beiden Sinne ABC und D_1D_2C entgegengesetzt. Ist $u_3 = ABCD_3$ ein dritter Wurf und $u_3 < u_2$, so ist also auch der Sinn D_2D_3C dem ABC entgegengesetzt, stimmt demnach mit D_1D_2C überein: Ein Punkt, der das Gebilde im Sinne ABC von C aus durchläuft, wird also der Reihe nach die Punkte $CD_3D_2D_1$ treffen, bevor er nach C zurückkehrt. Es ist klar, dass auch das Umgekehrte richtig ist.

Auch davon wird man sich durch Constructionen am Kegelschnitt leicht anschaulich überzeugen.

69. Aus der Ungleichung $2u_1 > 2u_2$ folgt $u_1 > u_2$. Denn da $2u_1 - 2u_2 = 2(u_1 - u_2) > 0$ ist, so kann $u_1 - u_2$ nicht negativ sein.

Es sei $u_1^2 < u_2^2$ und u_2 positiv. Dann ist $u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) < 0$. Daher muss ein Factor negativ und der andere positiv sein. Die Annahme $u_1 - u_2 > 0$, $u_1 + u_2 < 0$ ist aber unstatthaft. Denn aus der ersten Ungleichung folgt, dass $u_2 - u_1 < 0$ ist und diese und die letzte liefern dann $u_2 < 0$ gegen die Annahme. Daher muss $u_1 - u_2 < 0$, $u_1 + u_2 > 0$ oder $u_1 < u_2$, und, da man $u_1 + u_2$ auch $u_1 - (-u_2)$ schreiben kann, $u_1 > -u_2$.

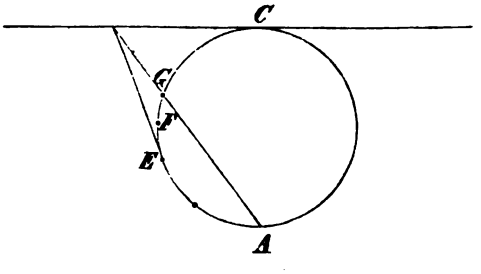
Sind die beiden Würfe u_1 und u_2 beide < 1 aber > 0, so ist $1 - u_1 > 0$, folglich auch $u_2(1 - u_1) = u_2 - u_1u_2 > 0$, so dass $u_1u_2 < u_2 < 1$ ist. *Das Product von zwei positiven Würfen, die kleiner als* 1 *sind, ist selbst* < 1, *das Product von zwei Würfen* > 1 *selbst grösser als* 1.

70. Es sei ein positiver Wurf u gegeben. Setzt man $\frac{1}{2}u = u_1$, so ist u_1 ebenfalls positiv und $< u$, weil ja $u - u_1 = u_1$ ist. Setzt man $\frac{1}{2}u_1 = u_2$ u. s. w., so erhält man eine Reihe von positiven Würfen $uu_1u_2 \cdots$, von welchen jeder folgende kleiner ist als der vorhergehende und von denen keiner $= 0$ ist. Es fragt sich, ob es in dieser Reihe einen Wurf u_n giebt, der kleiner als ein gegebener positiver Wurf v ist, wobei natürlich $u > v$ vorausgesetzt ist. Ist $u_n < v$, so gilt dasselbe von u_{n+1}, $u_{n+2} \cdots$. Stellen wir die Würfe auf einer reellen Geraden dar, so dass $u = ABCD$, $u_1 = ABCD_1$, $u_2 = ABCD_2 \cdots$, $v = ABCP$ ist, so bilden nach Nr. 68. die Punkte $CDD_1D_2 \cdots$ eine Reihe, die auf dem Stücke ABC der Geraden in der Richtung

von C über B nach A hin verläuft. P wird ebenfalls auf dem Stücke ABC liegen, und die Frage ist nun, ob es auf dem Stücke AP von ABC Punkte der Reihe $DD_1D_2\cdots$ giebt oder nicht. Ist nämlich D_n ein Punkt, der in AP liegt, so ist nach Nr. 68. $ABCP > ABCD_n$. Wenn nun nicht in *jedem* Stücke AP solche Punkte der Reihe $DD_1D_2\cdots$ liegen, so muss es doch jedenfalls einen Punkt E geben, der denjenigen Theil von ABC, in welchem Punkte jener Reihe liegen, von *dem* trennt, in welchem keine vorhanden sind. Die Existenz dieses Punktes E ergiebt sich aus der Stetigkeit der Geraden*) und er ist dadurch charakterisirt, dass in *jedem* Theile AE' von ABC, der E einschliesst, Punkte der Reihe liegen.

71. Es soll nun gezeigt werden, dass E von A nicht verschieden sein kann. Jeder der Würfe $uu_1u_2\cdots$ ist der Definition von E nach $> ABCE$, dagegen wird jeder Wurf $ABCF > ABCE$ von Würfen der Reihe $uu_1u_2\cdots$ unterschritten. Man nehme nun für F einen Punkt auf ABC so an, dass der Wurf $ABCF > ABCE$, dass aber der Wurf $\frac{1}{2}(ABCF) < ABCE$. Solche Punkte kann man stets angeben, so lange A und E nicht zusammenfallen. Denn man suche den Punkt G so, dass $2(ABCE) = ABCG$ und nehme F zwischen E und G an (Fig. 13). Dann ist ja $ABCE < ABCF < ABCG$, also auch $\frac{1}{2}(ABCF) < \frac{1}{2}(ABCG) = ABCE$ nach Nr. 69. F lässt sich aber von E und G verschieden wählen, so lange E und G verschieden sind. Würden sie zusammenfallen, so wäre $2(ABCE) = ABCE$, also $ABCE = 0$, und E müsste mit A identisch sein. Nehmen wir zuerst an, dies finde nicht statt, so giebt es, weil $ABCF > ABCE$, in der Reihe von Würfen $uu_1u_2\cdots$ solche, die kleiner als $ABCF$ sind. Sei etwa u_{n-1} der erste derselben. Aus der Ungleichung $ABCF > u_{n-1}$ folgt aber $\frac{1}{2}(ABCF) > \frac{1}{2}u_{n-1}$, oder weil $\frac{1}{2}(ABCF) < ABCE$ ist und $\frac{1}{2}u_{n-1}$ der nächste Wurf u_n jener Reihe ist, $u_n < ABCE$. Da dies mit der Definition von E im Widerspruche steht, muss die Annahme, dass ein solcher Punkt F möglich sei, falsch sein, also E mit A zusammenfallen. Somit haben wir den wichtigen Satz:

Fig. 13.



Durch gehörig weit fortgesetzte Halbirung eines positiven Wurfes kann man jeden gegebenen positiven Wurf unterschreiten.

*) Vgl. darüber Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, S. 18.

§ 16.

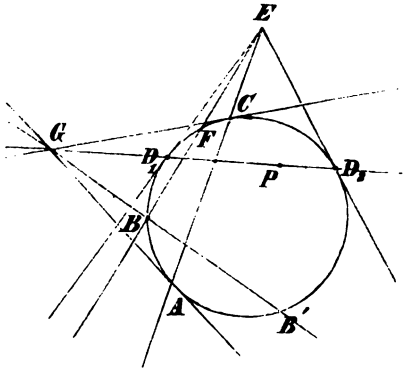
Nichtneutrale Würfe.

72. Wenn der Wurf u nicht neutral ist und man stellt ihn dar durch Punkte eines reellen Kegelschnittes, von welchen drei reell sind, so wird der vierte nothwendig imaginär sein müssen. Bezeichnen wir mit ABC die drei reellen Elemente, so kann man also $u = ABC\Delta$ setzen. Wird ein anderer Wurf u' dargestellt durch $ABC\Delta'$ und sind Δ und Δ' conjungirt, so soll der Wurf u' zu u conjungirt heissen. Der zu u' conjungirte ist dann wieder u. Die beiden Würfe u und u' können nicht gleich sein, weil conjungirte Punkte verschieden sind.

Die Verbindungslinie von Δ und Δ' ist der reelle Träger beider Punkte, die die Tangente in C in einem reellen Punkte schneidet. Da die fernere Construction der Summe nur reelle Punkte liefert, *ist die Summe von zwei conjungirten Würfen neutral. Auch das Product ist neutral*; denn auch AC wird von der Linie $\Delta\Delta'$ in einem reellen Punkte geschnitten. Sei dieser E (Fig. 14).

Da die Linie $\Delta\Delta'$ den Kegelschnitt nicht schneidet, ist E ausserhalb der Curve gelegen. Man kann also von ihm aus zwei reelle Tangenten legen, die in D_1 und D_2 berühren mögen, während die Linie BE den Kegelschnitt noch in F treffe. Dann ist $AC \cdot BF \cdot \Delta\Delta'$ eine Involution, folglich $ABCF = uu'$. Die Involution hat $D_1 D_2$ zu Ordnungselementen und weil sie reell sind, müssen sie durch AC getrennt sein, so dass jedenfalls einer der beiden Würfe $ABCD_1$, $ABCD_2$ positiv ist. Sei es der $ABCD_1$. Dann ist noch $(ABCD_1)^2 = ABCF = uu'$. *Es existirt also stets ein neutraler positiver Wurf, dessen Quadrat dem Product von zwei conjungirten Würfen gleich ist. Er soll der Modul jedes der beiden genannt werden.*

Fig. 14.



Die beiden Punkte Δ und Δ' können durch den Pol P ihres reellen Trägers dargestellt werden, dann ist E auf der Polare von P oder P auf der von E gelegen, die auch durch D_1 und D_2 geht. Weil E ein Punkt von AC, geht die Polare von E auch durch den Pol G von AC.

73. Seien nun zwei Würfe $u = ABC\mathsf{A}$, $v = ABC\mathsf{B}$ gegeben und die Summe zu construiren. Die Construction beginnt mit der Aufsuchung der Linie AB. Ist die Summe der conjungirten Würfe

$u' + v'$ zu bilden, so hat man mit der Aufsuchung der Linie A'B' zu beginnen, welche zu AB conjungirt ist. Mit beiden hat man die Tangente in C, also eine reelle Gerade zu schneiden und erhält conjungirte Schnittpunkte, von da aus finden sich in jedem Stadium der Construction conjungirte Schnittpunkte, so dass die Resultate $u + v$ und $u' + v'$ auch conjungirt sein werden. Gleiches gilt von den Producten uv und $u'v'$. Ist u neutral, so ist uv zu uv' und $u + v$ zu $u + v'$ conjungirt. Wenn man einen neutralen Wurf sich selbst conjungirt nennt, so kann man diese Resultate zusammenfassen und erweitern zu dem Satze:

Wenn man mit einer Anzahl Würfen und ihren conjungirten dieselbe Folge von Additionen und Multiplicationen vornimmt, erhält man conjungirte Resultate.

74. Wie wir oben gesehen haben, ist ein nicht neutraler Wurf von seinem conjungirten verschieden. Ist also i ein solcher Wurf, i' der conjungirte, so ist $i - i'$ nicht $= 0$. Wenn w ein anderer nicht neutraler Wurf ist und w' der conjungirte, so kann man stets den Wurf v so bestimmen, dass

$$w - w' = (i - i')\, v.$$

Nach dem letzten Satze erhalten wir hieraus wieder eine richtige Gleichung, wenn wir jeden Wurf durch seinen conjungirten ersetzen, so dass, mit v' den zu v conjungirten bezeichnet, auch

$$w' - w = (i' - i)\, v'$$

ist. Beide Gleichungen zusammen liefern $v' = v$, was lehrt, dass v nur ein neutraler Wurf sein kann.

Auf der andern Seite hat sich in Nr. 72. ergeben, dass die Summe von zwei conjungirten Würfen auch neutral ist, so dass man

$$w + w' = 2\, u_1$$

setzen kann. Diese Gleichung, combinirt mit der vorigen, liefert

$$w = u_1 + \tfrac{1}{2}(i - i')\, v\,.$$

Da auch $\frac{1}{2}(i + i')$ neutral ist, wird $u_1 - \frac{1}{2}(i + i')\, v = u$ ebenfalls ein neutraler Wurf sein, mit dessen Benützung man schreiben kann

$$w = u + iv^*),$$

wo $u + v$ neutrale Würfe sind. Liesse sich w noch auf eine zweite Art in dieser Form darstellen, so dass etwa

$$w = u_2 + iv_2$$

wäre, so müsste $0 = (u_2 - u) + i\,(v_2 - v)$ oder $i = -\frac{u_2 - u}{v_2 - v}$, was unmöglich ist, weil ein nicht neutraler Wurf nicht einem neutralen gleich sein kann.

*) St. B. Nr. 278.

75. In den folgenden Betrachtungen werde zur Vereinfachung unter i immer ein specieller nicht neutraler Wurf verstanden. Ist nämlich $(ABCB) + ABCB' = 0$, so ist $CC \cdot BB' \cdot AA$ eine Involution, folglich AC durch BB' harmonisch getrennt. Daher stellt $ABCB'$ einen imaginären Punkt dar, den wir mit A bezeichnen wollen. Es werde nun $i = (ABCA)$ gesetzt. Weil $ABCB'$ harmonisch, geht BB' durch den Pol G von AC (Fig. 14) und der Punkt A kann also dargestellt werden durch den Schnittpunkt H der Linie BC und AC. Der reelle Träger von A und dem ihm conjungirten A' geht somit durch G. Daher ist $i + i' = 0$.

Dies liefert weiter $i^2 + ii' = 0$. ii' ist das Quadrat des Moduls von i, also $= 1$, weil der A darstellende Punkt auf der Linie GB gelegen ist (Nr. 72.), und folglich ist $i^2 = -1$.

76. Wenn $w = u + iv$ ist, so ist der conjungirte Wurf $w' = u + i'v = u - iv$, folglich das Quadrat des Moduls m gleich $ww' = (u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2$. $w + w'$ wird $= 2u$. Da nun $m^2 = u^2 + v^2$ und $v^2 > 0$, so ist $m^2 > u^2$, folglich, weil $m > 0$, nach Nr. 69. $u < m$ aber $> -m$, so dass die Ungleichung besteht

$$-2m < w + w' < 2m.$$

Seien nun m_1 und m_2 die Moduln zweier Würfe w_1 und w_2. Bezeichnen wir mit w_1', w_2' die conjungirten zu w_1 und w_2, so ist der Modul p des Productes $w_1 w_2$ gegeben durch die Gleichung $p^2 = (w_1 w_2)(w_1' w_2') = (w_1 w_1')(w_2 w_2') = m_1^2 m_2^2$, aus der $p = m_1 m_2$ folgt, d. h. *der Modul eines Productes ist dem Producte der Moduln der Factoren gleich.*

Ist s der Modul der Summe $w_1 + w_2$, so ist $s^2 = (w_1 + w_2)(w_1' + w_2') = m_1^2 + m_2^2 + w_1 w_2' + w_2 w_1'$.

Da der Modul der beiden conjungirten Würfe $w_1 w_2'$ und $w_2 w_1'$ gleich $m_1 m_2$ ist, so ist nach der Ungleichung oben $w_1 w_2' + w_2 w_1'$ gelegen zwischen $-2 m_1 m_2$ und $+2 m_1 m_2$, so dass

$$(m_1 - m_2)^2 < s^2 < (m_1 + m_2)^2,$$

also

$$\pm (m_1 - m_2) < s < m_1 + m_2,$$

wo links $\pm$ zu nehmen ist, je nachdem $m_1 >$ oder $< m_2$ ist.

§ 17.

Ganze Functionen.

77. Nachdem die Begriffe der Addition und Multiplication der Würfe festgestellt sind, kann der Begriff einer ganzen Function eines Wurfes aufgestellt werden, der weiter keiner Erläuterung bedarf.

Da für Addition und Multiplication von Würfen dieselben Gesetze gelten wie für die betreffenden Zahlenoperationen, so wird man auch jede ganze Function des unbestimmten Wurfes x in dieselbe Normalform bringen können wie bei den Zahlen, nämlich in die

$$w_0 x^n + w_1 x^{n-1} + w_2 x^{n-2} + \cdots + w_n,$$

wo $w_0 w_1 \cdots w_n$ gegebene Würfe sind.

Es bezeichne ξ den Modul von x, $m_0 m_1 m_2 \cdots m_n$ die Moduln von resp. $w_0 w_1 w_2 \cdots w_n$. Dann ist nach Nr. 76. der Modul von $w_1 x^{n-1} + w_2 x^{n-2} + \cdots + w_n < m_1 \xi^{n-1} + m_2 \xi^{n-2} + \cdots + m_n$.

Ist m der grösste der Moduln $m_1 m_2 \cdots m_n$, so ist die rechte Seite

$$< m\,(\xi^{n-1} + \xi^{n-2} + \cdots + 1) < m\,\frac{\xi^n - 1}{\xi - 1}.$$

Nun wollen wir annehmen, es sei $\xi > 1$, dann ist die rechte Seite jedenfalls $< m\,\frac{\xi^n}{\xi - 1}$ und daher nach Nr. 76. Modul M von

$$w_0 x^n + w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n > m_0 \xi^n - \frac{m \xi^n}{\xi - 1} > \xi^n \left(m_0 - \frac{m}{\xi - 1}\right),$$

vorausgesetzt, dass die rechte Seite > 0 ist. Dies tritt sicher ein, wenn ξ so gross ist, dass $\frac{m}{\xi - 1}$ etwa $\leq \frac{1}{2} m_0$ ist, wozu $\xi > 1 + \frac{2m}{m_0}$ sein muss; zugleich ist dann die Bedingung $\xi > 1$ erfüllt. Dann ist also für

$$\xi > 1 + \frac{2m}{m_0}, \quad M > \tfrac{1}{2} m_0 \xi^n.$$

Da $\xi > 1$ ist, kann man $\xi = 1 + \eta$ setzen; dann ist, wie man leicht sieht, $\xi^n > 1 + n\eta$ und

$$M > \tfrac{1}{2} m_0 (1 + n\eta).$$

Soll nun $M >$ als ein gegebener positiver Wurf k werden, so braucht nur $\frac{1}{2} m_0 (1 + n\eta) > k$,

$$\xi = 1 + \eta > 1 + \frac{1}{n}\left(\frac{2k}{m_0} - 1\right)$$

zu sein. *Man kann daher dem Modul des variabeln Wurfes einer ganzen Function eine Grenze setzen, nach deren Ueberschreitung der Modul der Function einen gegebenen Wurf überschreitet.*

78. Es bezeichne $f(x)$ die ganze Function von x und es sei $f(x_0) = u_0$ und

$$f(x_0 + h) = u_0 + u_1 h + u_2 h^2 + \cdots,$$

wo $u_0, u_1, u_2 \cdots$ Würfe sind, die aus x_0 und den Coefficienten $w_0 w_1 \cdots$ sich berechnen lassen. Setzen wir voraus, der Modul x von h sei < 1 und der grösste der Moduln von $u_1, u_2 \cdots$ sei p, dann zeigt man genau wie vorher, dass der Modul von $f(x_0 + h) - f(x_0) < \frac{p x}{1 - x}$.

Soll demnach der Modul von $f(x_0 + h) - f(x_0)$ kleiner werden als ein gegebener positiver Wurf ε, so braucht nur $\frac{p\varkappa}{1-\varkappa} < \varepsilon$, $\varkappa < \frac{\varepsilon}{p+\varepsilon}$ zu sein. Da $f(x_0 + h) = f(x_0) + f(x_0 + h) - f(x_0)$, *so wird dann der Modul von* $f(x_0 + h)$ *sich vom Modul von* $f(x_0)$ *um weniger als* ε *unterscheiden.*

Sind in der ganzen Function $ah^r + a_1 h^{r+1} + \cdots$ alle Coefficienten a, $a_1 \cdots$ neutrale Würfe, so kann man für h immer einen solchen neutralen Wurf setzen, dass die Function positiv oder negativ ist, je nachdem der Wurf ah^r dies ist. Schreibt man die Function $h^r\left(a + \frac{a_1}{a}h + \frac{a_2}{a}h^2 + \cdots\right)$, so kann man für den Modul von h eine solche Grenze δ angeben, dass der Modul von $\frac{a_1}{a}h + \frac{a_2}{a}h^2 + \cdots$ kleiner als $\frac{1}{2}a$. Dann ist der Wurf selbst zwischen $-\frac{1}{2}a$ und $+\frac{1}{2}a$ gelegen, folglich der Coefficient von h^r zwischen $a + \frac{1}{2}a$ und $\frac{1}{2}a$; womit der Satz bewiesen ist.

79. Denkt man sich nun zu allen neutralen und nicht neutralen Würfen, die überhaupt existiren, die zugehörigen, durch die ganze Function bestimmten, Würfe und deren Moduln construirt und mit Hülfe von drei reellen festen Punkten ABC einer reellen Geraden und einem beweglichen Punkte dargestellt, so erhält man eine unzählige Menge von Punkten auf dem Stücke ABC. Nothwendig muss nun ein Punkt D existiren, so dass zwischen A und D keiner jener Punkte liegt, dagegen in jeder Strecke AD', die D enthält, auch Punkte jenes Systems enthalten sind. Denn zwischen D und C müssen nothwendig solche Punkte liegen, weil man nach Nr. 77. stets Würfe angeben kann, für welche der Modul der Function grösser als $ABCD$ ist.

Es soll nun bewiesen werden, dass stets mindestens ein Wurf existirt, der den Modul der ganzen Function $= ABCD$ *macht, welchen Wurf wir die untere Grenze der Moduln nennen und mit* k *bezeichnen wollen.*

Wenn die Coefficienten und die Variabeln der Function Zahlen sind, muss ein ähnlicher Beweis geführt werden. Herr Darboux hat in seinem Bulletin des sciences mathématiques (1872 Seite 307) einen solchen gegeben, den ich im Folgenden mit den nöthigen Abänderungen übertrage.

In Nr. 74. wurde bewiesen, dass jeder neutrale oder nichtneutrale Wurf stets in der Form $u + iv$ dargestellt werden könne, wo u und v neutrale Würfe und i ein gegebener nicht neutraler Wurf ist. In einer reellen Ebene werden nun zwei reelle Punkte P und Q angenommen. Durch P legen wir zwei reelle Linien a, b, durch Q ebenso zwei reelle Gerade a_1, b_1; die Verbindungslinie PQ bezeichnen wir mit c oder c_1. Man kann nun einen Strahl d von P so finden, dass $abcd = u$ einen d_1 von Q, welcher der Gleichung $a_1 b_1 c_1 d_1 = v$ ge-

nügt. Der Schnittpunkt R der beiden Strahlen d und d_1 stellt gleichzeitig die beiden Würfe u und v dar, kann also dazu dienen, den Wurf $u + iv$ zu repräsentiren, so dass jedem Wurfe ein reeller Punkt der Ebene und jedem reellen Punkte ein Wurf, also auch ein Functionswerth und dessen Modul entspricht.

Um uns im Folgenden kürzer ausdrücken zu können, wollen wir sagen, ein Punkt liege in dem Winkel pq (wo pq zwei reelle Strahlen durch P oder durch Q sind), wenn er von c durch die beiden Schenkel $p\,q$ getrennt ist. Ferner soll von einem Strahle r gesagt werden, er halbire den Winkel pq, wenn die Gleichung besteht

$$2\,(abcr) = (abcp) + (abcq),$$

aus der folgt

$$abcr - abcp = abcq - abcr = \tfrac{1}{2}\,(abcq - abcp).$$

Ist $abcq > abcp$, so ist demnach $abcq > abcr > abcp$, so dass nach Nr. 68. die Strahlen prq im Sinne abc aufeinander folgen. Aehnliche Gleichungen sollen natürlich gelten, wenn die Strahlen pq von Q ausgehen.

In dem Satze der Nr. 77. kam ein positiver Wurf k vor; wir wollen jetzt annehmen, dieser sei die untere Grenze der Moduln. Dann kann man, wie dort gezeigt ist, einen andern positiven Wurf ξ_0 finden, so dass, wenn der Modul von x grösser ist als ξ_0, der Modul von $f(x)$ grösser ist als k. Man bestimme nun durch P zwei Strahlen e, f und durch Q zwei Strahlen e_1, f_1 durch die Gleichungen

$$abce = a_1b_1c_1e_1 = -\,\xi_0, \quad abcf = a_1b_1c_1f_1 = \xi_0\,.$$

Für jeden Punkt R, der nicht gleichzeitig in den Winkeln ef und e_1f_1 gelegen ist und durch den die Strahlen p von P und q von Q gehen, ist dann mindestens eine der 4 Ungleichungen erfüllt:

$$abcp < abce\,, \qquad abcp > abcf,$$
$$a_1b_1c_1q < a_1b_1c_1e_1\,, \quad a_1b_1c_1q > a_1b_1c_1f_1\,.$$

Entspricht also dem Punkte R der Wurf $u + iv$, so dass $abcp = u$, $a_1b_1c_1q = v$ ist, so ist eine der 4 Ungleichungen

$$u < -\,\xi_0\,, \quad u > +\,\xi_0\,, \quad v < -\,\xi_0\,, \quad v > +\,\xi_0$$

erfüllt, so dass jedenfalls $u^2 + v^2 > \xi_0{}^2$, also der Modul von $u + iv$ grösser als ξ_0 ist. Für alle solche Punkte ist dann der Modul der Function $> k$, kann also nur für Punkte $= k$ werden, welche im Winkel ef und gleichzeitig in dem e_1f_1, d. h. in dem Viereck efe_1f_1 liegen. Die untere Grenze der Moduln, welche Punkten in diesem Viereck entsprechen, muss k sein.

Man halbire die Winkel ef und e_1f_1 durch je einen Strahl. Diese theilen zusammen das Viereck efe_1f_1 in vier Theile. Die untere Grenze

der Moduln, die zu Punkten in oder auf der Grenze von wenigstens einem dieser vier Vierecke gehören, muss gleich k sein, weil sie ja sonst für das ganze ursprüngliche Viereck nicht gleich k sein könnte. Die beiden von P ausgehenden Strahlen, welche zwei Seiten dieses neuen Vierecks bilden, seien $e'f'$, die beiden von Q ausgehenden $e_1'f_1'$; wobei natürlich entweder $e' = e$ und f' die Halbirungslinie des Winkels ef, oder $f' = f$ und e diese Halbirende ist. Jedenfalls ist aber nach dem Obigen

$$abce \leqq abce' < abcf' \leqq abcf,$$
$$abcf' - abce' = \tfrac{1}{2}(abcf - abce).$$

Mit diesem Viereck $e'f'e_1'f_1'$ verfährt man nun ebenso, erhält wieder ein neues $e''f''e_1''f_1''$ u. s. w. und erhält so eine Reihe von Vierecken, in deren jedem die untere Grenze der Moduln gleich k ist.

Weil nun die Ungleichungen bestehen

$$abce \leqq abce' \leqq abce'' \cdots,$$

folgen sich nach Nr. 68. die Strahlen $ee'e'' \cdots$ des Büschels P im Sinne abc. Daher muss eine Grenzlage d existiren, so dass in dem Winkel ed *alle* Strahlen $ee'e'' \cdots$ liegen, ausserhalb keiner, dass aber in jedem Winkel, der d enthält, solche Strahlen vorhanden sind.

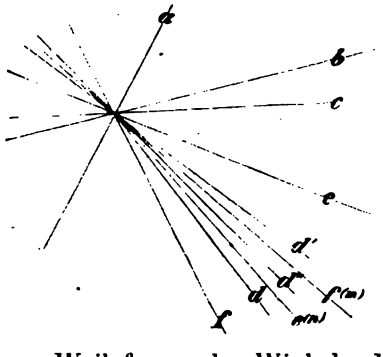
Ebenso, weil

$$abcf \geqq abcf' \geqq abcf'' > \cdots,$$

muss für die Strahlen $ff'f'' \cdots$, die sich im Sinne cba folgen, eine Grenzlage d' existiren.

Es kann $(abcd')$ nicht $> abcd$ sein. Denn es wäre dann $abcd' - abcd > 0$, aber vermöge jener Ungleichungen $< abcf - abce$, $< abcf' - abce'$, $< abcf'' - abce'' \cdots$, von welchen Würfen jeder die Hälfte des vorhergehenden ist. Nach dem in Nr. 71. bewiesenen Satze muss es in dieser Reihe also auch Würfe geben, die $< abcd' - abcd$ sind, was ein Widerspruch wäre.

Fig. 15.



Es kann aber auch nicht $abcd' < abcd$ sein. Gesetzt nämlich, dies wäre der Fall, so würde d' in dem Winkel ed liegen (Fig. 15). Man nehme nun in dem Winkel dd' einen Strahl d'' an. Dann enthält der Winkel fd'' den Strahl d und folglich liegen in ihm Strahlen aus der Reihe $ee'e'' \cdots$, von welchen einer $e^{(n)}$ sein möge.

Weil ferner der Winkel cd'' den Strahl d' enthält, liegen in ihm Strahlen der Reihe $ff'f'' \cdots$ und einer von diesen sei $f^{(m)}$. Da sich

die Strahlen $f^{(m)}d''e^{(n)}$ in dem Sinne abc folgen, so ist $abcf^{(m)} < abcd'' < abce^{(n)}$. Ist die ganze Zahl $l > m$ und $> n$, so ist nach den früheren Ungleichungen $abcf^{(l)} < abcf^{(m)}$ und $abce^{(l)} > abce^{(n)}$, folglich nach der vorigen Ungleichung $abcf^{(l)} < abce^{(l)}$, während doch das Gegentheil der Fall ist.

Somit ist auch jene Voraussetzung unrichtig und es bleibt nur noch die $abcd' = abcd$, welche aussagt, dass die beiden Strahlen d und d' zusammenfallen. Im Büschel Q existirt natürlich analog ein Strahl d_1, welcher die gemeinsame Grenzlage der Strahlen $e_1 e_1' e_1'' \cdots$ und $f_1 f_1' f_1'' \cdots$ ist. Die beiden Strahlen d und d_1 schneiden sich in einem Punkte R, der den Wurf $x_0 = abcd + i(a_1 b_1 c_1 d_1)$ darstellt. Der Modul der Function $f(x)$, der zu x_0 gehört, kann nun nicht $< k$ sein, weil ja k die untere Grenze ist. Dass er aber auch nicht grösser sein kann, soll jetzt gezeigt werden. Wäre er $= k + 2\varepsilon$, so bestimme man den positiven Wurf δ nach Nr. 78., so dass der Modul von $f(x_0 + h) - f(x_0)$ kleiner als ε ist, wenn der Modul von h kleiner ist als δ. Dann unterscheidet sich der Modul von $f(x_0 + h)$ vom Modul von $f(x_0)$ um weniger als ε, ist also grösser als $k + \varepsilon$. Man suche nun in der Reihe der Strahlen ef, $e'f'$, $e''f'' \cdots$ ein Paar $e^{(r)}f^{(r)}$ heraus, für welche

$$(abcf^{(r)} - abce^{(r)})^2 < \frac{\delta^2}{2}$$

und suche ebenso zwei Strahlen $e_1^{(s)}f_1^{(s)}$, für welche

$$(a_1 b_1 c_1 f_1^{(s)} - a_1 b_1 c_1 e_1^{(s)})^2 < \frac{\delta^2}{2}.$$

Dass dies stets möglich ist, folgt aus dem Satze der Nr. 71. Ist nun die ganze Zahl $t > r$ und $> s$ und g ein Strahl in dem Winkel $e^{(t)}f^{(t)}$, g_1 einer in dem Winkel $e_1^{(t)}f_1^{(t)}$, so ist, weil auch d resp. d_1 in diesen Winkeln liegen,

$$(abcg - abcd)^2 < (abcf^{(t)} - abce^{(t)})^2 < (abcf^{(r)} - abce^{(r)})^2 < \frac{\delta^2}{2},$$

$$(a_1 b_1 c_1 g_1 - a_1 b_1 c_1 d_1)^2 < \frac{\delta^2}{2}.$$

Setzt man also $x_0 + h = abcg + i(a_1 b_1 c_1 g_1)$, so ist

$$h = abcg - abcd + i(a_1 b_1 c_1 g_1 - a_1 b_1 c_1 d_1)$$

und das Quadrat des Moduls von h daher $< \delta^2$, der Modul selbst demnach $< \delta$. Nach dem oben über die Bestimmung von δ Bemerkten liefern also alle Punkte im Innern des Vierecks $e^{(t)}f^{(t)}e_1^{(t)}f_1^{(t)}$ Functionsmoduln, die grösser als $k + \varepsilon$ sind, und folglich sicher nicht die untere Grenze k haben, während doch das Viereck eines von denen ist, welche die untere Grenze k jener Moduln liefern. Also muss für den vorhin bestimmten Wurf x_0 der Modul von $f(x_0)$ gleich k sein. Der oben angekündigte Beweis ist hiermit geführt.

80. Jetzt soll bewiesen werden, *dass diese untere Grenze k der Moduln nur der Wurf 0 sein kann*; hierzu übertragen wir den Argand'schen Beweis für die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung auf Würfe.

Wir betrachten zuerst die specielle Gleichung

$$x^2 = u,$$

wo u ein gegebener Wurf ist. Stellen wir ihn auf dem Kegelschnitte durch $ABCD$ dar und x durch $ABCX$, so ist X so zu bestimmen, dass die Tangente an X die Linie AC in demselben Punkte trifft wie die Linie BD. Da der letztere Punkt aber gegeben ist, so braucht man von ihm aus nur die Tangenten an den Kegelschnitt zu legen, um in den Berührungspunkten solche Punkte X zu haben. Solcher Tangenten giebt es zwei, also auch zwei Punkte X, die wir X_1 und X_2 nennen wollen. Die Linie X_1X_2 geht dann durch den Pol von AC und folglich ist

$$ABCX_1 + ABCX_2 = 0.$$

Durch Ausdehnung dieses Schlusses folgt: *Es giebt stets Würfe, deren $2^{q\text{te}}$ Potenz einem gegebenen Wurfe gleich ist.*

Einen Wurf, dessen $2^{q\text{te}}$ Potenz gleich -1 ist, wollen wir mit α_q und einen Wurf, dessen $2^{q\text{te}}$ Potenz gleich i ist, mit β_q bezeichnen, so dass die Gleichungen bestehen

$$(\beta_q)^{2^q} = i\,, \quad (\alpha_q)^{2^q} = -1\,.$$

Sei nun allgemein

$$f(x_0 + h) = u_0 + u_p h^p + \cdots,$$

wobei die ganze Zahl p, die grösser oder gleich 1 ist, in die Form gesetzt werden kann,

$$p = 2^q \cdot r\,,$$

so dass r ungerade ist. u_p ist dabei natürlich als von 0 verschieden vorausgesetzt und der Modul von u_0 ist $= k$, während der von $f(x_0+h)$ jedenfalls für keinen Wurf h kleiner als k sein darf.

Um diesen Modul zu finden, multipliciren wir mit dem conjungirten Wurfe. Bezeichnen wir die conjungirten Würfe zu u_0, u_p, $h\cdots$ durch u_0', u_p', h', so ist das Quadrat des Moduls von $f(x_0+h)$ gleich

$$(u_0 + u_p h^p + \cdots)(u_0' + u_p' h'^p + \cdots) = k^2 + (u_p h^p u_0' + u_p' h'^p u_0) + \cdots$$

und folglich darf der Wurf

$$k_1 = u_0' u_p h^p + u_0 u_p' h'^p + \cdots \text{ nicht } < 0$$

sein.

Wenn nun der neutrale Wurf $u_o' u_p + u_o u_p'$ nicht $=0$ wäre, sondern <0, so setze man für h einen neutralen positiven Wurf g; ist er aber >0, so setze man $h = \alpha_q g$. Im ersten Falle ist $h^p = h'^p = g^p$, im zweiten,

weil $p = r2^q$, $h^p = g^p \cdot \alpha_q^{2^q r} = g^p (-1)^r$ und weil r ungerade ist, $h^p = -g^p = h'^p$. Man erhält so

$$\pm g^p (u_o' u_p + u_o u_p') + \cdots = k_1 ,$$

wo das obere Zeichen im ersten Falle, das untere im zweiten gilt, also der Coefficient von g^p jedenfalls negativ ist. Den positiven Wurf g kann man nun nach Nr. 78. so annehmen, dass es nur vom ersten Gliede abhängt, ob $k_1 > 0$ oder < 0 ist, und da hier dies erste Glied < 0 ist, so wird man durch passende Annahme von g auch $k_1 < 0$ machen können. Da dies nicht der Fall sein darf, so muss

$$u_o u_p' + u_o' u_p = 0$$

sein.

Setzt man dagegen $h = \beta_q g$, so ist $h^p = g^p (\beta_q)^{2^q r} = g^p i^r$, $h'^p = g^p i'^r = -g^p i^r$, weil ja $i + i' = 0$ ist, und k_1 wird

$$k_1 = g^p i^r (u_o' u_p - u_o u_p') + \cdots ,$$

während, wenn man $h = \beta_q' g$ setzt, wo β_q' zu β_q conjungirt ist,

$$h^p = g^p i'^r = -g^p i^r , \quad h'^p = -g^p i'^r = g^p i^r$$

und

$$k_1 = -g^p i^r (u_o' u_p - u_o u_p') + \cdots$$

wird. Der Coefficient von g^p ist neutral und, wenn er nicht $= 0$ ist, jedenfalls in einem der beiden Fälle negativ. Man kann daher durch passende Annahme von g $k_1 < 0$ machen.

Die Unmöglichkeit hiervon fordert, dass

$$u_o' u_p - u_o u_p' = 0$$

ist. Beide Gleichungen zusammen zeigen, da u_p nicht $= 0$ ist, dass $u_o = 0$ sein muss.

Somit haben wir jetzt den Satz bewiesen: *Es giebt stets einen Wurf, für welchen eine ganze Function dem Wurfe 0 gleich wird.*

Eine formale Folgerung hieraus und aus den Rechnungsregeln ist es aber, *dass n und nur n Würfe existiren, für welche eine ganze Function n^{ten} Grades dem Wurfe 0 gleich wird.*

§ 18.

Coordinaten.

81. Um einen Punkt in einer Ebene, sei sie reell oder imaginär, festzulegen, nehmen wir in dieser Ebene vier Punkte an $ABCE$. Ein Punkt P bestimmt dann drei Würfe

$$A(BECP), \quad B(CEAP), \quad C(AEBP) .$$

Sind umgekehrt zwei dieser Würfe gegeben, so ist der Punkt P vollständig bestimmt; daher muss zwischen den drei Würfen eine Be-

ziehung bestehen. Schneiden sich die Linien BP und EC in P_1, so ist $B(CEAP) = A(CEBP_1)$ und $C(AEBP) = A(CP_1BP)$. Daher nach der Definition der Multiplication

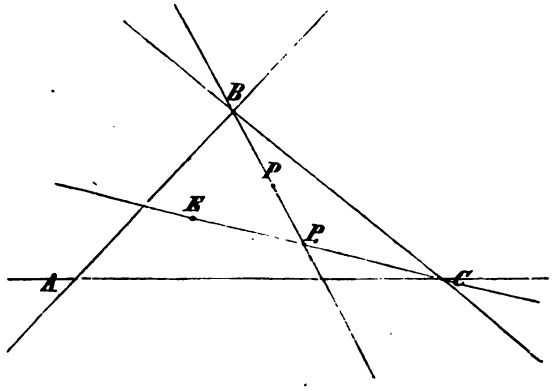
$$C(AEBP) \cdot B(CEAP) = A(CEBP_1) \cdot A(CP_1BP)$$
$$= A(CEBP) = A(BPCE).$$

Wenn man nun noch mit $A(BECP)$ multiplicirt, so findet sich, weil $A(BECP) \cdot A(BPCE) = 1$ ist, dass das Product jener drei Würfe $= 1$ ist. Deswegen kann man setzen

$$A(BECP) = \frac{x_3}{x_2}, \quad B(CEAP) = \frac{x_1}{x_3}, \quad C(AEBP) = \frac{x_2}{x_1},$$

wobei von den drei Würfen $x_1\, x_2\, x_3$ einer unbestimmt bleibt. Diese drei Würfe $x_1\, x_2\, x_3$ sollen die projectivischen Dreieckscoordinaten des

Fig. 16.

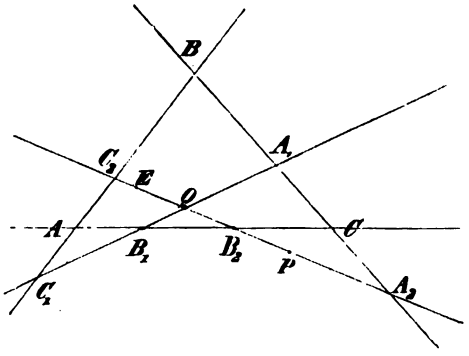


Punktes P heissen. Man kann sie etwa durch drei Punkte eines reellen Kegelschnitts repräsentiren. Die obige Rechnung ist unstatthaft, wenn einer der drei Würfe ∞ ist, was eintritt, wenn P auf AB, BC oder CA liegt. Liegt P z. B. auf BC, so ist $\frac{x_1}{x_3} = 0$ und $\frac{x_2}{x_1} = \infty$, dagegen $\frac{x_3}{x_2}$ weder 0 noch ∞, wenn nicht P in B oder C fällt. Deswegen kann auch weder x_2 noch x_3 0 oder ∞ sein und es muss $x_1 = 0$ sein. Fällt P nach C, so ist dabei $\frac{x_3}{x_2} = \infty$, und da man einen der drei Würfe willkührlich annehmen kann, so kann man $x_2 = 0$ setzen. Ebenso ist für den Punkt B $x_3 = 0$. Man kann also alle Punkte der Ebene festlegen, ohne dass man nöthig hat einen der drei Würfe gleich ∞ zu setzen.

Diese drei Würfe $x_1\, x_2\, x_3$ lassen sich geometrisch deuten. In der Ebene des Dreiecks ABC ziehe man eine beliebige Linie, welche von

EP in Q geschnitten werde (Fig. 17), während die Schnittpunkte von EP mit den Seiten AB, BC, CA resp. C_2, A_2, B_2 seien.

Fig. 17.



Man setze dann

$$x_3 = C_2EQP = EC_2PQ.$$

Weil nun

$$\frac{x_1}{x_3} = B(CEAP) = A_2EC_2P = EA_2PC_2$$

ist, so folgt

$$x_1 = (EC_2PQ)\,(EA_2PC_2) = EA_2PQ = A_2EQP.$$

Weiter ist

$$\frac{x_3}{x_2} = A(BECP) = C_2EB_2P = EC_2PB_2,$$

also

$$\frac{x_2}{x_3} = EB_2PC_2$$

und

$$x_2 = (EB_2PC_2)\,(EC_2PQ) = EB_2PQ = B_2EQP.$$

Die dualistisch entsprechenden Festsetzungen dienen dazu, die projectivischen Coordinaten einer Geraden zu bestimmen. Man braucht dazu ein Dreiseit abc und eine Gerade e. Die Coordinaten $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ sind dann gegeben durch die Gleichungen

$$a(becp) = \frac{\xi_3}{\xi_2}, \quad b(ceap) = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad c(aebp) = \frac{\xi_2}{\xi_1}.$$

Die drei Würfe $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ lassen sich, den $x_1\,x_2\,x_3$ dualistisch entsprechend, auf unendlich viele Arten geometrisch deuten.

§2. Es seien zwei Elementargebilde gegeben, z. B. zwei Punktreihen auf einem Kegelschnitte, ABC drei feste und P ein beweglicher Punkt der einen, $A_1B_1C_1P_1$ drei feste und ein beweglicher Punkt der andern.

Wenn man nun zwei Punkte PP_1 entsprechend nennt, wenn sie der Gleichung

$$A_1B_1C_1P_1 = ABCP + u$$

genügen, wo u ein gegebener Wurf ist, so sind beide Punktreihen projectivisch so bezogen, dass dem Punkte C der Punkt C_1 entspricht. Am einfachsten sieht man dies, wenn man den Wurf $u = ABCD$ setzt und nun nach der Definition der Addition den Wurf

$$ABCP_2 = ABCP + ABCD$$

construirt. Man sieht dann direct, dass die von P_2 beschriebene Punktreihe der von P beschriebenen projectivisch ist und dass C sich selbst in beiden Reihen entspricht. Weil dann $ABCP_2 = A_1B_1C_1P_1$ sein soll, so ist die Reihe der P_1 der der P_2 projectivisch und dem Punkte C_1 entspricht der Punkt C der letztern. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Auf dieselbe Weise zeigt man, dass auch die Gleichung

$$A_1B_1C_1P_1 = (ABCP)u$$

eine projectivische Beziehung gesetzt wird, bei der den Punkten A und C die A_1 und C_1 entsprechen.

Wenn umgekehrt die beiden Punktreihen projectivisch so auf einander bezogen sind, dass dem Elemente C der einen das C_1 der andern entspricht, so besteht die Gleichung:

$$A_1B_1C_1P_1 = u + v(ABCP),$$

wobei u und v gegebene Würfe sind. Denn nach dem Obigen ist die Beziehung projectivisch und dem Punkte C entspricht C_1. Die beiden Würfe u und v kann man aber auch noch so bestimmen, dass zwei weiteren Punkten der einen Reihe gegebene Punkte der andern entsprechen. Sollen z. B. den Punkten AB die Punkte D_1E_1 entsprechen, so muss sein

$$A_1B_1C_1D_1 = u,$$
$$A_1B_1C_1E_1 = u + v,$$

wonach diese Würfe zu construiren sind.

Wenn aber dem Punkte A der einen Reihe der C_1 der andern entsprechen soll, muss die Gleichung bestehen

$$A_1B_1C_1P_1 = u + \frac{v}{ABCP}.$$

Weil nämlich $(ABCP)(APCB) = 1$ ist, kann die Gleichung auch geschrieben werden

$$A_1B_1C_1P_1 = u + v(CBAP),$$

welche nach dem Vorigen eine projectivische Beziehung vermittelt, *in der* dem Punkte A der C_1 entspricht. Die Würfe u und v können

dann noch so bestimmt werden, dass zwei andern gegebenen Punkten der einen Reihe zwei gegebene der zweiten entsprechen.

Wenn endlich weder dem Punkte A noch dem C, sondern dem Punkte D der einen Reihe der Punkt C_1 der andern entsprechen soll, so muss die Gleichung lauten

$$A_1 B_1 C_1 P_1 = u + \overset{v}{\overline{ABCP - ABCD}}.$$

Alles zusammengenommen sind diese Gleichungen in der allgemeinen Form enthalten:

$$t(ABCP)(A_1 B_1 C_1 P_1) + u(ABCP) + v(A_1 B_1 C_1 P_1) + w = 0.$$

Die gefundenen Resultate übertragen sich von Punktreihen auf Kegelschnitten auf beliebige Gebilde.

83. Um nun die Gleichung einer geraden Linie abzuleiten, bemerken wir, dass durch eine solche die beiden Büschel von Linien, die durch die Ecken A und B des Coordinatendreiecks gehen, projectivisch auf einander bezogen werden, so dass der Strahl AB sich selbst entspricht. Daher muss zwischen den Würfen $A(BECP)$ und $B(CEAP)$, wenn P ein Punkt der Linie ist, eine der oben abgeleiteten Beziehungen bestehen; weil aber dem Strahle AB des ersten Büschels der BA des zweiten entspricht, muss diese Beziehung die zweite sein, wonach

$$B(CEAP) = u + \frac{v}{A(BECP)}$$

ist. Mit den oben für die Würfe eingeführten Zeichen wird diese Gleichung

$$\frac{x_1}{x_3} = u + v\,\frac{x_2}{x_3}$$

oder von der Form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Diese Ableitung setzt voraus, dass die Gerade durch keinen von beiden Punkten AB geht. Thut sie dies, so muss man zwei andere Büschel benützen und kommt zum gleichen Resultate.

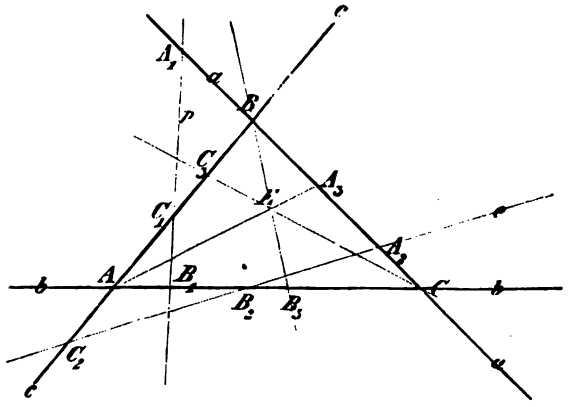
Die Coefficienten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ stehen in einer einfachen Beziehung zu den Coordinaten der geraden Linie, wenn das Coordinatendreiseit aus den drei Seiten des Coordinatendreiecks besteht.

Da für den Punkt C_1 (Fig. 18), in welchem die Gerade die Linie AB trifft, $x_3 = 0$ ist, so ist der Wurf $C(AEBC_1) = \frac{x_2}{x_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Nun schneide die bei der Coordinatenbestimmung der Geraden gebrauchte Linie e die drei Seiten AB, BC, CA, die wir mit $c\ a\ b$ bezeichnen, in den Punkten $C_2\ A_2\ B_2$, während die drei Linien AE, BE, CE die Gegenseiten in $A_3\ B_3\ C_3$ treffen mögen. Dann ist

$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = AC_3BC_1$. Multiplicirt man mit dem Wurfe AC_2BC_3, so folgt

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(AC_2BC_3) = (AC_3BC_1)(AC_2BC_3) = AC_2BC_1.$$

Fig. 18.



Sind nun $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ die Coordinaten der Geraden, so ist $\frac{\xi_2}{\xi_1} = c(aebp)$ $= BC_2AC_1 = AC_1BC_2$. Weil aber $(AC_1BC_2)(AC_2BC_1) = 1$, so ist

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(AC_2BC_3) = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Ausserdem hat man die Gleichungen

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}(BA_2CA_3) = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$

$$-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}(CB_2AB_3) = \frac{\xi_3}{\xi_1}.$$

Die Multiplication derselben giebt die Gleichung

$$(AC_2BC_3)(BA_2CA_3)(CB_2AB_3) = -1,$$

die sich auch leicht direct nachweisen lässt. Man kann also setzen

$$AC_2BC_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\quad BA_2CA_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2},\quad CB_2AB_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

wodurch die drei obigen Gleichungen in

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\lambda_1\xi_1}{\lambda_2\xi_2},\quad \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\lambda_2\xi_2}{\lambda_3\xi_3},\quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\lambda_3\xi_3}{\lambda_1\xi_1}$$

übergehen. Wegen der Unbestimmtheit der drei Würfe $\xi_1\,\xi_2\,\xi_3$ kann man also annehmen

$$\alpha_1 = \lambda_1\xi_1,\quad \alpha_2 = \lambda_2\xi_2,\quad \alpha_3 = \lambda_3\xi_3$$

und findet so als Gleichung der Geraden

$$\lambda_1 \xi_1 x_1 + \lambda_2 \xi_2 x_2 + \lambda_3 \xi_3 x_3 = 0 .$$

Die Gleichung wird am einfachsten, wenn die drei λ gleich 1 sind. Dann sind die drei Würfe AC_2BC_3, BA_2CA_3, CB_2AB_3 harmonisch und die Linie e ist die Harmonikale des Punktes E. Die Gleichung der Geraden ist dann

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

§ 19.

Algebraische Curven.

Herr Grassmann hat gezeigt*), dass man eine algebraische Curve an sich oder, wenn nöthig, in Verbindung mit einer mehrfach gerechneten Geraden auf linearem Wege erzeugen kann, indem er den Satz aussprach:

Wenn die Lage eines beweglichen Punktes P in einer Ebene dadurch beschränkt ist, dass ein Punkt und eine Gerade in einander liegen sollen, die durch Construction mittelst gerader Linien aus P abgeleitet wurden, so beschreibt der Punkt P eine Curve n^{ter} Ordnung, wenn er bei den Constructionen n mal angewandt wurde. Umgekehrt lässt sich jede Curve n^{ter} Ordnung auf diesem Wege erzeugen, wenn nöthig nach Beifügung einer Geraden.

Wenn nämlich eine Gerade entsteht durch Verbindung von P mit einem festen Punkte, so ist bei dieser Construction P einmal angewandt. Es soll gesagt werden, P sei bei der Construction einer Linie $\alpha + \beta$-mal angewandt, wenn die Linie zwei Punkte verbindet, bei deren Construction P resp. α- und β-mal angewandt wurde; und analog soll ein Punkt durch $\alpha + \beta$-malige Anwendung von P entstanden heissen, wenn er der Schnittpunkt zweier Linien ist, die durch α- resp. β-malige Anwendung von P gefunden sind.

Es ist eine formale Folge dieser Definition und der Form der Gleichung der Geraden, dass eine ganze Function n^{ter} Ordnung der Coordinaten von P gleich 0 sein muss, wenn der Punkt P einer Curve n^{ter} Ordnung angehören soll; und diese Folge gilt, ob die Coordinaten durch Zahlen oder durch Würfe gegeben werden.

Durch Combination mit der Gleichung einer Geraden erhält man zur Bestimmung der Schnittpunkte beider eine Gleichung n^{ten} Grades mit einem unbekannten Wurfe, die nach Nr. 80. stets durch n Würfe erfüllt ist. Also:

---

*) a. o. a. O.

Eine Curve n^{ter} Ordnung wird von jeder Geraden in n Punkten getroffen.

Wenn man die Schnittpunkte von zwei Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung suchen will, so hat man zwei Würfe zu suchen, welche gleichzeitig zwei ganze Functionen $= 0$ machen. Durch die Elimination des einen Wurfes, die eine ganz formale, nur von den Gesetzen des Rechnens abhängige, Operation ist, entsteht, wie bekannt, für den zweiten Wurf eine Gleichung $m \cdot n^{ten}$ Grades. Daher:

Schneiden sich zwei Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung in $m \cdot n$ Punkten.

Carlsruhe, im Juli 1874.

Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen.

Von Sophus Lie in Christiania.

Jacobi's epochemachende Arbeiten über partielle Differentialgleichungen 1. O.*) werden ohne Zweifel immer einen ausgezeichneten Platz in der Wissenschaft einnehmen. Doch scheinen sie von einigen Mathematikern überschätzt oder jedenfalls nicht richtig beurtheilt worden zu sein. Es verbreitete sich nämlich die Auffassung, dass durch Jacobi's Untersuchungen die Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. vollständig zum Abschluss gebracht worden sei. Eine solche Ansicht muss aber als unrichtig bezeichnet werden, nachdem neuere Arbeiten verbesserte und sogar neue Integrationsmethoden gegeben und gleichzeitig fruchtbare Untersuchungsrichtungen angebahnt haben.

In der nachstehenden Abhandlung gebe ich eine systematische Darstellung einer neuen Theorie, die ich 1872 und 1873 der Akademie in Christiania mitgetheilt habe. Ich schicke einige Bemerkungen voraus, die sich auf meine übrigen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen in ihrem Verhältniss zu gleichzeitigen Arbeiten Mayer's beziehen. Unter den vielen wichtigen Arbeiten dieses Verfassers habe ich nur diejenigen zu besprechen, die in engem Zusammenhange mit meinen Arbeiten stehen.

Résumé einiger älteren Untersuchungen.

Ausgehend von *geometrischen* Untersuchungen über die Plücker'sche Liniengeometrie in ihrem Verhältniss zur allgemeinen Krümmungs-

*) Die erste Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. rührt von Pfaff her (1814). Etwas später (1819) gab Cauchy eine Methode, die 1837 von Jacobi und in der letzten Zeit von Mayer (Math. Ann. Bd. IV) in neuer Weise formulirt worden ist. Diese Methode muss die Cauchy'sche und nicht die Jacobi-Hamilton'sche heissen. Endlich fand Jacobi 1837—1840 eine neue Methode, die jedoch erst 1862 veröffentlicht wurde. Diese letztere Methode werde ich die Jacobi'sche, nicht wie gewöhnlich die neue Jacobi'sche Methode nennen.

theorie wurde ich successive zu den partiellen Differentialgleichungen hinübergezogen. Dabei war es mir sogleich auffallend, dass die Mathematiker die von Monge mit so grossem Erfolge benutzte, gleichzeitig synthetische und analytische Methode verlassen hatten. Es schien mir wahrscheinlich (vgl. den Aufsatz „Ueber Complexe etc.", diese Ann. Bd. V.), dass eine solche *gemischte* Methode leichter zu neuen Resultaten führen würde, als die reine Analyse, die seit Monge fast ausschliesslich bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen angewandt worden war. Ich hege die Hoffnung, dass die von mir gemachten Entdeckungen zur Verbreitung einer solchen Auffassung dienen können.

Ich stellte mir 1871 die Aufgabe, die Jacobi'sche Integrationsmethode, insbesondere das Poisson-Jacobi'sche Theorem begrifflich durchzudenken. Hierbei zeigte et sich fast unmittelbar, dass es möglich war, eine *neue* Integrationsmethode*) zu geben, welche weniger Integrationen als die Jacobi'sche verlangt und dabei das Poisson-Jacobi'sche Theorem gar nicht benutzt. Diese neue Methode, die wie alle übrigen damit anfängt, ein Integral des bekannten simultanen Systems zu suchen, nimmt gewissermassen eine Zwischenstelle zwischen der Cauchy'schen und der Jacobi'schen Methode ein. Sie gründet sich auf meine Erweiterung der Cauchy'schen Methode.

Zu derselben Zeit gab Mayer**) ein *fundamentales Theorem* — ich nenne dasselbe das *Mayer'sche Theorem* —, welches ihm erlaubte, sowohl die Jacobi'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O., wie auch die Clebsch'sche Behandlung des Pfaff'schen Problems wesentlich zu verbessern. Hierdurch erreichte er insbesondere, freilich auf ganz anderem Wege als ich, dieselbe Erniedrigung in der Zahl der zur Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. O. nothwendigen Operationen.

Darnach entwickelte ich (Göttinger Nachrichten, 1872, Nr. 25) eine verallgemeinerte Auffassung des Begriffs vollständige Lösung, indem ich die Pfaff'sche Formulirung des Integrationsproblems consequent durchführte und weiter verwerthete. Hierdurch entfernte ich u. A. gewisse Mängel, die den bisherigen Integrationsmethoden noch angehaftet hatten.

Die eben citirten Theorien fand ich durch *rein synthetische* Betrachtungen, *indem ich den Monge'schen Begriff: Charakteristik consequent verallgemeinerte* und im Uebrigen nur einfache Ueberlegungen der modernen Mannigfaltigkeitslehre benutzte. Meine alte synthetische

*) Abhandlungen der Akademie zu Christiania, 3. und 10. Mai 1872; Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 16.

**) Math. Annalen Bd. V, S. 448; Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 15.

Darstellung dieser Theorien, die ich nur in grossen Zügen entwickelt habe, wird wahrscheinlicher Weise nur solche Leser befriedigen, die mit Mannigfaltigkeitsbetrachtungen sehr vertraut sind. Leider habe ich noch nicht Zeit gefunden dies Alles ausführlich darzustellen. Ich bin darum Mayer, der in mehreren eleganten Abhandlungen*) eine klare analytische Formulirung und Begründung dieser Untersuchungen, insoweit sie im Folgenden benutzt werden, gegeben hat, zu grossem Danke verpflichtet. Ich verweise den Leser auf die citirten Arbeiten Mayer's.

Ueber den Inhalt dieser Abhandlung.

Bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen verdienen solche Eigenschaften derselben eine besondere Aufmerksamkeit, die bei beliebigen Berührungstransformationen, d. h. analytischen Umformungen ungeändert bleiben**). Wichtig ist ein solches Studium u. A. deswegen, weil bei den gewöhnlichen Integrationsmethoden eben solche Eigenschaften in Betracht kommen. Insbesondere für Gleichungen 1. O., denen diese Abhandlung gewidmet ist, gestalten solche Untersuchungen sich sehr schön und einfach. Es ist hier möglich, mehrere fundamentale Probleme der besprochenen Art zu erledigen. In dieser Weise gewinnt man u. A. die Grundlage für eine rationelle Behandlung solcher partieller Differentialgleichungen 1. O., bei deren Integration man *schon einige Schritte vorwärts gekommen ist.* Es lässt sich immer entscheiden, wie man verfahren muss, um das noch übrige Integrationsgeschäft durch die einfachsten Mittel zu erledigen. Um dies an einem guten Beispiele zu erklären, betrachte ich die Gleichung

$$F(x_1 \cdots x_9 p_1 \cdots p_9) = a,$$

auf deren Integration Hamilton und Jacobi das Problem der drei Körper zurückgeführt haben. Man kennt bekanntlich 8 Integrale des zugehörigen simultanen Systems. Meine allgemeinen Theorien gestatten nun eine Gleichung

$$f(x_1 \cdots x_4 p_1 \cdots p_4) = 0$$

aufzustellen, deren Integration diejenige von $F = 0$ nach sich zieht. Hiermit ist dieses bekannte Resultat auf seinen innern Grund zurückgeführt***). — Im Uebrigen lege ich weniger Gewicht auf die neuen

*) Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 24, 1873, Nr. 11; Math. Ann. Bd. VI, S. 162, 192.

**) Klein hat darauf aufmerksam gemacht, dass es bei sehr vielen mathematischen Untersuchungsrichtungen sich darum handelt, Eigenschaften, die bei einer gewissen Transformationsgruppe invariant bleiben, zu bestimmen.

***) Die früher citirten Arbeiten von Mayer und mir haben das Problem der drei Körper wesentlich reducirt, insofern sie die Integration der Gleichung $f = 0$ vereinfacht haben.

Integrationstheorien meiner Abhandlung als auf die durch dieselbe gegewonnene *tiefere Einsicht in das Wesen der partiellen Differentialgleichungen 1. O.* Meine künftigen Arbeiten werden hoffentlich die Berechtigung dieser Auffassung zeigen.

Unter den neuen Theorien dieser Arbeit hebe ich auch die folgende schon hier hervor. Seien F, Φ_1 und Φ_2 solche Functionen von $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$, für welche

$$(F\Phi_1) = 0\,, \quad (F\Phi_2) = 0$$

ist. Alsdann sagt das Poisson-Jacobi'sche Theorem aus, dass auch

$$(F(\Phi_1\Phi_2)) = 0$$

ist. Kennt man also zwei Lösungen $\Phi_1\Phi_2$ der Gleichung

$$(F\Phi) = 0\,,$$

so giebt es eine Operation, welche im Allgemeinen gestattet, mehrere solche Lösungen zu finden.

Ich beweise nun, dass eine jede Operation, welche dazu dient, neue Lösungen aus bekannten zu finden, sich wesentlich mit der genannten deckt; dabei wird nur vorausgesetzt, dass die Art der betreffenden Operation von der Form der Function F unabhängig sein soll.

Ich fand die nachstehenden Theorien durch Anwendung einer *gemischten, synthetisch-analytischen* Methode. Wenn die Redaction mir weniger Mühe gemacht hätte, würde ich versucht haben, Alles gleichzeitig synthetisch und analytisch nach Monge's Muster zu entwickeln. Da ich indess nur wenig Vertrauen zu meiner Redactionsfähigkeit hege und ausserdem mit neuen Untersuchungen beschäftigt bin, so habe ich vorgezogen, meine Resultate in der *gewöhnlichen* analytischen Form darzustellen. Hierdurch hat jedoch insbesondere der erste Abschnitt an Einfachheit verloren. Glücklicher Weise kann ich den Leser auf eine schöne und *ausserordentlich einfache* analytische Begründung verweisen, welche Mayer eben von den Resultaten des ersten Abschnitts gegeben hat*).

Erster Abschnitt.

Theorie der Berührungstransformationen.

Ich werde versuchen, die Theorie der Berührungstransformationen, die für meine bisherigen wie für meine künftigen Arbeiten über partielle Differentialgleichungen die Grundlage bildet, analytisch und für

*) Göttinger Nachrichten, 1874, Nr. 13: Ueber die Lie'schen Berührungstransformationen. Vgl. auch die folgende Note von Mayer.

n Variabeln zu entwickeln. Wie schon gesagt, giebt der citirte Aufsatz Mayer's eine elegante Entwickelung dieser Theorie, welche u. A. deswegen der meinigen vorzuziehen ist, weil sie direct ist, während meine Behandlung auf der Clebsch'schen Theorie des Pfaff'schen Problems beruht. (Vergl. § 8.).

§ 1.

Definition des Begriffs Berührungstransformation.

1. Die Theorie der Berührungstransformationen geht ihrem Ursprunge nach bis auf Euler zurück; später hat insbesondere Jacobi in Verbindung mit Arbeiten über die Störungstheorie Entwickelungen gegeben, die hierher gehören. Wenn ich nicht irre, bin ich jedoch derjenige, der zuerst die allgemeine Bedeutung dieser Theorie dargethan und hervorgehoben hat. Ich glaube auch, dass ich zuerst das eigentliche Wesen*) der Sache scharf und präcis dargelegt habe; die Bezeichnung Berührungstransformation rührt von mir her**).

Ehe ich den Begriff Berührungstransformation definire, halte ich es für zweckmässig, einige einfache geometrische Betrachtungen, welche naturgemäss auf diesen Begriff führen, vorauszuschicken. Dieselben beziehen sich zwar nur auf einen Raum von drei Dimensionen. Sie lassen sich indess auf beliebige Mannigfaltigkeiten ausdehnen.

Wird der Cartesische Punkt-Raum im gewöhnlichen Sinne des Wortes einer Punkttransformation unterworfen, so gehen Flächen in Flächen, Flächen, die sich berühren, in eben solche über. Freilich giebt es einige Ausnahmegebilde, die sich in anderer Weise transformiren; dieselben treten aber nur in begrenzter Zahl auf. Es giebt aber ausser den Punkttransformationen noch andere Umformungen, die einen verwandten Charakter besitzen. So führt z. B. auch eine dualistische Transformation *im Allgemeinen* Flächen in Flächen, Flächen, die sich berühren, in eben solche über. Hierbei ist indess zu

*) Ich erinnere insbesondere daran, dass ich gezeigt habe, dass jede Berührungstransformation im Plücker'schen Sinne auf einem Wechsel des Raumelements oder auf der Einführung eines neuen Coordinatensystems beruht. Für eine synthetische Behandlung der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. ist diese Bemerkung fundamental.

**) Nachdem ich meine ersten Arbeiten über Berührungstransformationen veröffentlichte, schrieb mir gelegentlich Darboux, dass er sich auch mit dieser Theorie beschäftigt hätte. Ich muss bedauern, dass ich aus seinen Untersuchungen, die noch nicht veröffentlicht worden sind, keinen Vortheil habe ziehen können. — Du Bois-Reymond hat sich mit den Berührungstransformationen eines dreifach ausgedehnten Raumes beschäftigt. Die Resultate, die sein Werk über partielle Differentialgleichungen enthält, sind jedoch nicht vollständig.

bemerken, dass es unbegrenzt viele Flächen giebt, die Developpabeln nämlich, die sich bei einer dualistischen Umformung nicht in Flächen, sondern in Curven transformiren. Insbesondere gehen alle Ebenen in die Punkte des Raumes über.

Es lässt sich beweisen, dass es ausser den Punkttransformationen eine ausgedehnte Kategorie von Umformungen giebt, bei denen im Allgemeinen Flächen in Flächen, Flächen, die sich berühren, in eben solche übergehen. Bei einer jeden solchen Transformation, die keine Punkttransformation ist, treten unbegrenzt viele Flächen auf, die sich in Curven transformiren. Insbesondere giebt es ∞^3 Flächen, die in die Punkte des Raumes übergehen.

Dieses ist indess keine Definition der Berührungstransformationen des Raumes; wir haben ja nur wesentliche Eigenschaften derselben angegeben.

2. In früheren Abhandlungen gab ich etwa folgende Definition. Sind die unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_n$, die Function derselben z, und die partiellen Derivirten von z hinsichtlich $x_1 \cdots x_n$, welche $p_1 \cdots p_n$ heissen mögen, in solcher Weise mit einem entsprechenden Systeme von Variabeln $z' x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'$ verbunden, dass eine jede Grösse aus einer der beiden Reihen

$$z\, x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n,$$
$$z' x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'$$

sich durch Grössen der andern Reihe ausdrücken lässt, so nenne ich die betreffende Transformation eine Berührungstransformation. Diese Definition ist indess nicht hinlänglich klar und vielleicht auch nicht ganz correct, insofern sie implicite auf Voraussetzungen beruht, die nicht immer stattfinden. Ich ersetze daher diese Definition durch die folgende, die nach meiner Auffassung das Wesen der Sache vollständig trifft:

Def. Sind $ZX_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ solche Functionen von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, für welche identisch

$$(1) \qquad dz - \sum_{k=1}^{k=n} P_k dX_k = \varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k\right)$$

ist, so definiren die Gleichungen

$$(2) \qquad z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Transformation, die eine Berührungstransformation heissen soll.

Dass die Gleichungen (2) immer eine Transformation definiren, beruht darauf, dass die Gleichung (1) mit Nothwendigkeit verlangt, dass $ZX_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ von einander unabhängige Functionen sind.

Terminologie. Sind F und Φ Functionen von $zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, so schreibe ich wie üblich $[F\Phi]$ statt

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left\{ \frac{\partial F}{\partial p_k} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial F}{\partial z} \right) \right\}$$

und ebenso, wenn F und Φ nicht z enthalten, $(F\Phi)$ statt

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial x_k} \right).$$

Wünsche ich hervorzuheben, dass F und Φ als Functionen von $x_1 \cdots p_n$ und nicht etwa von $x_1' \cdots p_n'$ betrachtet werden, so schreibe ich $(F\Phi)_{xp}$.

Man weiss, dass der Pfaff'sche Ausdruck $\sum_{k=1}^{k=n} X_k dx_k$ im Allgemeinen auf eine Form mit n Gliedern

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

reducirt werden kann. Hier sind die Functionen f nach Clebsch (Crelle's Journal Bd. 61, S. 153) ein beliebiges System Lösungen von $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen, die ich mit den Symbolen

$$((f_i)) = 0, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

bezeichnen werde.

§ 2.

Bestimmung aller Berührungstransformationen.

In diesem Paragraphen gebe ich zwei der Form nach sehr verschiedene Bestimmungen aller Berührungstransformationen. Dabei stütze ich mich auf die als bekannt vorausgesetzte Theorie des Pfaff'schen Problems, welche überhaupt nach meiner Auffassung bei Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen 1. O. mehr in den Vordergrund zu stellen ist, als dies seit Cauchy und Jacobi geschehen ist. Insbesondere kann ich nicht genug hervorheben, dass die Pfaff'sche Auffassung des Problems, eine Gleichung

$$F(zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = 0$$

zu integriren, dieser Theorie eine Allgemeinheit giebt, die der gewöhnlichen Behandlungsweise desselben gänzlich abgeht. Freilich scheint Niemand auf diesen fundamentalen Vorzug der Pfaff'schen Betrachtungsweise aufmerksam geworden zu sein.

3. Sei

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

ein vorgelegter Pfaff'scher Ausdruck, dessen kanonische Form*) $n+1$ Glieder enthält. Ist

$$\alpha (df_{n+1} + F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n)$$

eine gegebene solche Form, so ist es bekanntlich möglich, beliebig viele kanonische Formen

$$\beta (d\varphi_{n+1} + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n)$$

zu finden. Um nämlich in allgemeinster Weise die Gleichung

$$(3) \qquad df_{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} F_k df_k = \varrho . (d\varphi_{n+1} + \sum_{k=1}^{k=n} \Phi_k d\varphi_k)$$

zu befriedigen, wählt man willkührlich $q+1$ Gleichungen zwischen den f und φ:

$$\Pi_0 = 0 , \quad \Pi_1 = 0 \cdots \Pi_q = 0$$

und setzt

$$F_i = \frac{\partial (\Pi_0 + \lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_q \Pi_q)}{\partial f_i} : \frac{\partial (\Pi_0 + \lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_q \Pi_q)}{df_{n+1}} ,$$

$$\Phi_i = \frac{\partial (\Pi_0 + \lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_q \Pi_q)}{\partial \varphi_i} : \frac{\partial (\Pi_0 + \lambda_1 \Pi_1 + \cdots + \lambda_q \Pi_q)}{\partial \varphi_{n+1}} ,$$

$$(i = 1, 2 \cdots n) .$$

Eliminirt man $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ aus diesen $2n+q+1$ Gleichungen und löst dieselben sodann nach f_i und F_i auf, so findet man Werthe für diese Grössen, welche (3) identisch erfüllen.

4. Die Aufgabe, alle Berührungstransformationen zu bestimmen, kommt nach meiner Definition darauf hinaus, die Grössen $z' x' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n'$ in allgemeinster Weise als Functionen von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$dz' - \sum_{k=1}^{k=n} p_k' dx_k' = \varrho (dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

identisch stattfindet. Da nun $z x_1 \cdots p_n$ von einander unabhängige Grössen sind, so ist es erlaubt, $dz - \sum p_k dx_k$ als kanonische Form eines $(2n+1)$-gliedrigen Pfaff'schen Problems zu betrachten, und man erhält folglich aus den eben angegebenen bekannten Resultaten der Pfaff'schen Theorie unmittelbar den Satz:

---

*) Lässt sich ein Pfaff'scher Ausdruck $X_1 dx_1 + \cdots + X_m dx_m$ auf eine p-gliedrige Form $F_1 df_1 + \cdots + F_p df_p$ und nicht auf eine Form mit weniger als p Gliedern zurückführen, so nenne ich $F_1 df_1 + \cdots + F_p df_p$ eine *kanonische Form* oder Normalform des vorgelegten Ausdruckes.

Satz 1. Eine jede Berührungstransformation kann in folgender Weise erhalten werden. Man nimmt $q+1$ *Gleichungen an zwischen* $zx_1 \cdots x_n z' x_1' \cdots x_n'$:

$$\Pi_0 = 0, \quad \Pi_1 = 0 \cdots \Pi_q = 0$$

und setzt

$$-p_i = \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial x_i} : \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial z},$$

$$-p_i' = \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial x_i'} : \frac{\partial(\Pi_0 + \lambda_1\Pi_1 + \cdots + \lambda_q\Pi_q)}{\partial z'},$$

$$(i = 1 \cdots n).$$

Eliminirt man $\lambda_1 \cdots \lambda_q$ *zwischen diesen* $2n+q+1$ *Gleichungen, so bestimmen die übrigbleibenden* $2n+1$ *Gleichungen immer eine Berührungstransformation zwischen den beiden Systemen von Variabeln* $zx_1 \cdots p_n$ *und* $z' x_1' \cdots p_n'$.

Jacobi betrachtet ebenfalls alle diese Transformationen und zwar behauptet er, dass dieselben die allgemeinsten Umformungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O. sind. Auf diese Behauptung, deren Richtigkeit jedenfalls nicht a priori einleuchtend ist, soll hier nicht eingegangen werden. Im Uebrigen giebt Jacobi keine explicite Definition des Begriffs: allgemeinste Umformung einer partiellen Differentialgleichung 1. O.*).

5. Die eben gegebene Bestimmung aller Berührungstransformationen ist u. A. deswegen nicht befriedigend, weil dieselbe, wenn auch nur implicite, eine Classification der Berührungstransformationen nach dem Werthe der Zahl q einführt; eine solche Classification entspricht aber keineswegs dem Wesen der Sache, insofern sie gewissermassen auf einer Zufälligkeit beruht. Ich gebe daher eine neue allgemeine Methode zur Bestimmung von Berührungstransformationen. Würde man dieselbe in einem besonderen Falle anwenden, so wäre es freilich nothwendig, nicht allein Differentiationen und Eliminationen, wie bei der ersten Methode, sondern überdies auch gewisse Integrationen auszuführen. Wo es sich aber nur darum handelt, den Begriff festzustellen, ist dies vollständig gleichgültig.

Aus der Theorie des Pfaff'schen Problems ist es bekannt, dass

*) Ich benutze die Gelegenheit, um zwei Fragen aufzuwerfen, von denen insbesondere die letzte wichtig scheint. 1) Giebt es Transformationen, welche keine Berührungstransformationen sind, bei denen Berührung höherer Ordnung invariante Beziehung ist? — Diese Frage scheint mit Nein beantwortet werden zu müssen. 2) Gestatten partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung Umformungen, welche keine Berührungstransformationen sind? Diese Frage muss wohl mit Ja beantwortet werden. Ist dies der Fall, so eröffnet sich hier ein wichtiges Gebiet für die Forschung.

man einen $(2n+1)$-gliedrigen Ausdruck $\sum_k X_k dx_k$ in folgender Weise auf einen $(n+1)$-gliedrigen reducirt. Man nimmt eine beliebige Function φ von $x_1 \cdots x_{2n+1}$, schafft die Grössen x_{2n+1} und dx_{2n+1} vermöge der Gleichungen

$$\varphi = a\,, \qquad \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx_k = 0$$

aus dem gegebenen Ausdrucke weg, und erhält so einen $2n$-gliedrigen Ausdruck

$$X_1^a dx_1 + \cdots + X_{2n}^a dx_{2n}\,,$$

dessen Coefficienten ausser $x_1 \cdots x_{2n}$ noch a enthalten. Man bringt denselben in der gewöhnlichen Weise auf die Form:

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_k^a dx_k = \sum_{k=1}^{k=n} \Phi_k^a d\varphi_k^a$$

und ersetzt sodann in $\varphi_1^a \cdots \varphi_n^a$ die Grösse a durch φ, wodurch diese Functionen übergehen in Functionen von $x_1 \cdots x_{2n+1}$, die durch $\varphi_1 \cdots \varphi_n$ bezeichnet werden mögen. Alsdann kann der ursprüngliche $(2n+1)$-gliedrige Ausdruck die Form

$$\Phi d\varphi + \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

erhalten, wobei $\Phi\, \Phi_1 \cdots \Phi_n$ in der gewöhnlichen Weise bestimmt werden. Ich füge nur noch hinzu, dass $\varphi_1^a \cdots \varphi_n^a$ durch die Clebsch'schen Gleichungen

$$((\varphi_i^a)) = 0\,, \quad ((\varphi_i^a\, \varphi_k^a)) = 0\,, \quad (i = 1 \cdots n)\,, \quad (k = 1 \cdots n)$$

definirt sind.

6. Die Aufgabe, alle Berührungstransformationen zu bestimmen, kommt nach meiner Definition darauf hinaus, den Pfaff'schen Ausdruck $dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k$, welcher schon die kanonische Form besitzt, in allgemeinster Weise auf eine neue kanonische Form zu bringen. Zu diesem Ende kann man nach dem Vorhergehenden folgendermassen verfahren.

Man wählt beliebig eine Function Z von $z x_1 \cdots p_n$ und löst die Gleichung

$$Z = a$$

nach p_n auf, wodurch sich ergeben möge

$$p_n = f(z x_1 \cdots p_{n-1} a)\,.$$

Man bringt hierauf den Ausdruck

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - f dx_n$$

auf die Form

$$Y_1^a dX_1^a + \cdots + Y_n^a dX_n^a,$$

wo die X_i^a durch die Gleichungen

$$((X_i^a)) = 0, \quad ((X_i^a X_k^a)) = 0, \quad (i = 1 \cdots n)\,(k = 1 \cdots n)$$

bestimmt sind. Diese Gleichungen nehmen in unserem Falle, wie man leicht findet, die Form an:

$$[p_n - f, X_i^a] = 0, \quad [X_i^a X_k^a] = 0, \quad (i = 1 \cdots n)\,(k = 1 \cdots n).$$

Daraus folgt aber, dass die Grössen X_i, das heisst diejenigen Functionen von $z x_1 \cdots p_n$, die hervorgehen, wenn in X_i^a die Grösse a durch Z ersetzt wird, durch das System von Gleichungen

(A) $$[Z X_i] = 0, \quad [X_i X_k] = 0, \quad (i = 1 \cdots n)\,(k = 1 \cdots n)$$

definirt sind*). Kennt man Functionen $Z X_1 \cdots X_n$, welche diese Relationen erfüllen, so ist es also möglich, die Gleichung

$$dZ - \sum_{k=1}^{k=n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

identisch zu befriedigen. Die Grössen $\varrho, P_1, \cdots P_n$ werden bestimmt durch $n+1$ von den $2n+1$ Gleichungen

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = \varrho, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -\varrho p_i,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0, \quad (i = 1 \cdots n).$$

Es ist wohl zu bemerken, dass die Functionen $Z X_1 \cdots X_n$ keiner andern Beschränkung unterworfen sind, als der Forderung, die Gleichungen (A) zu erfüllen. Die erhaltenen Resultate lassen sich folgendermassen zusammenfassen.

Theorem I. Kennt man $n+1$ von einander unabhängige Functionen $Z X_1 \cdots X_n$ von $z x_1 \cdots p_n$, welche die Gleichungen

$$[Z X_i] = 0, \quad [X_i X_k] = 0, \quad i = 1 \cdots n, \quad k = 1 \cdots n$$

erfüllen, so ist es immer möglich, die Gleichung

$$dZ - \sum_{k=1}^{k=n} P_k dX_k = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

identisch zu befriedigen, und dann definiren die Relationen

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation. Die oben angegebenen Bedingungsgleichungen sind nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig.

---

*) Hiermit ist im Uebrigen eine neue formale Behandlung des Pfaff'schen Problems angedeutet. Dieselbe ist vollständig symmetrisch, was die Clebsch'sche nicht ist.

Dass es überhaupt möglich ist, $n+1$ Functionen $H_0 H_1 \cdots H_n$ von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ zu finden, welche paarweise den Bedingungen $[H_i H_k] = 0$ genügen, beruht auf folgendem Satze:

Satz 2. Sind $H_0 H_1 \cdots H_q$ Functionen von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ und verschwinden alle $[H_i H_k]$, so bilden die linearen Gleichungen

$$[H_0 H] = 0, \cdots\cdots [H_q H] = 0$$

ein vollständiges System*).

Setzt man nämlich $[H_k H] = A_k(H)$ und bildet die Ausdrücke $A_i(A_k(H)) - A_k(A_i(H))$, so sieht man, dass dieselben sich linear durch die $A_i(H)$ ausdrücken lassen.

§ 3.

Berührungstransformationen, welche Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ in Functionen von $x_1 \cdots p_n$ überführen.

Ich werde jetzt die Existenz einer sehr wichtigen Kategorie von Berührungstransformationen nachweisen. Die charakteristische Eigenschaft derselben besteht darin, dass sie Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ in Functionen von $x_1 \cdots p_n$ überführen. Sind also

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

die Gleichungen einer solchen Transformation, so enthalten die Grössen X_i und P_i die Variable z gar nicht, sondern nur $x_1 \cdots p_n$. In den beiden ersten Nummern gebe ich zwei Methoden an, um beliebig viele solche Transformationen aufzufinden. In der letzten Nummer zeige ich, dass beide Methoden in dem Sinne allgemein sind, dass sowohl die eine wie die andere eine jede Transformation der besprochenen Art giebt.

In dem vorangehenden Paragraphen sahen wir, dass die Bestimmung aller Berührungstransformationen unmittelbar aus der Theorie

---

*) Stehen q lineare partielle Differentialgleichungen mit n Variabeln

$$A_1(H) = 0, \cdots A_q(H) = 0,$$

die von einander unabhängig sind, in solcher gegenseitigen Beziehung, dass jedes $A_i(A_k(H)) - A_k(A_i(H))$ sich linear durch die $A_i(H)$ ausdrücken lässt, so haben dieselben, wie Clebsch (Borchardt's Journal Bd. 65) nachgewiesen hat, $n-q$ verschiedene gemeinsame Lösungen. Ein solches System nenne ich mit Clebsch ein *vollständiges* System. Auf die Betrachtung solcher Systeme gründet Clebsch die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit gemeinsamen Lösungen. Die entsprechende Theorie für beliebige, d. h. nicht eben lineare Gleichungen ist zuerst von Mayer gegeben worden. Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass Mayer, wie auch Clebsch, seinen Ausgangspunkt in einer Idee nimmt, die von Bour herrührt. Mayer hat darauf aufmerksam gemacht, dass Bour's Formulirung dieser Theorie nicht stringent ist.

des determinirten Falles des Pfaff'schen Problems folgte. Es liesse sich leicht zeigen, dass die Entwickelungen dieses Paragraphen im genauen Zusammenhange mit einer neuen Theorie des indeterminirten Falles stehen, die von Clebsch (Borchardt's Journ. Bd. 61) herrührt.

7. Nehmen wir willkührlich $q+1$ Gleichungen an zwischen $z'x_1'\cdots x_n' z x_1\cdots x_n$, welche z und z' nur in der Combination $z'-Az$ enthalten, wo A eine Constante ist, bringen dieselben auf die Form:

$$z'-Az=\Pi(x_1'\cdots x_n' x_1\cdots x_n),\quad \Pi_1(x_1'\cdots x_n)=0,\quad \cdots \Pi_q(x_1'\cdots x_n)=0,$$

und suchen nun nach Satz 1. die Berührungstransformation, welche diesen Gleichungen zugehört, so erhalten wir die Formeln:

$$p_i'=\frac{\partial\Pi}{\partial x_i'}+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i'}+\cdots+\lambda_q\frac{\partial\Pi_q}{\partial x_i'},$$

$$-Ap_i=\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial\Pi_1}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_q\frac{\partial\Pi_q}{\partial x_i}.$$

Diese $2n$ Gleichungen, verbunden mit den q Gleichungen $\Pi_1=0,\ \cdots\Pi_q=0$, drücken die x_i' und p_i' durch $x_1\cdots x_n p_1\cdots p_n$ allein aus und, indem man die so gefundenen Werthe in die Gleichung $z'-Az=\Pi$ einsetzt, erhält dieselbe die Form

$$z'=Az+F(x_1\cdots x_n p_1\cdots p_n).$$

Also:

Satz 3. Gleichungen zwischen $z'x_1\cdots x_n' z x_1\cdots x_n$, welche z und z' nur in der Combination $z'-Az$ enthalten, definiren eine Berührungstransformation, die sich durch Gleichungen der folgenden Form ausdrückt:

$$z'=Az+F;\quad x_i'=X_i;\quad p_i'=P_i.$$

Hier ist A eine Constante, F, X_i und P_i sind Functionen von $x_1\cdots x_n p_1\cdots p_n$ allein. Eine solche Transformation bezeichne ich zuweilen kurzweg als eine Transformation zwischen xp.

8. Die eben entwickelte Methode zur Auffindung von Berührungstransformationen zwischen xp hat das Missliche, dass sie eine Classification, die dem Wesen der Sache nicht entspricht, nämlich nach dem Werthe der Zahl q einführt. Von diesem Uebelstande ist die folgende Methode frei; im Uebrigen haben beide Methoden ihre selbstständige Berechtigung. Ich schicke zunächst einen Hülfssatz voraus.

Satz 4. Sind $X_1\cdots X_q$ Functionen von $x_1\cdots p_n$, welche paarweise den Bedingungen $(X_iX_k)=0$ genügen, so giebt es unter den Lösungen F des vollständigen Systems (Satz 2)

$$[X_1F]=0,\ \cdots\ [X_qF]=0$$

einige, welche die Form $Az+\Pi$ besitzen. Hier ist A eine Constante und Π eine Function von $x_1\cdots p_n$ allein.

Unser Satz kommt darauf hinaus, dass die Gleichungen

$$[X_1 F] = 0, \cdots [X_q F] = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = A$$

gemeinsame Lösungen besitzen. Um dies nachzuweisen, versuchen wir eine solche Function Φ von $z x_1 \cdots p_n$ und F zu finden, dass die Auflösung der Gleichung $\Phi =$ Const. eine Function F der verlangten Eigenschaft giebt. Es zeigt sich, dass Φ die folgenden Relationen erfüllen muss:

$$[X_1 \Phi] = 0, \cdots [X_q \Phi] = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + A \frac{\partial \Phi}{\partial F} = 0;$$

dieselben bilden aber, wie man leicht verificirt, ein vollständiges System. Also ist unser Satz erwiesen.

Hier möge auch der folgende Satz, den ich später brauche, einen Platz finden.

Satz 5. Kennt man eine Lösung F des vollständigen Systems

$$[X_1 F] = 0, \cdots [X_n F] = 0,$$

welche die Form $z + \Pi(x_1 \cdots p_n)$ besitzt, so ist $Az + A\Pi + \Omega(X_1 \cdots X_n)$ eine allgemeinere solche Lösung, und zwar die allgemeinste, die hinsichtlich z linear ist. Ω bezeichnet eine arbiträre Function der betreffenden Argumente.

Seien nämlich

$$F_1 = A_1 z + \Pi_1; \quad F_2 = A_2 z + \Pi_2$$

zwei Lösungen der besprochenen Form. Alsdann genügt auch $A_2 F_1 - A_1 F_2$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $A_2 \Pi_1 - A_1 \Pi_2$, worin z gar nicht vorkommt, unserem vollständigen Systeme. Daraus folgt aber bekanntlich

$$A_2 \Pi_1 - A_1 \Pi_2 = W(X_1 \cdots X_n),$$

welche Gleichung unseren Satz beweist.

Satz 6. Sind $X_1 \cdots X_n$ Functionen von $x_1 \cdots p_n$, welche paarweise den Bedingungen $(X_i X_k) = 0$ genügen, so giebt es (Satz 4.) Functionen von der Form $Az + \Pi(x_1 \cdots p_n)$, welche alle Gleichungen

$$[X_i, Az + \Pi] = 0, \quad (i = 1 \cdots n)$$

erfüllen, und daher ist es (Theorem I.) möglich, die Gleichung

$$d(Az + \Pi) - \sum_{k=1}^{k=n} P_k dX_k = \varrho (dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

identisch zu befriedigen. Hierbei werden alle P_i, wie wir sogleich beweisen, Functionen von $x_1 \cdots p_n$. Also besitzt die Berührungstransformation

$$z' = Az + \Pi; \quad x_i' = X_i; \quad p_i' = P_i$$

die Eigenschaft, Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ in Functionen von $x_1 \cdots p_n$ zu transformiren.

Denn soll die Gleichung

$$d(Az + \Pi) - \sum_{k=1}^{k=n} P_k\, dX_k = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k\, dx_k)$$

identisch stattfinden, so muss, da z in Π, $X_1, \cdots X_n$ nicht vorkommt,

$$A = \varrho$$

und

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -Ap_i$$

sein, welche Gleichungen zeigen, dass alle P_i nur von $x_1 \cdots p_n$ abhängen.

9. Eliminirt man $p_1 \cdots p_n$ zwischen den Gleichungen

(a) $$z' = Az + \Pi\,; \quad x_i' = X_i\,,$$

in denen

$$(X_i X_k) = 0\,, \quad [Az + \Pi, X_i] = 0$$

ist, so findet man eine Anzahl Gleichungen von der Form

(b) $z' - Az = \Omega(x_1' \cdots x_n' x_1 \cdots x_n)$, $\Omega_1(x_1' \cdots x_n) = 0$, $\cdots \Omega_q(x_1' \cdots x_n) = 0$.

Also giebt die letzte Methode nur solche Transformationen, welche auch vermöge der früher entwickelten erhalten werden können. Da nun umgekehrt ein System Gleichungen von der Form (b), wie früher gezeigt, immer auf Transformationsgleichungen der Form (a) führt, so ist klar, dass unsere beiden Methoden sich decken; ihr Unterschied ist nur formal. — Wir werden zeigen, dass dieselben *eine jede* Berührungstransformation zwischen xp geben.

Man erhält alle Berührungstransformationen zwischen xp, wenn man die Grössen $X_1 \cdots X_n\, P_1 \cdots P_n$ in allgemeinster Weise als Functionen von $x_1 \cdots p_n$ so bestimmt, dass die Gleichung

(c) $$dZ - \sum_{k=1}^{k=n} P_k\, dX_k = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k\, dx_k)$$

identisch stattfindet. Dieselbe nimmt durch Entwickelung die Form an

$$U dz + \sum_i V_i dx_i + \sum_i W_i dp_i = \varrho\,(dz - \sum_i p_i dx_i)\,,$$

wo

$$U = \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad V_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i},$$

$$W_i = \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i}.$$

Also erhalten wir $2n + 1$ Relationen

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \varrho, \quad \frac{\partial Z}{\partial p_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1 \cdots n),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} - \cdots - P_n \frac{\partial X_n}{\partial x_i} = -\varrho p_i = -p_i \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (i = 1 \cdots n),$$

welche zeigen, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial Z}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial Z}{\partial p_n}$ nur von $x_1 \cdots p_n$ abhängen. Also hat Z die Form

$$Z = Z_1(z x_1 \cdots x_n) + Z_2(x_1 \cdots p_n),$$

wo Z_1 folgenden Relationen genügen muss:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z} = \varrho, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x_i} + \frac{\partial Z_2}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{k=n} P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -p_i \frac{\partial Z_1}{\partial z}.$$

Durch Differentiation nach z folgt aus der letzten:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) = -p_i \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)$$

und hieraus, da p_i in Z_1 nicht vorkommt,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right) = 0; \quad (i = 1 \cdots n).$$

Also ist $\frac{\partial Z_1}{\partial z}$ gleich einer Constanten A, d. h. Z_1 ist linear in Bezug auf z. Hiermit ist bewiesen, dass Z die Form

$$Z = Az + \Pi(x_1 \cdots p_n)$$

besitzt. Im zweiten Paragraphen sahen wir aber, dass die Ausdrücke $[ZX_i]$, $[X_i X_k]$ nothwendiger Weise verschwinden müssen, wenn die Bedingungsgleichung (c) stattfinden soll, und folglich können wir behaupten, dass die beiden in diesem Paragraphen gegebenen Methoden eine jede Berührungstransformation zwischen xp geben.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen fasse ich in folgender Weise zusammen.

Theorem I. Es giebt eine ausgedehnte Kategorie von Berührungstransformationen, welche die charakteristische Eigenschaft besitzen, Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ in Functionen von $x_1 \cdots p_n$ überzuführen. Alle derartigen Transformationen besitzen die Form

$$z' = Az + \Pi(x_1 \cdots p_n); \quad x_i' = X_i; \quad p_i' = P_i,$$

wo A eine Constante bezeichnet. Relationen zwischen $z' x_1' \cdots x_n' z x_1 \cdots x_n$, welche die Grössen z' und z nur in der Combination $z' - Az$ enthalten, bestimmen immer eine solche Transformation. Sind andererseits $X_1 \cdots X_n$ solche Functionen von $x_1 \cdots p_n$, dass alle $(X_i X_k)$ gleich Null sind, so existirt immer eine solche Function $Az + \Pi(x_1 \cdots p_n)$, dass alle Ausdrücke $[Az + \Pi, X_i]$ verschwinden, und die Gleichungen

$$z' = Az + \Pi, \quad x_i' = X_i$$

definiren dann wiederum eine Berührungstransformation der besprochenen Art.

§ 4.

Aufstellung einiger charakteristischer Relationen.

Definiren die Gleichungen

$$z' = Z\,, \quad x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen xp, so genügen die Functionen X_i und P_i gewissen charakteristischen Relationen, die nun entwickelt werden sollen.

10. Ich erledige zuerst folgende Aufgabe: Ich setze voraus, dass $X_1 \cdots X_n\, P_1 \cdots P_n$ *gegebene* Functionen von $x_1 \cdots p_n$ sind und dass es möglich ist, eine solche Function $Az + \Pi(x_1 \cdots p_n)$ zu finden, dass die Gleichungen

$$z' = Az + \Pi\,; \quad x_i' = X_i\,; \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation definiren. Es wird verlangt, die Grössen A und Π in *allgemeinster* Weise zu bestimmen. Es wird sich zeigen, dass A vollkommen und Π bis auf eine arbiträre Constante durch die X_i und P_i definirt sind.

Die identisch stattfindende Gleichung

$$\text{(d)} \qquad d(Az + \Pi) - \sum_{k=1}^{k=n} P_k\, dX_k = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k\, dx_k)$$

reducirt sich, da ϱ gleich A sein muss, auf

$$d\Pi - \sum_k P_k\, dX_k = -A \sum_k p_k\, dx_k\,.$$

Diese Gleichung löst sich in die folgenden $2n$ auf:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -Ap_i\,; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} - \sum_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0\,.$$

Differentiirt man nun nach p_i und x_i und setzt die beiden erhaltenen Ausdrücke für $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial p_i}$ einander gleich, so findet man

$$A = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} - \frac{\partial X_k}{\partial p_i} \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \right) = W_i\,,$$

in welcher Gleichung i eine beliebige von den Zahlen $1 \cdots n$ bezeichnet.

Oben bestimmten wir $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}$ als Functionen von $x_1 \cdots p_n$:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = M_i\,; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = N_i\,,$$

woraus durch Integration

$$\Pi = \int (M_1 dx_1 + \cdots + M_n dx_n + N_1 dp_1 + \cdots + N_n dp_n) + \text{Const.}$$

Die eingeführte Constante ist arbiträr, da Π nur als Differential in (d) auftritt. Also:

Satz 7. Sind $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ solche *gegebene* Functionen von $x_1 \cdots p_n$; dass die Gleichung

$$dZ - \sum_{k=1}^{k=n} P_k dX_k = \varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k\right)$$

sich befriedigen lässt, so kann dies wesentlich nur auf *eine* Weise geschehen. Z hat (§ 3.) die Form $Az + \Pi(x_1 \cdots p_n)$; A ist eine ganz bestimmte Constante und Π enthält eine arbiträre additive Constante.

Corollar. Sind $X_1 \cdots P_n$ gegebene Functionen von $x_1 \cdots p_n$ und bestimmen die beiden Systeme von Gleichungen

$$z' = Z_1, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

und

$$z'' = Z_2, \quad x_i'' = X_i, \quad p_i'' = P_i$$

zwei Berührungstransformationen zwischen xp, so ist $Z_1 - Z_2$ eine Constante.

Im Uebrigen ist es einfacher, dies Corollar direct zu beweisen.

11. Die besprochenen charakteristischen Relationen beruhen darauf, dass der Ausdruck $(\omega_1 \omega_2)_{xp}$ in einem Sinne, den wir sogleich (Satz 8. und 11.) definiren, bei Berührungstransformationen *invariant* bleibt.

Satz 8. Seien ω_1' und ω_2' Functionen von $z' x_1' \cdots p_n'$, die durch eine Berührungstransformation in Functionen von $z x_1 \cdots p_n$, welche ω_1 und ω_2 heissen mögen, übergeführt werden. Verschwindet der Ausdruck $[\omega_1' \omega_2']_{x'p'}$, so ist dies auch mit $[\omega_1 \omega_2]_{xp}$ der Fall.

Denn verschwindet $[\omega_1' \omega_2']_{x'p'}$, so ist es (Satz 2.) möglich, solche weitere Functionen $\omega_3' \cdots \omega_{n+1}'$ von $z' x_1' \cdots p_n'$ zu bestimmen, dass alle $[\omega_i' \omega_k']_{x'p'}$ gleich Null werden. Dann aber gilt (Theorem I.) eine Identität von der Form:

$$dz' - \sum_{k=1}^{k=n} p_k' dx_k' = \sum_{k=1}^{k=n+1} \Omega_k' d\omega_k'.$$

Drücken wir nun $z' x' \cdots p_n'$ durch $z x_1 \cdots p_n$ aus, so geht die linke Seite unserer Gleichung in $\varrho (dz - \sum p_k dx_k)$ über, und daher besitzt die transformirte Gleichung die Form

$$\varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k\right) = \sum_{k=1}^{k=n+1} \Omega_k d\omega_k,$$

wenn $\omega_1 \cdots \omega_{n+1}$ diejenigen Functionen von $zx_1 \cdots p_n$ bezeichnen, in welche $\omega_1' \cdots \omega_{n+1}'$ übergehen. Diese neue Gleichung zeigt aber (Theorem I.), dass alle $[\omega_i \omega_k]_{xp} = 0$ sind. Also ist im Besondern auch $[\omega_1 \omega_2]_{xp} = 0$.

Satz 9. Definiren die Gleichungen

$$z' = Z, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen xp, so verschwinden alle Ausdrücke $(P_i P_k)$ und ebenso auch, ausser wenn $i = k$, alle $(X_i P_k)$.

Denn wir wissen, dass die Ausdrücke $(x_i' p_k')_{x'p'}$, $(p_i' p_k')_{x'p'}$ gleich Null sind; also verschwinden nach dem vorangehenden Satze auch $(X_i P_k)_{xp}$; $(P_i P_k)_{xp}$.

Satz 10. Definiren die Gleichungen

$$z' = Az + \Pi, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen xp, so sind alle Ausdrücke $(X_1 P_1) \cdots (X_n P_n)$ gleich der Constanten A.

Seien nämlich F' und Φ' zwei Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ und F, Φ die entsprechenden Functionen von $x_1 \cdots p_n$. Wir wissen, dass die Ausdrücke $(F'\Phi')_{x'p'}$ und $(F\Phi)_{xp}$ gleichzeitig verschwinden. Berücksichtigen wir nun, dass

$$(x_i' x_k')_{xp} = (x_i' p_k') = (p_i' p_k') = 0,$$

so finden wir

$$(F\Phi)_{xp} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k'} - \frac{\partial F}{\partial p_k'} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k'} \right) \cdot (x_k' p_k')_{xp},$$

oder, wenn wir uns erinnern, dass F und Φ, als Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ aufgefasst, mit F' und Φ' bezeichnet werden,

$$(F\Phi)_{xp} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F'}{\partial x_k'} \frac{\partial \Phi'}{\partial p_k'} - \frac{\partial F'}{\partial p_k'} \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} \right) \cdot (x_k' p_k')_{xp};$$

ferner ist

$$(F'\Phi')_{x'p'} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F'}{\partial x_k'} \frac{\partial \Phi'}{\partial p_k'} - \frac{\partial F'}{\partial p_k'} \frac{\partial \Phi'}{\partial x_k'} \right).$$

Damit diese Ausdrücke gleichzeitig verschwinden, muss nothwendig

$$(x_1' p_1')_{xp} = (x_2' p_2')_{xp} = \cdots = (x_n' p_n')_{xp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i' p_i')_{xp}$$

sein. Früher fanden wir aber

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \frac{\partial p_k'}{\partial p_i} - \frac{\partial x_k'}{\partial p_i} \frac{\partial p_k'}{\partial x_i} \right) = W_i = A,$$

also kommt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} W_i = A\,.$$

Man verificirt nun leicht, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} W_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (x_i' p_i')_{xp}\,,$$

also ist

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} (x_i' p_i')_{xp} = A$$

und folglich sind alle Ausdrücke $(x_i' p_i')_{xp}$ gleich A.

Satz 11. Sind F' und Φ' Functionen von $x_1' \cdots p_n'$, die durch eine Berührungstransformation in die Functionen F und Φ von $x_1 \cdots p_n$ übergeführt werden, so geht gleichzeitig $(F'\Phi')_{x'p'}$ in $\frac{1}{A}(F\Phi)_{xp}$ über.

Denn wir sahen, dass

$$(F\Phi)_{xp} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial F'}{\partial x_i'} \frac{\partial \Phi'}{\partial p_i'} - \frac{\partial F'}{\partial p_i'} \frac{\partial \Phi'}{\partial x_i'} \right) (x_i' p_i')_{xp}$$

ist, ferner dass

$$(x_i' p_i')_{xp} = A$$

ist. Also kommt

$$(F\Phi)_{xp} = A\,(F'\Phi')_{x'p'}\,.$$

Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen.

12. Ich will jetzt zeigen, dass die gefundenen Relationen nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend sind.

Satz 12. Sind $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ Functionen von $x_1 \cdots p_n$, welche den Relationen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0\,, \quad (X_i P_i) = A = \text{Const.}$$

genügen, so giebt es immer eine und wesentlich nur *eine* Berührungstransformation der Form

$$z' = F\,, \quad x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i\,.$$

Beweis. Wir nehmen eine Function $Az + \Pi$, welche allen Relationen

$$[X_i,\ Az + \Psi] = 0$$

genügt, und bestimmen sodann wie früher solche Functionen $\Pi_1 \cdots \Pi_n$, dass die Gleichung

$$d(Az + \Psi) - \sum \Pi_k dX_k = A\,(dz - \sum p_k dx_k)$$

identisch stattfindet; hierbei werden $\Pi_1 \cdots \Pi_n$ im Allgemeinen andere Functionen als $P_1 \cdots P_n$. Nach früheren Sätzen ist nun

$$(X_i \Pi_k) = 0\,, \quad (X_k \Pi_k) = A\,,$$

und nach unserer Voraussetzung ist

$$(X_i P_k) = 0\,, \quad (X_k P_k) = A\,,$$

also erhält man

$$(X_i,\ \Pi_k - P_k) = 0\,, \quad (X_k,\ \Pi_k - P_k) = 0\,,$$

woraus

$$\Pi_k - P_k = W_k(X_1 \cdots X_n)$$

und

$$P_k = \Pi_k - W_k\,.$$

Nun ist

$$(P_i P_k) = 0$$

oder

$$(\Pi_i - W_i,\ \Pi_k - W_k) = 0\,,$$

woraus unter Berücksichtigung bekannter Relationen

$$\frac{\partial W_k}{\partial X_i} = \frac{\partial W_i}{\partial X_k}\,,$$

also

$$W_i = \frac{\partial F(X_1 \cdots X_n)}{\partial X_i}$$

und

$$P_i = \Pi_i - \frac{\partial F}{\partial X_i}$$

folgt.

Schreiben wir nun die Gleichung

$$d(Az + \Psi) - \sum \Pi_k\, dX_k = A\,(dz - \sum p_k\, dx_k)$$

in der äquivalenten Form

$$d(Az + \Psi - F) - \sum \left(\Pi_k - \frac{\partial F}{\partial X_k}\right) dX_k = A\,(dz - \sum p_k\, dx_k)\,,$$

so finden wir durch Einführung der Grössen P_i

$$d(Az + \Psi - F) - \sum P_k\, dX_k = A\,(dz - \sum p_k\, dx_k)$$

und also ist es uns gelungen, eine Function Z zu finden, welche die Gleichung

$$dZ - \sum P_k\, dX_k = A\,(dz - \sum p_k\, dx_k)$$

befriedigt. Nach Satz 7. ist

$$Az + \Psi - F + \text{Const.}$$

die allgemeinste Function, welche dieser Forderung genügt.

Da bei Berührungstransformationen zwischen xp die Variabeln $x_1 \cdots p_n$ unabhängig von z transformirt werden, so ist es im Allgemeinen bequem, nur die Gleichungen

$$x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i$$

hinzuschreiben. Man kann dies um so mehr machen, als diese Gleichungen wesentlich die betreffende Transformation definiren.

Endlich resumire ich die Resultate dieses Paragraphen:

Theorem III. Definiren 2n Gleichungen

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine Berührungstransformation zwischen xp, so finden folgende Relationen statt

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (X_i P_i) = A = \text{Const.}$$

Gelten andererseits diese Relationen, so bestimmen die ersten Gleichungen immer eine Berührungstransformation.

Dieser Satz lässt sich übrigens folgendermassen verallgemeinern.

Satz 13. Zwischen den $2n + 1$ Functionen Z, X, P, die eine Berührungstransformation bestimmen, gelten folgende charakteristische Relationen:

$$[ZX_i] = [X_i X_k] = [X_i P_k] = [P_i P_k] = 0 = [ZP_i] - P_i[X_i P_i]$$
$$[X_1 P_1] = [X_2 P_2] = \cdots\cdots = [X_n P_n].$$

Dieser Satz, den ich hier nicht brauche und darum nicht beweisen werde, spielt eine wichtige Rolle in der Theorie des Pfaff'schen Problems.

§ 5.

Homogene Berührungstransformationen.

Es giebt eine wichtige Classe Berührungstransformationen zwischen xp, welche die charakteristische Eigenschaft besitzen, Functionen von $x_1' \cdots p_n'$, die hinsichtlich des Differentialquotienten homogen sind, in eben solche Functionen derselben Dimension überzuführen. Ich bestimme alle derartigen Transformationen, die ich *homogene Berührungstransformationen* nenne. Dem entsprechend werde ich Functionen von $x_1 \cdots p_n$, die hinsichtlich $p_1 \cdots p_n$ homogen sind, kurzweg als *homogene* Functionen bezeichnen.

Die Wichtigkeit dieser neuen Theorie liegt darin, dass sie sich bei einer gewissen Auffassung mit der *allgemeinen* Theorie der Berührungstransformationen deckt.

13. *Satz 14.* Sind $X_1 \cdots X_n$ homogene Functionen nullter Dimension, welche paarweise $(X_i X_k) = 0$ ergeben, so ist es möglich, die Gleichung

$$dZ - \sum P_k dX_k = A(dz - \sum p_k dx_k)$$

in solcher Weise zu befriedigen, dass alle P_i homogene Functionen erster Dimension werden. Die Berührungstransformation

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

ist dann homogen, d. h. sie transformirt homogene Functionen in *homogene* Functionen derselben Dimension.

Beweis. Dass alle X_i homogen von nullter *Dimension* sind, drückt sich durch

$$p_1 \frac{\partial X_i}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial X_i}{\partial p_n} = 0,$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch

$$[z X_i] = 0$$

aus. Da nun zugleich alle $(X_i X_k)$ gleich Null sind, so kann die Gleichung

$$dz - \sum P_k dX_k = dz - \sum p_k dx_k$$

befriedigt werden. Die Grössen P_i genügen dann den Relationen

$$P_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + \cdot \cdot + P_n \frac{\partial X_n}{dx_i} = p_i,$$

$$P_1 \frac{\partial X_1}{\partial p_i} + \cdots + P_n \frac{\partial X_n}{\partial p_i} = 0$$

und sind folglich homogene Functionen 1^{ter} Dimension.

Wenden wir nun die Transformation

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

auf irgend eine homogene Function s^{ter} Dimension, etwa

$$p_n'^s \cdot H\left(x_1' \cdots x_n' \frac{p_1'}{p_n'} \cdots \frac{p_{n-1}'}{p_n'}\right),$$

an, so verwandelt sich dieselbe in

$$P_n^s \cdot H\left(X_1 \cdots X_n \frac{P_1}{P_n} \cdots \frac{P_{n-1}}{P_n}\right),$$

was wieder eine homogene Function s^{ter} Dimension ist.

14. Ich werde jetzt alle homogenen Berührungstransformationen bestimmen.

Es seien $X_1 \cdots X_n$ homogene Functionen nullter Dimension, welche paarweise $(X_i X_k) = 0$ ergeben; alsdann gelten die Relationen

$$[z X_1] = 0, \cdots \cdot [z X_n] = 0,$$

und also ist (Satz 5.) $Az + \Pi(X_1 \cdots X_n)$, wenn A eine Constante und Π eine arbiträre Function bezeichnet, die allgemeinste in Bezug auf z lineare Function F, welche die Gleichungen

$$[X_1 F] = 0, \cdots \cdot [X_n F] = 0$$

erfüllt. Es handelt sich nun darum, Π in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass die Relationen

$$z' = Az + \Pi, \quad x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

eine homogene Berührungstransformation definiren. Die identische Gleichung

$$d(Az + \Pi) - \sum P_k\, dX_k = A(dz - \sum p_k\, dx_k)$$

giebt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \sum P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} - Ap_k\,, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = \sum P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i}\,.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Grössen $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}$ bezüglich von erster und von nullter Dimension sein müssen, wenn sie nicht etwa gleich Null sind. Nun ist aber Π selbst von nullter Dimension, und also $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}$ bez. von nullter und -1^{ter} Dimension, wenn sie von Null verschieden sind. Diese Betrachtungen zeigen, dass sowohl $\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$ wie $\frac{\partial \Pi}{\partial p_i}$ verschwinden müssen, also ist Π eine Constante, etwa B, und $Az + B$ ist die allgemeinste Form der gesuchten Function F.

15. Eliminirt man aus den Gleichungen

$$z' = Az + B\,, \quad x_i' = X_i$$

die Grössen $p_1 \cdots p_n$, so erhält man zwischen $z' x_1' \cdots x_n'\, z x_1 \cdots x_n$ Relationen von der Form

$$z' = Az + B\,, \quad \Omega_1(x_1' \cdots x_n'\, x_1 \cdots x_n) = 0\,, \cdots \Omega_q(x_1' \cdots x_n) = 0.$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass Relationen von dieser Form immer eine homogene Berührungstransformation bestimmen.

Denn nach unserer allgemeinen Theorie hat man, um diese Berührungstransformation zu finden, den vorstehenden Relationen die folgenden hinzuzufügen:

$$p_i' = \frac{\partial(\lambda_1\Omega_1 + \cdots + \lambda_q\Omega_q)}{\partial x_i'}\,,$$

$$p_i = -\frac{1}{A}\frac{\partial(\lambda_1\Omega_1 + \cdots + \lambda_q\Omega_q)}{\partial x_i}\,.$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt aber, dass x_i' und p_i' homogene Functionen respective nullter und erster Dimension von $p_1 \cdots p_n$ werden. Demnach:

Theorem IV. Sind $X_1 \cdots X_n$ homogene Functionen nullter Dimension, welche paarweise $(X_i X_k) = 0$ geben, so bestimmen die Gleichungen

$$z' = Az + B\,, \quad x_i' = X_i$$

immer eine homogene Berührungstransformation. Eine jede solche Transformation kann auch dadurch erhalten werden, dass man $q + 1$ Gleichungen der Form

$$z' = Az + B\,, \quad \Omega_k(x_1' \cdots x_n'\, x_1 \cdots x_n) = 0\,, \quad (k = 1 \cdots q)$$

nimmt und die entsprechende Berührungstransformation sucht. Endlich ist selbstverständlich (Theorem III.), dass, wenn $X_1 \cdots X_n\, P_1 \cdots P_n$

homogene Functionen respective nullter und erster Dimension sind, welche die Relationen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0\,; \quad (X_i P_i) = A$$

erfüllen, die Gleichungen

$$x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i$$

immer eine homogene Berührungstransformation bestimmen.

§ 6.

Infinitesimale homogene Berührungstransformationen.

16. Ich sage, dass eine homogene Berührungstransformation

$$x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i\,, \quad (X_i P_i) = 1$$

infinitesimal ist, wenn sie die Form

$$x_i' = x_i + \varepsilon M_i\,, \quad p_i' = p_i + \varepsilon \Pi_i$$

annehmen kann, wo ε eine infinitesimale Grösse, M_i und Π_i homogene Functionen von respective nullter und erster Dimension sind. Ich werde zeigen, dass es immer eine homogene Function erster Dimension giebt, deren partielle Derivirten hinsichtlich p_i und x_i eben M_i und $-\Pi_i$ sind. Diese Bemerkung, die in dieser Abhandlung nicht weiter benutzt wird, besitzt eine fundamentale Wichtigkeit; sie ist mir der Ausgangspunkt für neuere Untersuchungen über Transformationsgruppen gewesen.

Setzt man in den Relationen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0\,, \quad (X_i P_i) = 1$$

statt X_i und P_i bez. $x_i + \varepsilon M_i$ und $p_i + \varepsilon \Pi_i$, so findet man durch Entwickelung und Wegwerfung infinitesimaler Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial M_i}{\partial p_k} = \frac{\partial M_k}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\partial M_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi_k}{\partial p_i}\,, \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Pi_k}{\partial x_i}\,,$$

wo i und k alle möglichen Werthe, insbesondere auch denselben Werth annehmen dürfen. Diese Gleichungen zeigen, dass es eine Function Φ von $x_1 \cdots p_n$ giebt, für welche

$$M_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\,, \quad \Pi_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

ist. Hier ist Φ nur der Beschränkung unterworfen, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ homogen bez. von nullter und erster Dimension sein sollen. Also muss

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right) = 0\,; \quad \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

sein, woraus

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_k p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_k p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

und durch Integration und Weglassung einer unwesentlichen Constanten

$$\sum_k p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = \Phi$$

folgt, d. h. Φ muss selbst eine homogene Function erster Dimension sein. Es ist auch klar, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ homogen bez. von nullter und erster Dimension sind, wenn Φ homogen von erster Dimension ist.

Setzen wir nun der Kürze wegen statt $x_i' - x_i$ und $p_i' - p_i$ bez. δx_i und δp_i, und bezeichnen mit t irgend eine Hülfsvariable, so können wir das Obenstehende folgendermassen zusammenfassen.

Theorem V. Eine jede infinitesimale homogene Berührungstransformation besitzt die Form

$$\frac{\delta x_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \frac{\delta p_i}{-\frac{\partial H}{\partial x_i}} = \delta t;$$

*hier bezeichnet H irgend eine homogene Function erster Dimension**).

§ 7.

Ueber eine Verbesserung der Jacobi-Mayer'schen Integrationsmethode.

Die Jacobi'sche Integrationsmethode, wie auch die Jacobi-Weiler'sche und die Jacobi-Mayer'sche Methode beruhen darauf, dass man, wenn n Functionen $F_1 \cdots F_n$ von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ paarweise

$$(F_i F_k) = 0$$

ergeben und es dabei möglich ist, die Gleichungen

$$F_1 = a_1 \cdots\cdots F_n = a_n$$

hinsichtlich der Differentialquotienten aufzulösen, eine jede von diesen partiellen Differentialgleichungen integriren kann. Die Forderung, dass unsere Gleichungen sich hinsichtlich der p auflösen lassen sollen, verursacht bekanntlich gewisse Schwierigkeiten, die Jacobi zwar reducirt,

---

*) Aus diesem Theoreme folgt u. A., wie man leicht einsieht, dass die Bestimmung aller infinitesimalen Berührungstransformationen, die eine Gleichung

$$f(z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = \text{Const.}$$

in sich selbst überführen, sich mit der Integration dieser Gleichung deckt. Für Gleichungen höherer Ordnung sind diese beiden Probleme im Allgemeinen verschieden und haben deshalb beide ihre selbstständige Berechtigung.

jedoch nicht vollständig überwunden hat. Man muss es daher als eine wesentliche Verbesserung der betreffenden Methoden betrachten, dass man die besprochene Forderung, wie jetzt gezeigt werden soll, vollständig fallen lassen kann. — Ich betrachte zuerst Gleichungen, in denen die unbekannte Function explicite vorkommt, sodann solche, wo dies nicht der Fall ist.

17. Ich stütze mich auf die Clebsch'sche Theorie des Pfaff'schen Problems. Sei $\sum_{k=1}^{k=2n} X_k dx_k$ ein vorgelegter Pfaff'scher Ausdruck, der auf eine n-gliedrige Form

$$\sum_{k=1}^{k=2n} X_k dx_k = \sum_{k=1}^{k=n} F_k df_k$$

gebracht werden kann. Die Grössen f werden nach Clebsch durch das simultane System

$$((f_i)) = 0\,, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

bestimmt. Sind n Functionen f gefunden, welche dasselbe befriedigen, so ist es möglich, vermöge ausführbarer Operationen alle $2n - 1$ Lösungen der Gleichung

$$((f)) = 0$$

aufzustellen, d. h. diese Gleichung zu integriren. — Dieser bekannte Satz soll nun verwerthet werden.

Es sei φ eine Function von $zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_{n-1}$ und

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_{n-1} dx_{n-1} - \varphi dx_n$$

der Pfaff'sche Ausdruck, welcher auf eine n-gliedrige Form $K_1 dH_1 + \cdots + K_n dH_n$ reducirt werden soll. Das oben angegebene simultane System nimmt dann die Form an

$$[p_n - \varphi, H_i] = 0\,, \quad [H_i H_k] = 0$$

und wir erhalten folglich den Satz:

Satz 15. Sind φ, $H_1, \cdots H_n$ gegebenene Functionen von $zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_{n-1}$, welche paarweise den Gleichungen

$$[p_n - \varphi, H_i] = 0\,, \quad [H_i H_k] = 0$$

genügen, so ist es immer möglich, alle $2n - 1$ Lösungen H der Gleichung $[p_n - \varphi, H] = 0$ aufzustellen.

Berücksichtigt man, dass die Integration der Gleichung

$$p_n - \varphi = 0$$

nach der Cauchy'schen Methode gerade auf die Bestimmung aller Lösungen H der Gleichung $[p_n - \varphi, H] = 0$ hinauskommt, so kann man hiernach den folgenden Satz aussprechen:

Satz 16. Die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$p_n - \varphi\,(zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_{n-1}) = 0$$

kann immer geleistet werden, wenn man n von einander unabhängige Functionen $H_1 \cdots H_n$ von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_{n-1}$ gefunden hat, welche alle Gleichungen

$$[p_n - \varphi, H_i] = 0, \quad [H_i H_k] = 0$$

erfüllen. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob sich aus den Gleichungen

$$H_1 = a_1, \cdots H_n = a_n$$

alle p eliminiren lassen oder nicht. Es ist sogar denkbar, dass einige der Functionen H_i diese Differentialquotienten gar nicht enthalten.

Dieser Satz lässt sich auch folgendermassen wiedergeben:

Satz 17. Sind $H_0 H_1 \cdots H_n$ solche gegebene Functionen von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, welche paarweise den Gleichungen $[H_i H_k]$ genügen, so kann eine jede von den Gleichungen $H_i = a_i$ integrirt werden.

Hiernach können wir die Jacobi-Mayer'sche Integrationsmethode in folgender Weise formuliren:

Soll die Gleichung

$$H_0 (z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = a_0$$

integrirt werden, so sucht man zuerst eine von H_0 verschiedene Lösung H_1 von

$$[H_0 H] = 0.$$

Dies verlangt eine Operation $2n - 1$ *). Sodann sucht man eine von H_0 und H_1 verschiedene Lösung H_2 des vollständigen Systems

$$[H_0 H] = 0, \quad [H_1 H] = 0.$$

Vermöge des Mayer'schen Theorems geschieht dies durch eine Operation $2n-3$. Sodann findet man vermöge einer Operation $2n-5$ eine von H_0, H_1 und H_2 verschiedene Lösung des vollständigen Systems

$$[H_0 H] = 0, \quad [H_1 H] = 0, \quad [H_2 H] = 0$$

u. s. w.; endlich findet man vermöge einer Operation 1 eine von $H_0 H_1 \cdots H_{n-1}$ verschiedene Lösung H_n des vollständigen Systems

$$[H_0 H] = 0, \quad [H_1 H] = 0, \cdots [H_{n-1} H] = 0,$$

Hiermit ist nach den obenstehenden Entwickelungen das Integrationsgeschäft als beendigt zu betrachten. —

Der vorangehende Satz enthält zugleich die vollständige Lösung des wichtigen Problems:

Aus der vollständigen Lösung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O.

$$H_0 (z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = a_0$$

die vollständige Lösung jeder andern partiellen Differentialgleichung

$$H_0' (z' x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n') = a_0$$

*) Unter „einer Operation m" verstehe ich die Auffindung eines Integrales *von einem* Systeme von m gewöhnlichen Differentialgleichungen.

zu finden, die aus der gegebenen durch irgend eine Berührungstransformation hervorgeht,

ein Problem, mit dem sich schon Jacobi*) beschäftigt hat und das, jedoch nur für specielle Arten von Berührungstransformationen, zuerst von Mayer**) streng gelöst worden ist.

Ist nämlich:

$$z = Z(x_1 \cdots x_n\, a_0\, a_1 \cdots a_n)$$

eine vollständige Lösung der gegebenen Gleichung $H_0 = a_0$, so müssen sich aus den $n + 1$ Gleichungen

$$z = Z, \quad p_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1}, \cdots p_n = \frac{\partial Z}{\partial x_n}$$

die $n + 1$ Constanten $a_0, a_1, \cdots a_n$ bestimmen lassen und der hierdurch erhaltene Werth von a_0 muss eben die gegebene Function H_0 sein. Bezeichnet man ferner durch

$$a_1 = H_1, \cdots a_n = H_n$$

die Werthe der n übrigen Constanten, so sind $H_0, H_1, \cdots H_n$ von einander unabhängige Functionen, die in den gegenseitigen Beziehungen

$$[H_i H_k] = 0$$

stehen.

Gehen nun durch Anwendung derjenigen Berührungstransformation, welche H_0 in H_0' transformirt, $H_1, \cdots H_n$ über in $H_1', \cdots H_n'$, so sind auch $H_0', H_1', \cdots H_n'$ von einander unabhängige Functionen, die nach Satz 8. paarweise den Gleichungen genügen:

$$[H_i' H_k'] = 0.$$

Nach Satz 17. kann man daher durch blos algebraische Operationen eine vollständige Lösung der transformirten Gleichung $H_0' = a_0$ erhalten. —

Da die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $H_0 = a_0$ keinerlei Integrationen mehr erfordert, sobald man n von einander, wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \cdots H_n$ gefunden hat, welche die Bedingungen

$$[H_i H_k] = 0$$

erfüllen, so liegt es nahe, den Begriff der vollständigen Lösung dahin zu erweitern, dass man unmittelbar die n mit diesen Functionen gebildeten Gleichungen:

$$H_1 = a_1, \cdots H_n = a_n$$

eine *vollständige Lösung* der gegebenen Gleichung $H_0 = a_0$ nennt.

Bei Zugrundelegung dieser erweiterten Definition der vollständigen Lösung kann man dann geradezu sagen:

*) Nova Methodus § 61 und Vorles. über Dynamik p. 469.

**) Göttinger Nachrichten 1872, Nr. 21.

Eine Berührungstransformation, welche die gegebene partielle Differentialgleichung

$$H_0(zx_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = a_0$$

in die Gleichung

$$H_0'(z'x_1' \cdots x_n' p_1' \cdots p_n') = a_0$$

überführt, führt gleichzeitig auch jede vollständige Lösung der ersteren Gleichung in eine vollständige Lösung der zweiten über.

18. Um diese Theorie auf partielle Differentialgleichungen, welche die unbekannte Function selbst nicht enthalten, ausdehnen zu können, schicken wir einige Hülfssätze voraus.

Satz 18. Sei V eine Function von $x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_q$, die durch q lineare partielle Differentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=m} X_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{k=q} Y_{ik} \frac{\partial V}{\partial y_k} = W_i(x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_q), \quad (i = 1 \cdots q)$$

definirt wird. Besitzen diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung von der Form

$$V = F + \Phi(x_1 \cdots x_m)$$

und bezeichnet Φ eine arbiträre Function, so sind alle X_{ik} gleich Null.

Denn nach Voraussetzung soll den vorgelegten Gleichungen gleichzeitig durch $V = F$ und durch $V = F + \Phi$ genügt werden. Daher muss

$$\sum_{k=1}^{k=m} X_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0$$

sein. Diese Gleichung aber kann, wie die Annahme $\Phi = x_k$ sofort zeigt, für eine willkührliche Function Φ nur dann bestehen, wenn jedes $X_{ik} = 0$ ist.

Satz 19. Sei V eine Function von $x_1 \cdots x_n$, die durch q lineare partielle Differentialgleichungen

$$\sum_{k=1}^{k=n} X_{ik} \frac{\partial V}{\partial x_k} = W_i(x_1 \cdots x_n) \quad (i = 1 \cdots q)$$

definirt wird. Besitzen diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung von der Form

$$V = F + \Phi(\xi_1 \cdots \xi_{n-q})$$

und bezeichnet Φ eine arbiträre Function der Grössen ξ, die bekannt sein sollen, so verlangt die Bestimmung von V nur eine Quadratur.

Wählt man nämlich, was immer möglich ist, q solche Functionen $y_1 \cdots y_q$ von $x_1 \cdots x_n$, dass keine Relation zwischen $\xi_1 \cdots \xi_{n-q} y_1 \cdots y_q$ stattfindet, und führt sodann diese Grössen als unabhängige Variabeln in unsere partiellen Differentialgleichungen sein, so erhalten diese Gleichungen nach dem vorhergehenden Satze die Form

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = \Omega\,(\xi_1 \cdots \xi_{n-q}\, y_1 \cdots y_q)\,, \quad (i = 1 \cdots q)\,;$$

hiernach findet man V durch Quadratur.

Satz 20. Sind $X_1 \cdots X_n$ gegebene Functionen von $x_1 \cdots x_n$ $p_1 \cdots p_n$, welche paarweise $(X_i X_k) = 0$ ergeben, so ist es immer möglich, durch blosse Quadratur eine solche Function F von $z\, x_1 \cdots p_n$ zu finden, welche alle n Gleichungen $[X_i F] = 0$ erfüllt.

Früher (Satz 6.) sahen wir nämlich, dass die Gleichungen

$$[X_1,\ Az + \Pi] = 0, \cdots [X_n,\ Az + \Pi] = 0\,,$$

in denen Π eine unbekannte Function von $x_1 \cdots p_n$ bezeichnet, eine gemeinsame Lösung von der Form

$$\Pi + \Phi\,(X_1 \cdots X_n)$$

besitzen; hier ist Φ eine arbiträre Function von $X_1 \cdots X_n$ und also verlangt die Bestimmung von Π nach dem vorangehenden Satze nur eine Quadratur.

Nunmehr können wir die Jacobi-Mayer'sche Methode auch für den Fall formuliren, dass die betreffende Gleichung die unbekannte Function z nicht enthält.

Soll die Gleichung

$$X_1\,(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a_1$$

integrirt werden, so sucht man zuerst vermöge einer Operation $2n - 2$ eine von X_1 verschiedene Lösung X_2 der Gleichung

$$(X_1 X) = 0\,,$$

sodann vermöge einer Operation $2n - 4$ eine von X_1 und X_2 verschiedene Lösung X_3 des vollständigen Systems

$$(X_1 X) = 0\,, \quad (X_2 X) = 0$$

u. s. w.; endlich findet man vermöge einer Operation 2 eine Lösung X_n des vollständigen Systems

$$(X_1 X) = 0\,, \cdots (X_{n-1} X) = 0\,.$$

Ist dies geschehen, so bestimmt man durch blosse *Quadratur* eine Function $Az + \Pi\,(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n)$, welche allen Gleichungen

$$[X_1,\ Az + \Pi] = 0\,, \cdots\cdots [X_n,\ Az + \Pi] = 0$$

genügt. Hiermit ist das Integrationsgeschäft nach der vorangehenden Nummer beendigt.

§ 8.

Antwort auf eine Bemerkung Mayer's.

19. Seit 1872 sind Mayer und ich in einen lebhaften Verkehr getreten, der mir in mehreren Richtungen anregend gewesen ist. Insbesondere war es auf Mayer's Aufforderung, dass ich 1873 eine

algebraische Darstellung der vorangehenden Theorien versuchte, die ich zum grössten Theil durch Mannigfaltigkeitsbetrachtungen gefunden hatte. Dabei war ich darauf vorbereitet, dass meine analytische Form unvollkommen erscheinen würde. Mayer machte mich in der That sogleich auf einige Ungenauigkeiten aufmerksam, die ich in jener Abhandlung begangen habe. Gleichzeitig machte er die wesentliche Einwendung*), dass ich die Clebsch'sche Theorie des Pfaff'schen Problems

$$\sum_{k=1}^{k=2n} X_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

in einer grösseren Ausdehnung benutzte, als dieselbe von Clebsch bewiesen war. Es ist nämlich nur unter der Voraussetzung, dass die aus den Elementen

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

gebildete Determinante R nicht verschwindet, dass Clebsch beweist, dass die f ein beliebiges System Lösungen der simultanen Gleichungen

$$((f_i)) = 0\,, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

sind. Ich konnte ihm antworten, dass diese Gleichungen, multiplicirt mit der Determinante selbst,

$$R\,((f_i)) = 0\,, \quad R\,((f_i f_k)) = 0$$

unter allen Umständen die Grössen f definiren.

Seien nämlich

$$\sum_{k=1}^{k=2n} X_k dx_k = F_1 df_1 + \cdots + F_n df_n$$

und

$$\sum_{k=1}^{k=2n} Y_k dy_k = \Phi_1 d\varphi_1 + \cdots + \Phi_n d\varphi_n$$

zwei Pfaff'sche Ausdrücke bez. in den Variabeln x und y, deren kanonische Formen n Glieder enthalten. Alsdann besteht eine jede der Reihen

$$f \cdots f_n \; \frac{F_1}{F_n} \cdots \frac{F_{n-1}}{F_n}$$

und

$$\varphi_1 \cdots \varphi_n \; \frac{\Phi_1}{\Phi_n} \cdots \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}$$

aus Functionen, zwischen denen keine Functionalrelation stattfindet.

*) Vgl. seine Note Göttinger Nachr. 1874, Nr. 13: Ueber die Lie'schen *Berührungstransformationen*.

Also kann man zwei solche Functionen $F(x_1 \cdots x_{2n})$ und $\Phi(y_1 \cdots y_{2n})$ wählen, dass die $2n$ Gleichungen

$$f_i = \varphi_i, \quad \frac{F_k}{F_n} = \frac{\Phi_k}{\Phi_n}, \quad F = \Phi$$

eine Transformation zwischen den beiden Systemen von Variabeln x und y bestimmen. Eine solche Transformation führt aber den einen Pfaff'schen Ausdruck in den anderen, multiplicirt mit einer gewissen Grösse über. Also:

Sind

$$\sum_{k=1}^{k=2n} X_k dx_k \text{ und } \sum_{k=1}^{k=2n} Y_k dy_k$$

zwei Pfaff'sche Ausdrücke, deren kanonische Formen n Glieder enthalten, so kann der eine Ausdruck alle solche Eigenschaften des andern, die durch Aenderung der unabhängigen Variabeln ungestört bleiben, durch Multiplication mit einer passenden Grösse erhalten.

20. Diese wichtige Bemerkung (die sich unmittelbar auf beliebige Pfaff'sche Probleme ausdehnen lässt), erledigt insbesondere auch die besprochene Schwierigkeit leicht.

Das Verschwinden oder Nicht-Verschwinden der Determinante R ist in der That eine Eigenschaft, die ungestört bleibt, wenn neue Variabeln eingeführt werden. Dass R gleich Null ist, heisst nämlich nach Clebsch, dass eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=1}^{k=2n} X_k dx_k = d\pi_1 + \Pi_2 d\pi_2 + \cdots + \Pi_n d\pi_n$$

möglich ist. Folglich kann das Verschwinden oder Nicht-Verschwinden der Determinante durch Multiplication mit einer passenden Grösse erreicht werden.

Sei nun $\sum X_k dx_k$ ein Ausdruck, dessen Determinante nicht verschwindet. Wir wählen eine solche Grösse ϱ, dass auch die Determinante des Ausdrucks $\sum \varrho X_k dx_k$ von Null verschieden ist. Sind nun

(a) $$((f_i)) = 0, \quad ((f_i f_k)) = 0$$

und

(b) $$((f_i))_\varrho = 0, \quad ((f_i f_k))_\varrho = 0$$

die beiden simultanen Systeme, welche diesen beiden Ausdrücken entsprechen, so ist einleuchtend, dass dieselben nur hinsichtlich eines Factors verschieden sein können; denn Grössen $f_1 \cdots f_n$, welche das eine System befriedigen, müssen der Natur der Sache nach auch das zweite erfüllen. Darum können unsere Gleichungen (a) und (b) eine gemeinsame Form erhalten, die geltend bleibt, selbst wenn die Deter-

minante verschwindet. Bei Clebsch haben unsere Gleichungen die Form

$$\frac{1}{R}\sum_i\sum_k X_i\frac{\partial f}{\partial x_k}R_{ik}=0\,,\quad \frac{1}{R}\sum_i\sum_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_k}R_{ik}=0\,,$$

die illusorisch wird, wenn $R=0$ ist. Dagegen werden die äquivalenten Gleichungen

$$\sum_i\sum_k X_i\frac{\partial f}{\partial x_k}R_{ik}=0\,,\quad \sum_i\sum_k \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_k}R_{ik}=0$$

niemals illusorisch, weil nämlich die Unterdeterminanten R_{ik} nicht sämmtlich verschwinden dürfen. Diese Gleichungen sind es, die unter allen Umständen die Grössen f definiren; und in dieser Form habe ich auch die Clebsch'schen Gleichungen im Vorangehenden benutzt.

Zugefügt soll hier nur sein, dass der früher besprochene Multiplicator als ein *Integrabilitätsfactor* aufzufassen ist.

Zweiter Abschnitt.

Theorie der Gruppen.

In diesem Abschnitte betrachte ich eine Reihe Functionen $F_1\cdots F_r$ von $x_1\cdots x_n\,p_1\cdots p_n$ und bestimme alle zwischen denselben stattfindenden Beziehungen, die bei beliebigen Berührungstransformationen zwischen xp

$$x_i'=X_i\,,\quad p_i'=P_i$$

ungestört bleiben. Um den Resultaten eine möglichst einfache Form geben zu können, setze ich voraus, dass die Constante (X_iP_i) gleich 1 ist. Dies ist indess nur eine formale Beschränkung. Im Anschluss an die gewonnenen Resultate entwickele ich eine rationelle Methode, welche lehrt, die bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung 1. O. eintretenden Umstände möglichst gut zu verwerthen.

§ 9.

Gruppe. Involutionssystem. Aufstellung zweier Probleme.

21. Die nachstehenden Theorien nehmen ihren Ursprung in der expliciten Einführung zweier Begriffe, von denen der erste dem Wesen der Sache nach Jacobi angehört.

Def. Ich sage, dass r von einander unabhängige Functionen $u_1\cdots u_r$ von $x_1\cdots x_n\,p_1\cdots p_n$ eine *r-gliedrige Gruppe* bilden, wenn jedes (u_iu_k) sich als Function der u ausdrücken lässt. Jede Function der Grössen u *gehört*, sage ich, der Gruppe an.

Gehören die Functionen einer ϱ-gliedrigen Gruppe $u_1 u_2 \cdots u_\varrho$ einer Gruppe mit mehr Gliedern $u_1 \cdots u_\varrho u_{\varrho+1} \cdots u_r$ an, so sage ich, dass die letzte Gruppe die erste enthält, oder dass diese eine *Untergruppe* der zweiten ist.

Satz 21. Bestehen zwischen $u_1 \cdots u_r$ q Relationen und drückt dabei jedes $(u_i u_k)$ sich durch die u aus, so dass

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1 \cdots u_r)$$

ist, so giebt es eine $(r-q)$-gliedrige Gruppe, welcher alle u angehören.

Denn nach unserer Voraussetzung ist es möglich, unter den Grössen u $r-q$ solche, etwa $u_1 \cdots u_{r-q}$, zu finden, durch die sich die übrigen ausdrücken lassen. Setzt man die so gefundenen Werthe von $u_{r-q+1} \cdots u_r$ in

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1 \cdots u_r)$$

ein, so erhält dieser Ausdruck die Form

$$(u_i u_k) = \varphi_{ik}(u_1 \cdots u_{r-q}),$$

und folglich bilden $u_1 \cdots u_{r-q}$ eine Gruppe, welcher auch $u_{r-q+1} \cdots u_r$ angehören.

Satz 22. Gehören $v_1 \cdots v_r$ der Gruppe $u_1 \cdots u_r$ an, so dass

$$v_i = V_i(u_1 \cdots u_r)$$

ist, und sind $V_1 \cdots V_r$ von einander unabhängige Functionen der u, so bilden auch $v_1 \cdots v_r$ eine r-gliedrige Gruppe, die ich als eine *andere Form* der vorgelegten betrachte.

Denn nach unserer Voraussetzung sind $v_1 \cdots v_r$, auch als Functionen von $x_1 \cdots p_n$ aufgefasst, von einander unabhängig. Ferner ist

$$(v_i v_k) = \sum_{m=1}^{m=r} \sum_{n=1}^{n=r} \frac{\partial V_i}{\partial u_m} \frac{\partial V_k}{\partial u_n} (u_m u_n),$$

woraus folgt, dass $(v_i v_k)$ eine Function der Grössen u und also zugleich eine Function der Grössen v ist.

Def. Bilden $u_1 \cdots u_r$ eine Gruppe und verschwinden dabei alle $(u_i u_k)$, so soll die Gruppe ein r-gliedriges *Involutionssystem* heissen.

Ich nenne zwei Gruppen $u_1 \cdots u_r$ und $w_1 \cdots w_\varrho$ *involutorische* Gruppen, wenn jedes $(u_i w_k) = 0$ ist.

In Jacobi's Theorien spielen Involutionssysteme $u_1 \cdots u_r$, welche der lästigen Beschränkung unterworfen sind, dass die Gleichungen

$$u_1 = a_1, \cdots u_r = a_r$$

sich nach r von den Grössen p auflösen lassen sollen, eine fundamentale Rolle. Die Einführung des allgemeinen Begriffs Involutionssystem gehört mir.

Satz 23. Eine Berührungstransformation zwischen $x_1 \cdots p_n\, x_1' \cdots p_n'$

$$x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i\,, \quad (X_i P_i) = 1$$

führt die Functionen einer r-gliedrigen Gruppe $u_1' \cdots u_r'$ in die Functionen einer neuen r-gliedrigen Gruppe $u_1 \cdots u_r$ über. Hierbei drückt jedes $(u_i u_k)$ sich in derselben Weise durch $u_1 \cdots u_r$ aus, wie das entsprechende $(u_i' u_k')$ durch $u_1' \cdots u_r'$.

Wir haben nämlich gesehen (Satz 11.), dass

$$(u_i' u_k')_{x'p'} = (u_i u_k)_{xp}\,.$$

Nun setzen wir voraus, dass

$$(u_i' u_k')_{x'p'} = f_{ik}\,(u_1' \cdots u_r')\,,$$

also finden wir

$$(u_i u_k)_{xp} = f_{ik}\,(u_1' \cdots u_r')\,,$$

oder wenn wir uns erinnern, dass $u_1' \cdots u_r'$, als Functionen von $x_1 \cdots p_n$ aufgefasst, mit $u_1 \cdots u_r$ zu bezeichnen sind,

$$(u_i u_k) = f_{ik}\,(u_1 \cdots u_r)\,,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Corollar. Eine Berührungstransformation führt ein Involutionssystem wiederum in ein Involutionssystem über.

22. Nunmehr kann ich die beiden Hauptprobleme dieses Abschnitts formuliren.

Problem I. Vorgelegt seien zwei r-gliedrige Gruppen $v_1' \cdots v_r'$ und $v_1 \cdots v_r$. Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation giebt, welche jedes v_i' in eine Function von $v_1 \cdots v_r$, oder, wie ich kurzweg sage, welche die eine Gruppe in die andere transformirt.

Wir werden sehen, dass jede r-gliedrige Gruppe sich durch eine gewisse ganze positive Zahl, die kleiner als r ist, charakterisiren lässt. Soll eine r-gliedrige Gruppe sich in eine andere solche überführen lassen, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass diese Zahl für beide Gruppen dieselbe ist. Dieser wichtige Satz lässt sich auch folgendermassen aussprechen. Eine r-gliedrige Gruppe besitzt nur eine einzige von ihrer Form unabhängige Eigenschaft, welche bei Berührungstransformationen invariant bleibt. Diese Eigenschaft lässt sich durch eine ganze positive Zahl, die kleiner als r ist, ausdrücken.

Problem II. Vorgelegt seien zwei Systeme von je r Functionen bez. von $x_1' \cdots p_n'$ und $x_1 \cdots p_n$:

$$F_1' \cdots F_r' \text{ und } F_1 \cdots F_r\,.$$

Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation

$$x_i' = X_i\,, \quad p_i' = P_i\,, \quad (X_i P_i) = 1$$

giebt, welche jedes F_k' in das entsprechende F_k transformirt.

Auch die Lösung dieses Problems, die wir in § 16. geben, ist sehr einfach.

§ 10.

Reciproke Gruppen.

23. Der analytische*) Ausgangspunkt für meine Untersuchungen über Gruppen war der folgende Satz.

Satz 24. Ist $u_1 \cdots u_r$ eine Gruppe und V eine unbekannte Function von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, so bilden die r linearen Gleichungen

$$(u_1 V) = 0 , \cdots (u_r V) = 0$$

ein vollständiges System.

Beweis. Es ist zunächst klar, dass diese Gleichungen von einander unabhängig sind, denn sonst verschwänden eine Reihe von Functionaldeterminanten, und demzufolge existirten Relationen zwischen $u_1 \cdots u_r$, aufgefasst als Functionen von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$. Dies steht aber im Widerspruch mit unseren Voraussetzungen.

Schreiben wir nun $A_i(V)$ statt $(u_i V)$, so finden wir durch Ausführung

$$A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) = ((u_i, u_k) V)\ **).$$

Nun ist aber (Nr. 21.)

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1 \cdots u_r) ,$$

also kommt

$$((u_i u_k) V) = \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_1}(u_1 V) + \cdots + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_r}(u_r V) ,$$

d. h.

$$A_i(A_k(V)) - A_k(A_i(V)) = \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_1} A_1(V) + \cdots + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_r} A_r(V) ,$$

womit unser Satz bewiesen ist. —

Das vollständige System

$$(u_1 V) = 0 , \cdots (u_r V) = 0$$

hat $2n-r$ Lösungen, $v_1 v_2 \cdots v_{2n-r}$, zwischen denen keine Functionalrelation stattfindet, und jede andere Lösung lässt sich als Function dieser Grössen darstellen. Nun sagt das Poisson-Jacobi'sche Theorem, dass jedes $(v_i v_k)$ eine solche gemeinsame Lösung ist. Folglich ist $(v_i v_k)$ eine Function der v:

---

*) Es war bei synthetischen Speculationen über das Poisson-Jacobi'sche Theorem und den eigentlichen Kern desselben, dass ich auf dieses Theorem geführt wurde. Ich bemerkte, dass die Mannigfaltigkeiten, die von den charakteristischen Streifen zweier oder mehrerer Gleichungen erzeugt werden, zu untersuchen sind.

**) Dass die beiden Gleichungen $(u_1 V) = 0$, $(u_2 V) = 0$ die folgende $((u_1 u_2) V) = 0$ nach sich ziehen, ist bekanntlich ein Beweis des Poisson-Jacobi'schen Theorems.

$$(v_i v_k) = \varphi_{ik}(v_1 \cdots v_{2n-r}),$$

d. h. $v_1 \cdots v_{2n-r}$ bilden eine neue Gruppe.

Also bilden auch die Gleichungen

$$(v_1 U) = 0, \cdots (v_{2n-r} U) = 0$$

ein vollständiges System mit $2n - (2n - r) = r$ Lösungen. Offenbar genügen $u_1 \cdots u_r$ diesem Systeme, dessen sämmtliche Lösungen also der ursprünglichen Gruppe gehören. Also:

*Theorem VI. Eine jede Gruppe $u_1 \cdots u_r$ bestimmt eine zweite Gruppe mit $2n - r$ Gliedern, die in einem vollständigen Reciprocitätsverhältnisse zu der ersten steht. Jede Gruppe besteht aus allen Functionen, die mit allen Functionen der zweiten Gruppe in Involution liegen. Zwei solche Gruppen sollen reciproke Gruppen heissen. Ich nenne auch häufig die eine Gruppe die Polargruppe der zweiten**).

Sind $u_1 \cdots u_r$ und $v_1 \cdots v_{2n-r}$ zwei reciproke Gruppen, die durch eine Berührungstransformation bez. in $u_1' \cdots u_r'$ und $v_1' \cdots v_{2n-r}'$ übergeführt werden, so sind auch diese beiden neuen Gruppen reciproke Gruppen. Denn da jedes $(u_i v_k)$ verschwindet, so ist dies auch (Satz 8.) mit jedem Ausdrucke $(u_i' v_k')$ der Fall.

§ 11.

Die ausgezeichneten Functionen einer Gruppe.

24. In diesem Paragraphen wird ein neuer Fundamentalbegriff eingeführt.

Def. Functionen U, die einer Gruppe $u_1 \cdots u_r$ angehören und alle Relationen

$$(u_1 U) = 0, \cdots (u_r U) = 0$$

erfüllen, sollen ausgezeichnete Functionen heissen.

Es ist klar, dass die Zahl der von einander unabhängigen ausgezeichneten Functionen einer Gruppe von der Form der Gruppe unabhängig ist. Es ist auch klar, dass eine Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen durch eine jede Berührungstransformation in eine Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen übergeführt wird.

Satz 25. Bestehen m Relationen zwischen den Functionen zweier reciproken Gruppen, so giebt es m Functionen, welche gleichzeitig beiden Gruppen angehören.

Beweis. Ich setze voraus, dass $u_1 \cdots u_r$ und $v_1 \cdots v_{2n-r}$ zwei

---

*) Auf diesen Satz gründet sich eine allgemeine Reciprocitätstheorie. Einem jeden Satze über Gruppen entspricht ein reciproker Satz. Andererseits ordnen auch die zwischen Gruppen möglichen Beziehungen sich paarweise als reciproke zusammen. Diese Andeutungen sollen hier nicht weiter entwickelt werden.

reciproke Gruppen sind, zwischen deren Functionen m Relationen stattfinden. Erinnern wir uns nun, dass

$$(u_i u_k) = f_{ik}(u_1 \cdots u_r), \quad (v_i v_k) = \varphi_{ik}(v_1 \cdots v_{2n-r}), \quad (u_i v_k) = 0,$$

und berücksichtigen ferner Satz 21., so ergiebt sich, dass $u_1 \cdots u_r$ $v_1 \cdots v_{2n-r}$ einer gewissen $(2n-m)$-gliedrigen Gruppe

$$W_1 \cdots W_{2n-m}$$

angehören, welche sowohl die Form

$$u_1 \cdots u_r\, v_1 \cdots v_{2n-r-m},$$

als auch die Form

$$v_1 \cdots v_{2n-r}\, u_1 \cdots u_{r-m}$$

annehmen kann. Hieraus folgt, dass die m Lösungen $F_1 \cdots F_m$ des vollständigen Systems

$$(W_1 F) = 0, \cdots (W_{2n-m} F) = 0$$

einerseits den Gleichungen

$$(u_1 F) = 0, \cdots (u_r F) = 0$$

genügen und also der Gruppe $v_1 \cdots v_{2n-r}$ angehören, andererseits die Gleichungen

$$(v_1 F) = 0, \cdots (v_{2n-r} F) = 0$$

erfüllen, und also zugleich der Gruppe $u_1 \cdots u_r$ angehören. Es giebt also wirklich m Functionen, welche beiden Gruppen angehören.

Satz 26. Gehört eine Function F gleichzeitig zweien reciproken Gruppen an, so ist sie ausgezeichnete Function in beiden Gruppen.

Denn als zugehörig der Gruppe $v_1 \cdots v_{2n-r}$ genügt F den Gleichungen

$$(u_1 F) = 0, \cdots (u_r F) = 0;$$

nun ist F eine Function der Grössen u und jede solche Function, welche die eben aufgestellten Gleichungen erfüllt, ist eine ausgezeichnete Function der Gruppe $u_1 \cdots u_r$. In entsprechender Weise sieht man, dass F eine ausgezeichnete Function der Gruppe v ist.

Satz 27. Jede ausgezeichnete Function einer Gruppe gehört der reciproken Gruppe an.

Denn ist U eine ausgezeichnete Function der Gruppe $u_1 \cdots u_r$, so gelten die Relationen

$$(u_1 U) = 0, \cdots (u_r U) = 0;$$

dies sind aber eben diejenigen Gleichungen, die stattfinden müssen, wenn U der reciproken Gruppe angehören soll.

Satz 28. Jede ausgezeichnete Function einer Gruppe ist ausgezeichnete Function in der reciproken Gruppe.

Dieser Satz folgt als Corollar aus den beiden vorangehenden.

Satz 29. Enthält eine Gruppe $u_1 \cdots u_r$ m ausgezeichnete Functionen $U_1 \cdots U_m$, so bestehen m Relationen zwischen den Functionen dieser Gruppe und denjenigen der reciproken Gruppe $v_1 \cdots v_{2n-r}$.

Denn $U_1 \cdots U_m$ gehören beiden Gruppen an; drückt man sie also einmal als Functionen der u, das andere Mal als Functionen der v aus und setzt diese Ausdrücke einander paarweise gleich, so findet man die besprochenen Relationen:

$$F_1(u_1 \cdots u_r) = \Phi_1(v_1 \cdots v_{2n-r}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m(u_1 \cdots u_r) = \Phi_m(v_1 \cdots v_{2n-r}).$$

Die Ergebnisse dieser Nummer fasse ich folgendermassen zusammen:

Theorem VII. Zwei reciproke Gruppen enthalten dieselben ausgezeichneten Functionen, und zwischen den Functionen zweier reciproker Gruppen bestehen soviel und nur soviel Relationen, als die Gruppen ausgezeichnete Functionen enthalten. Diese Relationen haben immer die Form

$$F_i(u_1 \cdots u_r) = \Phi_i(v_1 \cdots v_{2n-r}) \quad (i = 1 \cdots m);$$

sie sagen eben aus, dass die m ausgezeichneten Functionen sowohl der einen wie der anderen Gruppe angehören.

25. Ich werde zeigen, dass die Zahl der ausgezeichneten Functionen sich in der Weise bestimmen lässt, dass man eine gewisse Determinante aufstellt und sodann untersucht, ob dieselbe und ihre Unterdeterminanten 1^{ter}, 2^{ter} $\cdots$ Ordnung verschwinden. Enthält unsere Gruppe m ausgezeichnete Functionen, so verlangt die Bestimmung derselben die Operationen $m, m-1, \cdots 3, 2, 1$.

Sei $u_1 \cdots u_r$ eine Gruppe und U eine Function von $u_1 \cdots u_r$. Soll dieselbe eine ausgezeichnete Function sein, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen

$$(u_1 U) = 0, \quad \cdots \quad (u_r U) = 0,$$

oder entwickelt

$$A_1(U) = (u_1 u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_1 u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_1 u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r} = 0,$$
$$A_2(U) = (u_2 u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_2 u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_2 u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_r(U) = (u_r u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_r u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_r u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r} = 0$$

stattfinden. Setzt man hier überall statt $(u_i u_k)$ die entsprechende Function $f_{ik}(u_1 \cdots u_r)$, so erhält man r lineare partielle Differentialgleichungen mit r unabhängigen Variabeln zur Bestimmung von U. Soll also die Gruppe m ausgezeichnete Functionen enthalten, so müssen unsere r Gleichungen sich durch $r - m$ von denselben, etwa durch

$$A_1(U) = 0, \cdots A_{r-m}(U) = 0,$$

die ein vollständiges System bilden, ersetzen lassen. Hierzu ist offenbar erforderlich, dass $A_{r-m+1}(U) \cdots A_r(U)$ sich linear durch $A_1(U) \cdots A_{r-m}(U)$ ausdrücken lassen. Umgekehrt ist klar, dass unsere $r - m$ Gleichungen ein vollständiges System bilden, wenn diese Forderung erfüllt ist. Denn der Ausdruck $A_i(A_k(U)) - A_k(A_i(U))$ drückt sich linear durch $A_1(U) \cdots A_r(U)$ aus:

$$A_i(A_k(U)) - A_k(A_i(U)) = \lambda_1 A_1(U) + \cdots + \lambda_r A_r(U).$$

Setzt man aber hierin für $A_{r-m+1}(U) \cdots A_r(U)$ ihre Ausdrücke in $A_1(U) \cdots A_{r-m}(U)$, so erhält man Relationen von der Form:

$$A_i(A_k(U)) - A_k(A_i(U)) = \varrho_1 A_1(U) + \cdots + \varrho_{r-m} A_{r-m},$$

womit unsere Behauptung erwiesen ist.

Es zeigt sich also, dass man die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} (u_1 u_1) & (u_1 u_2) & \cdots & (u_1 u_r) \\ (u_2 u_1) & (u_2 u_2) & \cdots & (u_2 u_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (u_r u_1) & \cdots & \cdots & (u_r u_r) \end{vmatrix}$$

aufstellen muss. Ist dieselbe von Null verschieden, so sind die Ausdrücke $A_1(U) \cdots A_r(U)$ von einander unabhängig, und also hat unsere Gruppe keine ausgezeichnete Function. Verschwindet dagegen diese Determinante und ihre Unterdeterminanten 1^{ter}, 2^{ter}, $\cdots (m-1)^{ter}$ Ordnung, während die Unterdeterminanten m^{ter} Ordnung nicht sämmtlich verschwinden, so giebt es unter den $A_i(U)$ m solche, die sich durch die übrigen linear ausdrücken lassen, und also enthält die Gruppe m ausgezeichnete Functionen.

Man kann bemerken, dass D eine schiefe Determinante ist. Bezeichnet also r eine beliebige *ungerade* Zahl, so ist D gleich Null, und die Gruppe enthält jedenfalls *eine* ausgezeichnete Function.

Findet man, dass unsere r-gliedrige Gruppe $u_1 \cdots u_r$ m ausgezeichnete Functionen enthält, so nehme man, was immer möglich ist, $r - m$ von den Ausdrücken $A_k(U)$, etwa $A_1(U) \cdots A_{r-m}(U)$, die von einander unabhängig sind. Alsdann bilden die Gleichungen

$$A_1(U) = 0, \cdots A_{r-m}(U) = 0$$

ein vollständiges System, dessen m Lösungen eben die ausgezeichneten Functionen der Gruppe sind. Ihre Bestimmung verlangt, wie Mayer und ich in unseren früheren Arbeiten bemerkt haben, nur die Operationen

$$m, m-1, \cdots 3, 2, 1.$$

Wendet man das Mayer'sche Theorem an, so wird man sehr häufig

die ausgezeichneten Functionen durch noch einfachere Operationen bestimmen können.

Es ist einleuchtend, dass, wenn μ ausgezeichnete Functionen schon bekannt sind, die Bestimmung der übrigen alsdann nur die Operationen $m - \mu$, $m - \mu - 1, \cdots 3, 2, 1$ verlangt.

Theorem VIII. Soll man entscheiden, wie viele ausgezeichnete Functionen eine Gruppe $u_1 \cdots u_r$ enthält, so bildet man die Determinante mit r Reihen und Colonnen, deren Elemente die Grössen $(u_i u_k)$, ausgedrückt als Functionen von $u_1 \cdots u_r$, sind. Verschwindet diese Determinante nebst ihren Unterdeterminanten 1^{ter}, 2^{ter}, $\cdots$ bis $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so hat die Gruppe m ausgezeichnete Functionen. Man findet dieselben, indem man von den r Ausdrücken

$$A_i(U) = (u_i u_1)\frac{\partial U}{\partial u_1} + (u_i u_2)\frac{\partial U}{\partial u_2} + \cdots + (u_i u_r)\frac{\partial U}{\partial u_r}$$

$r - m$ solche, etwa $A_1(U) \cdots A_{r-m}(U)$, auswählt, die von einander unabhängig sind. Die Gleichungen

$$A_1(U) = 0, \cdots A_{r-m}(U) = 0$$

bilden alsdann ein vollständiges System, dessen m Lösungen eben die ausgezeichneten Functionen der Gruppe sind. Man findet dieselben also vermöge der Operationen m, $m - 1, \cdots 3, 2, 1$.

§ 12.

Kanonische Form einer Gruppe.

In diesem Paragraphen beweisen wir zuerst einige Hülfssätze und zeigen hierauf, dass eine jede Gruppe auf eine bemerkenswerthe Form, die ich *„kanonisch“* nenne, gebracht werden kann.

26. *Satz 30.* Enthält eine r-gliedrige Gruppe mehr als $r-2$ ausgezeichnete Functionen, so ist sie ein Involutionssystem und besitzt also r ausgezeichnete Functionen.

Beweis. Gesetzt, die Gruppe $u_1 \cdots u_r$ besitze $r - 1$ ausgezeichnete Functionen $U_1 \cdots U_{r-1}$; wir werden sehen, dass dieselbe dann nothwendiger Weise noch eine solche Function enthalten muss. Denn bringen wir die Gruppe auf die äquivalente Form $U_1 \cdots U_{r-1} V$, so muss, weil U_1 ausgezeichnete Function ist,

$$(U_1 V) = 0$$

sein; ebenso verschwindet $(U_2 V)$, weil U_2 ausgezeichnete Function ist; in dieser Weise erkennen wir die Existenz der Relationen

$$(U_1 V) = 0, \cdots (U_{r-1} V) = 0,$$

welche zeigen, dass auch V ausgezeichnete Function ist. Unsere Gruppe besitzt also wirklich r ausgezeichnete Functionen.

Satz 31. Ist u_1 keine ausgezeichnete Function einer Gruppe $u_1 \cdots u_r$, so giebt es immer Functionen $F(u_1 \cdots u_r)$, welche die Gleichung $(u_1 F) = 1$ erfüllen.

Denn nach unserer Voraussetzung giebt es jedenfalls einige unter den Ausdrücken $(u_1 u_2) (u_1 u_3) \cdots (u_1 u_r)$, die nicht identisch verschwinden. Bezeichnet daher F eine unbestimmte Function von $u_1 \cdots u_r$, so ist

$$(u_1 u_2) \frac{\partial F}{\partial u_2} + (u_1 u_3) \frac{\partial F}{\partial u_3} + \cdots + (u_1 u_r) \frac{\partial F}{\partial u_r},$$

oder, wenn man statt $(u_1 u_k)$ die entsprechende Function $f_{1k}(u_1 \cdots u_r)$ einführt,

$$f_{12} \frac{\partial F}{\partial u_2} + f_{13} \frac{\partial F}{\partial u_3} + \cdots + f_{1r} \frac{\partial F}{\partial u_r}$$

von Null verschieden. Also ist

$$f_{12} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \cdots\cdots + f_{1r} \frac{\partial F}{\partial u_r} = 1$$

eine lineare partielle Differentialgleichung, deren Lösungen F der Bedingung

$$(u_1 F) = 1$$

genügen.

Satz 32. Enthält die Gruppe $u_1 \cdots u_r$ eine Untergruppe $u_1 \cdots u_\varrho$, so ist die Polargruppe der ersten in der Polargruppe der zweiten enthalten.

Denn die Glieder der Polargruppe von $u_1 \cdots u_r$ sind definirt durch

$$(u_1 v) = 0, \cdots (u_\varrho v) = 0, \cdots (u_r v) = 0,$$

und die Glieder der Polargruppe von $u_1 \cdots u_\varrho$ genügen den Gleichungen

$$(u_1 V) = 0, \cdots (u_\varrho V) = 0.$$

Wir sehen, dass die Lösungen des ersten Systems auch das letzte befriedigen, während das Umgekehrte nicht gilt; also ist der Satz bewiesen.

Satz 33. Ist der Ausdruck $(u_1 u_2)$ gleich 1, so kann eine jede Gruppe $u_1 u_2 \cdots u_r$ auf die Form $u_1 u_2 u_1' \cdots u_{r-2}'$ gebracht werden, wo alle $(u_1 u_k')$ und $(u_2 u_k')$ gleich Null sind, während alle $(u_i' u_k')$ sich als Functionen von $u_1' \cdots u_{r-2}'$ ausdrücken lassen.

Ist nämlich

$$v_1 \cdots v_{2n-r}$$

die Polargruppe von $u_1 \cdots u_r$, so ist bei unserer Voraussetzung auch

$$u_1 u_2 v_1 \cdots v_{2n-r}$$

eine Gruppe, deren $(r-2)$-gliedrige Polargruppe

$$u_1' \cdots u_{r-2}'$$

in $u_1 \cdots u_r$ enthalten ist (Satz 32.) und mit der Gruppe $u_1 u_2$ in In-

volution liegt. Es ist klar, dass keine Relation zwischen $u_1 u_2 u_1' \cdots u_{r-2}'$ stattfinden kann; denn eine solche liesse sich auf die Form

$$u_1 = \Psi (u_2 u_1' \cdots u_{r-2}')$$

bringen, und also wäre

$$(u_1 u_2) = (u_1' u_2) \frac{\partial \Psi}{\partial u_1'} + \cdots + (u_{r-2}' u_2) \frac{\partial \Psi}{\partial u_{r-2}'},$$

in welcher Gleichung die rechte Seite verschwindet, während die linke gleich 1 ist. Dies ist aber absurd. Also ist $u_1 u_2 u_1' \cdots u_{r-2}'$ eine Form unserer Gruppe, welche die verlangten Eigenschaften besitzt.

Satz 34. Eine jede r-gliedrige Gruppe, die kein Involutionssystem ist, lässt sich zerlegen in eine zweigliedrige und eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe, die mit jener in Involution liegt.

Denn die vorgelegte Gruppe $u_1 \cdots u_r$ enthält nach unserer Voraussetzung Functionen, die nicht mit allen übrigen Functionen der Gruppe in Involution liegen; wir nehmen eine solche, etwa u_1, und bestimmen (Satz 31.) eine zweite Function u_2 der Gruppe, welche

$$(u_1 u_2) = 1$$

giebt. Berücksichtigen wir dann den vorangehenden Satz, so sehen wir die Richtigkeit unseres Satzes ein.

27. Aus den vorangehenden Sätzen fliesst eine allgemeine und äusserst wichtige Reduction einer jeden Gruppe auf eine *kanonische* Form.

Satz 35. Eine jede Gruppe kann die Form $X_1 \cdots X_\nu P_1 \cdots P_\mu$ erhalten, wo die Ausdrücke $(X_i X_k)$, $(X_i P_k)$, $(P_i P_k)$ gleich Null und alle $(X_i P_i)$ gleich 1 sind. Diese Form nenne ich eine *kanonische* Form.

Ist nämlich unsere r-gliedrige Gruppe ein Involutionssystem, so hat sie bereits die kanonische Form und zwar ist $\nu = r$, $\mu = 0$.

Ist $u_1 \cdots u_r$ dagegen kein Involutionssystem, so zerlege man dieselbe (Satz 34.) in eine zweigliedrige und eine $(r-2)$-gliedrige Gruppe

(A) $$X_1 P_1 u_1' \cdots u_{r-2}',$$

welche beide in Involution liegen. Ist die $(r-2)$-gliedrige Gruppe ein Involutionssystem, so ist (A) die kanonische Form der ursprünglichen Gruppe, wobei $\nu = r - 1$, $\mu = 1$ ist.

Ist $u_1' \cdots u_{r-2}'$ kein Involutionssystem, so zerlege man diese $(r-2)$-gliedrige Gruppe in eine zweigliedrige und eine $(r-4)$-gliedrige Gruppe

$$X_2 P_2 u_1'' \cdots u_{r-4}''.$$

Hierbei nimmt die ursprüngliche Gruppe die Form an

$$X_1 P_1 X_2 P_2 u_1'' \cdots u_{r-4}'',$$

welche die verlangte kanonische Form ist, wenn die $(r-4)$-gliedrige Gruppe ein Involutionssystem ist. In dieser Weise fährt man fort, bis man zuletzt, etwa nach q Zerlegungen, zu einer $(r-2q)$-gliedrigen

Gruppe $u_1^{(q)} \cdots u_{r-2q}^{(q)}$ kommt, die ein Involutionssystem ist. Alsdann ist

$$X_1 P_1 X_2 P_2 \cdots X_q P_q u_1^{(q)} \cdots u_{r-2q}^{(q)}$$

die kanonische Form der r-gliedrigen Gruppe; hier ist $\nu = r - q$, $\mu = q$.

Satz 36. In einer kanonischen Gruppe $X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_q$ sind $X_{q+1} \cdots X_{q+m}$ die einzigen ausgezeichneten Functionen.

Wenn nämlich Π der vorgelegten kanonischen Gruppe angehört, so wird

$$(X_i \Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial P_i}, \quad (P_i \Pi) = -\frac{\partial \Pi}{\partial X_i}.$$

Soll also Π eine ausgezeichnete Function sein, so muss für $i = 1 \cdots q$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P_i} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = 0$$

werden, d. h. Π eine blosse Function von $X_{q+1} \cdots X_{q+m}$ sein.

Satz 37. Stehen $X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_q$ in den Beziehungen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (X_i P_i) = 1$$

und besteht dabei keine Relation zwischen $X_{q+1} \cdots X_{q+m}$, so bilden unsere $2q + m$ Functionen eine $(2q + m)$-gliedrige Gruppe.

Unser Satz kommt darauf hinaus, dass unter den gemachten Voraussetzungen keine Relation zwischen unseren $2q + m$ Functionen stattfinden kann. Denn eine solche würde jedenfalls eine von den $2q$ Grössen $X_1 \cdots X_q P_1 \cdots P_q$, etwa X_1, enthalten und könnte also die Form

$$X_1 = W(X_2 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_q)$$

erhalten. Hieraus würde aber folgen

$$(X_1 P_1) = (W P_1),$$

was contradictorisch ist, indem die linke Seite gleich 1 und die rechte gleich Null ist.

Satz 38. Die Differenz zwischen der Zahl der Glieder einer Gruppe und der Zahl ihrer ausgezeichneten Functionen ist eine gerade Zahl.

Denn jede Gruppe kann die Form

$$X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_q$$

erhalten, wo $X_{q+1} \cdots X_{q+m}$ die ausgezeichneten Functionen sind; also ist die erwähnte Differenz gleich $2q$.

Corollar 1. Eine $2q$-gliedrige Gruppe enthält entweder $2q$ oder $2q-2$ oder $2q-4 \cdots$ oder 2 oder keine ausgezeichneten Functionen.

Corollar 2. Eine $(2q+1)$-gliedrige Gruppe enthält entweder $2q+1$ oder $2q-1 \cdots$ oder 3 oder 1 ausgezeichnete Function. Eine solche Gruppe enthält also stets wenigstens *eine* ausgezeichnete Function.

Wir fassen endlich unsere Resultate zusammen.

Theorem IX. Eine jede Gruppe kann die Form

$$X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$$

erhalten, wobei folgende Relationen stattfinden

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0\,, \quad (X_i P_i) = 1\,.$$

Hier sind $X_{q+1} \cdots X_{q+m}$ die ausgezeichneten Functionen der Gruppe. Die Differenz zwischen der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Functionen ist stets eine gerade Zahl.

§ 13.

Bestimmung der invarianten Eigenschaften einer Gruppe.

28. Wir zeigen zunächst, dass man immer kanonische Gruppen finden kann, die eine gegebene kanonische Gruppe enthalten. Sodann erledigen wir das erste der beiden Probleme, die wir im Anfange dieses Abschnittes aufstellten.

Satz 39. Ist $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$ eine kanonische Gruppe, so giebt es immer solche Functionen P_{q+1}, welche die Gleichungen

$$(X_i P_{q+1}) = (P_i P_{q+1}) = 0\,, \quad (X_{q+1} P_{q+1}) = 1$$

erfüllen. Alsdann ist $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_{q+1}$ eine neue kanonische Gruppe, welche die vorgelegte umfasst.

Offenbar nämlich ist

(A) $$X_1 \cdots X_q\, X_{q+2} \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$$

eine Gruppe, deren Polargruppe X_{q+1} enthält und also etwa die Form

(B) $$X_{q+1},\ U_1\, U_2 \cdots\cdots$$

besitzt. Nun gehört X_{q+1} nicht der Gruppe (A) an, und ist also (Satz 27.) keine ausgezeichnete Function von (B), welche letzte Gruppe somit (Satz 31.) Functionen P_{q+1} enthält, die

$$(X_{q+1} P_{q+1}) = 1$$

ergeben. Aber eine jede solche Function P_{q+1} liegt, weil sie der Gruppe (B) angehört, mit allen Functionen der Gruppe (A) in Involution, und besitzt also alle verlangten Eigenschaften.

Satz 40. Ist $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$ eine kanonische Gruppe, so giebt es immer solche weitere Functionen $P_{q+1}\, P_{q+2} \cdots P_{q+m}$, dass

$$X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_{q+m}$$

eine neue kanonische Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfasst.

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar durch m-malige Anwendung des vorhergehenden.

Satz 41. Ist $X_1 \cdots X_q\, P_1 \cdots P_q$ eine kanonische Gruppe und

$q < n$, so giebt es immer Functionen X_{q+1}, die mit den Functionen unserer Gruppe in Involution liegen; alsdann ist

$$X_1 \cdots X_{q+1} P_1 \cdots P_q$$

eine neue kanonische Gruppe, welche die vorgelegte umfasst.

Denn eine jede Function, die der Polargruppe der vorgelegten Gruppe angehört, besitzt die Eigenschaften, die wir von der gesuchten Function X_{q+1} verlangten.

Satz 42. Ist $X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_q$ eine kanonische Gruppe, so giebt es immer solche weitere Functionen $X_{q+m+1} \cdots X_n P_{q+1} \cdots P_n$, dass auch

$$X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$$

eine kanonische Gruppe ist.

Denn nach Satz 40. giebt es eine kanonische Gruppe

$$X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_{q+m},$$

welche die vorgelegte umfasst; darnach findet man vermöge Satz 41. eine kanonische Gruppe

$$X_1 \cdots X_{q+m+1} P_1 \cdots P_{q+m},$$

sodann (Satz 39.) eine kanonische Gruppe

$$X_1 \cdots X_{q+m+1} P_1 \cdots P_{q+m+1}$$

u. s. w.

29. Im ersten Abschnitte (Theorem III.) sahen wir, dass Gleichungen von der Form

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i,$$

in denen X_i und P_i Functionen von $x_1 \cdots p_n$ bezeichnen, welche die Bedingungen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0, \quad (X_i P_i) = 1$$

erfüllen, immer eine Berührungstransformation bestimmen. Mit Benutzung dieses Satzes können wir jetzt folgendes Theorem beweisen und dadurch gleichzeitig Problem I. erledigen:

Theorem X. Besitzen zwei r-gliedrige Gruppen gleich viele ausgezeichnete Functionen, so giebt es immer eine Berührungstransformation, welche die eine Gruppe in die andere überführt. Andererseits ist diese Bedingung nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig.

Es seien $u_1 \cdots u_r$ Functionen von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ und $w_1 \cdots w_r$ Functionen von $y_1 \cdots y_n \pi_1 \cdots \pi_n$. Bilden dann sowohl $u_1 \cdots u_r$ als auch $w_1 \cdots w_r$ eine Gruppe und besitzen beide Gruppen dieselbe Anzahl von ausgezeichneten Functionen, so können die beiden Gruppen bez. die kanonischen Formen

$$X_1 \cdots X_\mu P_1 \cdots P_\nu \text{ und } Y_1 \cdots Y_\mu \Pi_1 \cdots \Pi_\nu$$

erhalten. Nach Satz 42. giebt es ferner stets solche weitere Functionen XP von $x_1 \cdots p_n$ und $Y\Pi$ von $y_1 \cdots \pi_n$, dass auch

$$X_1 \cdots X_n \, P_1 \cdots P_n \text{ und } Y_1 \cdots Y_n \, \Pi_1 \cdots \Pi_n$$

wiederum kanonische Gruppen sind. Es ist daher sowohl

$$x_i' = X_i, \quad p_i' = P_i$$

als auch

$$x_i' = Y_i, \quad p_i' = \Pi_i$$

eine Berührungstransformation. Hieraus aber folgt, dass auch die $2n$ Gleichungen

$$X_i = Y_i, \quad P_i = \Pi_i$$

eine Berührungstransformation definiren und man sieht, dass diese Transformation die eine Gruppe in die andere überführt.

Hiermit ist der erste Theil unseres Satzes bewiesen. Der letzte Theil desselben folgt unmittelbar daraus, dass bei jeder Berührungstransformation die Zahl der Glieder und die Zahl der ausgezeichneten Functionen einer Gruppe ungeändert bleibt (§ 9. und § 11.).

Corollar. Die einzigen Eigenschaften einer Gruppe, die von der Form der Gruppe unabhängig sind und bei Berührungstransformationen ungeändert bleiben, sind die Zahl der Glieder und die Zahl der ausgezeichneten Functionen.

§ 14.

Invariante Beziehungen zwischen einer Gruppe und einer Untergruppe derselben.

Ich erledige jetzt folgendes Problem:

Problem. Vorgelegt seien zwei r-gliedrige Gruppen, von denen jede eine ϱ-gliedrige Untergruppe enthält. Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation giebt, welche die eine r-gliedrige Gruppe und ihre Untergruppe bez. in die zweite r-gliedrige Gruppe und ihre Untergruppe überführt.

30. Zunächst einige Hülfssätze.

Satz 43. Sei $u_1 \cdots u_\varrho$ eine Gruppe, die in einer grösseren Gruppe $u_1 \cdots u_\varrho \cdots u_r$ enthalten ist. Es bezeichne ferner U eine Function der letzten Gruppe. Enthalten unsere Gruppen keine gemeinsame ausgezeichnete Function, so bilden die Gleichungen

$$(u_1 U) = 0, \quad \cdots \quad (u_\varrho U) = 0$$

ein vollständiges System, dessen $r - \varrho$ Lösungen $w_1 \cdots w_{r-\varrho}$ eine neue Gruppe bilden. Enthält insbesondere $u_1 \cdots u_\varrho$ keine ausgezeichnete Function, so ist

$$u_1 \cdots u_\varrho \, w_1 \cdots w_{r-\varrho}$$

eine Form der Gruppe $u_1 \cdots u_r$, die hierdurch in zwei involutorische Gruppen $u_1 \cdots u_\varrho$ und $w_1 \cdots w_{r-\varrho}$ zerlegt ist.

Sei nämlich $v_1 \cdots v_{2n-r}$ die Polargruppe von $u_1 \cdots u_r$. Früher (Theorem VII.) sahen wir, dass eine jede Relation zwischen den u und v die Form besitzt:

$$F(u_1 \cdots u_r) = \Phi(v_1 \cdots v_{2n-r}),$$

wobei F eine ausgezeichnete Function der Gruppe $u_1 \cdots u_r$ ist. Nach unserer Voraussetzung enthält diese Gruppe keine ausgezeichnete Function von der Form $F(u_1 \cdots u_\varrho)$; also existirt keine Functionalrelation zwischen $u_1 \cdots u_\varrho\, v_1 \cdots v_{2n-r}$. Folglich bilden diese Grössen eine Gruppe und die Gleichungen

(A) $(u_1 W) = 0, \cdots (u_\varrho W) = 0, \quad (v_1 W) = 0, \cdots (v_{2n-r} W) = 0$

ein vollständiges System, dessen $r - \varrho$ Lösungen $w_1 \cdots w_{r-\varrho}$ als Lösungen von

$$(v_1 W) = 0, \cdots (v_{2n-r} W) = 0$$

der Gruppe $u_1 \cdots u_r$ angehören.

Dass $w_1 \cdots w_{r-\varrho}$ eine Gruppe bilden, folgt daraus, dass jedes $(w_i w_k)$ nach dem Poisson-Jacobi'schen Theorem eine Lösung des Systems (A) ist.

Enthält im Besondern $u_1 \cdots u_\varrho$ keine ausgezeichnete Function, so existirt keine Relation zwischen $u_1 \cdots u_\varrho$ und $w_1 \cdots w_{r-\varrho}$, denn eine solche (Theorem VII.) hätte die Form

$$F(u_1 \cdots u_\varrho) = \Phi(w_1 \cdots w_{r-\varrho}),$$

wo F eine ausgezeichnete Function der Gruppe $u_1 \cdots u_\varrho$ wäre. Also ist

$$u_1 \cdots u_\varrho\, w_1 \cdots w_{r-\varrho}$$

eine Form der Gruppe $u_1 \cdots u_r$, die somit in zwei involutorische Gruppen zerlegt ist.

Satz 44. Ist $X_1 \cdots X_\alpha\, P_1 \cdots P_\alpha$ eine kanonische Gruppe, die in einer Gruppe G enthalten ist, so kann G die kanonische Form $X_1 \cdots X_\beta\, P_1 \cdots P_\gamma$ annehmen.

Denn zerlegen wir G nach dem vorangehenden Satze in die beiden involutorischen Gruppen

$$X_1 \cdots X_\alpha\, P_1 \cdots P_\alpha \text{ und } w_1 \cdots w_\varrho$$

und bringen sodann $w_1 \cdots w_\varrho$ auf eine kanonische Form

$$X_{\alpha+1} \cdots X_\beta\, P_{\alpha+1} \cdots P_\gamma,$$

so ist offenbar

$$X_1 \cdots X_\beta\, P_1 \cdots P_\gamma$$

die verlangte kanonische Form von G.

Satz 45. Enthält eine Gruppe G ein Involutionssystem $X_1 \cdots X_\varrho$ und ist keine Function der X ausgezeichnete Function in G, so kann diese Gruppe die kanonische Form

$$X_1 \cdots X_\varrho \cdots X_\alpha\, P_1 \cdots P_\varrho \cdots P_\beta$$

annehmen.

Sei nämlich $X_1 \cdots X_\varrho\, u_1 \cdots u_{r-\varrho}$ eine Form von G und $v_1 \cdots v_{2n-r}$ ihre Polargruppe. Nach unserer Voraussetzung existirt keine Relation zwischen den X und v; also bilden

$$X_2 \cdots X_\varrho\, v_1 \cdots v_{2n-r}$$

eine Gruppe, deren Polargruppe (Satz 32.) in G enthalten ist und X_1 enthält; diese Polargruppe besitzt daher die Form

$$X_1 \cdots X_\varrho\, w_1 \cdots w_{r-2\varrho+1} \quad (G').$$

X_1 ist (Satz 27.) keine ausgezeichnete Function in G', welche Gruppe folglich eine Function P_1 enthält (Satz 31.), die

$$(X_1 P_1) = 1$$

ergiebt. Hiermit ist die Gruppe G, die G' umfasst, auf die Form

$$X_1 P_1 X_2 \cdots X_\varrho\, \varphi_1 \cdots$$

gebracht. Sie lässt sich daher (Satz 43.) in zwei involutorische Gruppen zerlegen, von denen $X_1 P_1$ die eine ist, während die andere $X_2 \cdots X_\varrho$ enthält und die Form

$$X_2 \cdots X_\varrho\, u_1' \cdots u_{r-\varrho-1}'$$

besitzt. Diese Gruppe enthält keine ausgezeichnete Function von der Form $F(X_2 \cdots X_\varrho)$; also kann sie ebenfalls in zwei involutorische Gruppen

$$X_2 P_2 \text{ und } X_3 \cdots X_\varrho\, u_1'' \cdots u_{r-\varrho-2}''$$

zerlegt werden. Indem wir in dieser Weise weiter gehen, bringen wir zuletzt G auf die verlangte Form.

Satz 46. Sei nun vorgelegt eine Gruppe G mit r Gliedern $u_1 \cdots u_r$ und eine Untergruppe derselben $u_1 \cdots u_\varrho$, welche ϖ ausgezeichnete Functionen $X_1 \cdots X_\varpi$ mit G gemein hat. Ist

$$X_1 \cdots X_\varpi\, X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha}\, P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha}\, X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta}$$

eine kanonische Form der Untergruppe, so kann G immer die kanonische Form

$$X_1 \cdots X_\varpi\, X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta} \cdots X_\gamma\, P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha+\beta} \cdots P_\delta$$

annehmen.

Denn nach unserer Voraussetzung bilden

$$X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha}\, P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha} \quad (G')$$

eine Gruppe G', die in G enthalten ist. Daher kann G nach Satz 43. in zwei involutorische Gruppen G' und G'' zerlegt werden, von denen die letzte offenbar die Functionen $X_1 \cdots X_\varpi\, X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta}$ enthält, und also die Form

$$X_1 \cdots X_\varpi\, X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta}\, U_1 U_2 \cdots (G'')$$

besitzt. Nun umfasst G'' das Involutionssystem $X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta}$,

welches keine ausgezeichnete Function von G'' enthält; wenden wir daher den vorangehenden Satz an, so sehen wir, dass G'' die Form

$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta} \cdots X_\gamma \; P_{\varpi+\alpha+1} \cdots P_{\varpi+\alpha+\beta} \cdots P_\delta$$

annehmen kann. Hiermit ist die Gruppe G, die aus den Functionen der beiden Gruppen G' und G'' besteht, auf die verlangte Form gebracht.

Corollar. Hat eine Gruppe ϖ ausgezeichnete Functionen mit einer Untergruppe gemein, so können diese beiden Gruppen die kanonischen Formen

$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+1} \cdots X_\beta \cdots X_\gamma \; P_{\varpi+1} \cdots P_\beta \cdots P_\delta,$$
$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha} \quad P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha} \; X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_\beta$$

annehmen.

31. Nun können wir das im Anfange dieses Paragraphen gestellte Problem erledigen.

Theorem XI. Seien vorgelegt zwei Gruppen G und G' mit gleich vielen Gliedern und gleich vielen ausgezeichneten Functionen. Jede der beiden Gruppen enthalte ferner eine Untergruppe g, respective g', mit gleich vielen Gliedern und gleich vielen ausgezeichneten Functionen. Endlich möge sowohl G wie G' mit der betreffenden Untergruppe ϖ ausgezeichnete Functionen gemein haben. Alsdann giebt es eine Berührungstransformation, welche gleichzeitig G und g in G' und g' überführt. Umgekehrt ist eine solche Transformation nur möglich, wenn alle genannten Forderungen erfüllt sind.

Bringen wir nämlich g und G nach dem vorangehenden Corollar auf die simultanen kanonischen Formen

$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha} \quad P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha} \; X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_\beta,$$
$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+1} \cdots X_\beta \cdots X_\gamma \; P_{\varpi+1} \cdots P_\beta \cdots P_\delta,$$

so ist es möglich, g' und G' auf die simultanen kanonischen Formen

$$X_1' \cdots X_\varpi' \; X_{\varpi+1}' \cdots X_{\varpi+\alpha}' \quad P_{\varpi+1}' \cdots P_{\varpi+\alpha}' \; X_{\varpi+\alpha+1}' \cdots X_\beta',$$
$$X_1' \cdots X_\varpi' \; X_{\varpi+1}' \cdots X_\beta' \cdots X_\gamma' \; P_{\varpi+1}' \cdots P_\beta' \cdots P_\delta'$$

zu bringen. Also kann G (siehe den Beweis vom Theorem X.) auf solche Weise in G' transformirt werden, dass jedes X_i und P_i in das entsprechende X_i' und P_i' übergeht. Hierbei wird aber offenbar gleichzeitig g in g' übergeführt. Also sind die aufgestellten Forderungen hinreichend; dass sie nothwendig sind, liegt darin, dass sie sich auf Relationen beziehen, die bei Berührungstransformationen invariant bleiben.

Corollar. Alle invarianten Beziehungen zwischen einer Gruppe und einer Untergruppe werden bestimmt durch die Zahl der gemeinsamen ausgezeichneten Functionen, verbunden mit der Zahl der Glieder und der Zahl der ausgezeichneten Functionen beider Gruppen. Diese letzten Zahlen definiren nach dem Früheren die individuellen invarianten Eigenschaften jeder der beiden Gruppen.

Es drängt sich nun die Frage auf, wie man verfahren muss, wenn man untersuchen will, wie viele gemeinsame ausgezeichnete Functionen eine Gruppe $u_1 \cdots u_\varrho \cdots u_r$ und eine Untergruppe derselben $u_1 \cdots u_\varrho$ enthalten.

Bezeichnet man mit F eine Function von $u_1 \cdots u_r$, so ist klar, dass die genannten Functionen durch die simultanen Gleichungen

$$(u_1 F) = 0, \cdots (u_r F) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_{\varrho+1}} = 0, \cdots \frac{\partial F}{\partial u_r} = 0$$

definirt sind. Man untersucht also in der gewöhnlichen Weise, wie viele gemeinsame Lösungen diese Gleichungen haben. Giebt es ϖ solche, so verlangt ihre Bestimmung die Operationen $\varpi, \varpi - 1, \cdots 3, 2, 1$. Also:

Satz 47. Kennt man eine Gruppe und eine Untergruppe derselben, so kann man ohne Integration entscheiden, wie viele ausgezeichnete Functionen diese beiden Gruppen gemein haben. Giebt es ϖ solche, so findet man dieselben durch die Operationen $\varpi, \varpi - 1, \cdots 3, 2, 1$.

Endlich brauche ich auch den folgenden Satz:

Satz 48. Sei $u_1 \cdots u_\varrho \cdots u_r$ eine Gruppe und $u_1 \cdots u_\varrho$ eine Untergruppe derselben, die mit ihr ϖ ausgezeichnete Functionen gemein hat. Bezeichnet dann F eine Function von $u_1 \cdots u_r$, so haben die Gleichungen

$$(u_1 F) = 0, \cdots (u_\varrho F) = 0$$

$r - \varrho + \varpi$ gemeinsame Lösungen und lassen sich daher durch $\varrho - \varpi$ Gleichungen ersetzen, die ein vollständiges System bilden.

Denn unsere Gruppen lassen sich auf die simultanen kanonischen Formen

$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta} \cdots X_\gamma \; P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha+\beta} \cdots P_\delta,$$
$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+1} \cdots X_{\varpi+\alpha} \; P_{\varpi+1} \cdots P_{\varpi+\alpha} \; X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_{\varpi+\alpha+\beta}$$

bringen. Folglich sind:

$$X_1 \cdots X_\varpi \; X_{\varpi+\alpha+1} \cdots X_\gamma \; P_{\varpi+\alpha+\beta+1} \cdots P_\delta$$

diejenigen Functionen der grossen Gruppe, die mit allen Functionen der Untergruppe in Involution liegen. Macht man nun eine einfache Abzählung, so sieht man die Richtigkeit unseres Satzes ein.

§ 15.

Bestimmung der in einer Gruppe enthaltenen Involutionssysteme.

32. *Satz 49.* Aus einer Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen und $m + 2q$ Gliedern können $(m + q)$-gliedrige Involutionssysteme ausgeschieden werden.

Denn eine solche Gruppe besitzt die kanonische Form

$$X_1 \cdots X_{q+m}\ P_1 \cdots P_q$$

und hier bilden $X_1 \cdots X_{q+m}$ ein Involutionssystem mit $q+m$ Gliedern.

Satz 50. Ein Involutionssystem, das in einer $(2q + m)$-gliedrigen Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen enthalten ist, kann höchstens aus $q + m$ Functionen bestehen.

Denn sei $\Phi_1 \cdots \Phi_\nu$ ein Involutionssystem, welches in der Gruppe $X_1 \cdots X_{q+m}\ P_1 \cdots P_q$ enthalten ist. Man bestimme solche weitere Functionen X und P, dass

$$X_1 \cdots X_n\ P_1 \cdots P_n$$

eine kanonische Gruppe ist, zwischen deren Functionen bekanntlich keine Relation bestehen kann. Es liegt nun eine jede Function des Involutionssystems

$$X_{q+m+1} \cdots X_n$$

in Involution mit allen Functionen der ursprünglichen Gruppe, insbesondere also auch mit $\Phi_1 \cdots \Phi_\nu$. Also ist

$$X_{q+m+1} \cdots X_n\ \Phi_1 \cdots \Phi_\nu$$

ein Involutionssystem mit $\nu + n - q - m$ von einander unabhängigen Functionen. Es ist aber bekannt, dass ein Involutionssystem höchstens n Glieder enthält, also muss

$$\nu + n - q - m < n\,,$$

das heisst

$$\nu \leqq q + m$$

sein, und das war eben unsere Behauptung. —

Wir zeigen jetzt, wie man im Allgemeinen verfahren muss, um Involutionssysteme mit möglichst vielen Gliedern aus einer vorgelegten Gruppe auszuscheiden.

Ist $u_1 \cdots u_{2q+m}$ eine gegebene Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen $U_1 \cdots U_m$, so findet man zuerst die letzteren durch Integration des Systems

$$(u_1 U) = 0\,, \cdots (u_{2q+m} U) = 0\,,$$

was die Operationen m, $m-1$, $\cdots$ 3, 2, 1 verlangt. Wir wissen, dass $U_1 \cdots U_m$ einem jeden $(q + m)$-gliedrigen Involutionssysteme unserer Gruppe angehören.

Sodann nimmt man eine beliebige, nur keine ausgezeichnete Function der Gruppe, z. B. u_1, und bestimmt eine weitere Function $F(u_1 u_2 \cdots)$ aus der Gleichung

$$(u_1 F) = \sum_{k=1}^{k=2q+m} (u_1 u_k) \frac{\partial F}{\partial u_k} = 0 .$$

Diese partielle Differentialgleichung, in welcher überall statt $(u_1 u_k)$ die entsprechende Function der u zu setzen ist, besitzt $m + 1$ bekannte Lösungen, nämlich $U_1 \cdots U_m u_1$; also findet man eine weitere Lösung $F = w_2$ vermöge einer Operation $2q - 2$.

Mit den beiden Functionen u_1 und w_2 bildet man sodann:

$$(u_1 F) = 0 , \quad (w_2 F) = 0 ,$$

ersetzt in den entwickelten Gleichungen überall $(u_1 u_k)$ und $(w_2 u_k)$ durch die betreffenden Functionen der u, und erhält so ein vollständiges System, bestehend aus zwei Gleichungen zwischen $2q + m$ Variabeln mit $m + 2$ bekannten Lösungen, nämlich $U_1 \cdots U_m u_1 w_2$. Man findet also eine weitere gemeinsame Lösung w_3 durch eine Operation $2q - 4$.

Indem man in dieser Weise weiter geht, erkennt man, dass die Bestimmung eines $(q + m)$-gliedrigen Involutionssystems in einer $(2q + m)$-gliedrigen Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen im Allgemeinen die Operationen verlangt:

$$m, m - 1, \cdots 3, 2, 1, 2q - 2, 2q - 4, \cdots 4, 2.$$

33. Diese Methode lässt sich durch eine andere ersetzen, welche einfachere Integrationen verlangt, so oft die vorgelegte Gruppe eine bekannte Untergruppe enthält.

Sei also vorgelegt eine Gruppe G mit einer bekannten Untergruppe g; man sucht ein in G enthaltenes Involutionssystem mit möglichst vielen Gliedern. Zu diesem Zwecke bestimmt man zuerst die ϖ gemeinsamen ausgezeichneten Functionen $U_1 \cdots U_\varpi$ unserer beiden Gruppen; dies verlangt (Satz 47.) die Operationen

$$\varpi, \varpi - 1, \cdots 3, 2, 1.$$

Sodann sucht man die $m' - \varpi$ übrigen ausgezeichneten Functionen, welche g enthält, durch die Operationen (§ 11. Schluss)

$$m' - \varpi, m' - \varpi - 1, \cdots 3, 2, 1.$$

Nachdem man in dieser Weise sämmtliche ausgezeichnete Functionen der Gruppe g gefunden hat, bestimmt man nach der früher auseinandergesetzten Methode ein in g enthaltenes Involutionssystem mit möglichst vielen Gliedern

$$U_1 \cdots U_\varpi u_1 \cdots u_\varrho .$$

Von den m ausgezeichneten Functionen der Gruppe G kennt man nun schon ϖ, nämlich $U_1 \cdots U_\varpi$; also findet man die $m - \varpi$ übrigen $U_{\varpi+1} \cdots U_m$ durch die Operationen

$$m - \varpi,\ m - \varpi - 1,\ \cdots 3,\ 2,\ 1.$$

Man kennt dann sämmtliche ausgezeichnete Functionen

$$U_1 \cdots U_m$$

der Gruppe G und ausserdem ein in G enthaltenes Involutionssystem

$$u_1 \cdots u_\varrho,$$

dessen Functionen von den U unabhängig sind. Nun geht man weiter wie im allgemeinen Falle.

Noch grössere Vereinfachungen treten z. B. ein, wenn die Untergruppe g selbst eine bekannte Untergruppe enthält. Ohne auf alle Fälle, die überhaupt eintreten können, einzugehen, hebe ich nur hervor, dass meine allgemeine Theorie in jedem einzelnen Falle die Zahl und die Ordnung der nothwendigen Integrationen a priori anzugeben erlaubt. Also:

Theorem XII. Eine Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen und $2q + m$ Gliedern enthält Involutionssysteme mit $q + m$ Gliedern; die Bestimmung eines solchen Systems verlangt im Allgemeinen die Operationen

$$m,\ m - 1,\ \cdots 3,\ 2,\ 1,\ 2q - 2,\ 2q - 4,\ \cdots 4,\ 2.$$

Kennt man schon Untergruppen, so treten Integrationsvereinfachungen ein, die sich immer a priori angeben lassen. Unsere Gruppe enthält kein Involutionssystem mit mehr als $q + m$ Gliedern.

34. In dieser Nummer beweise ich, dass es in einer Gruppe mit mehr als n Gliedern einen Maximumswerth für die Zahl der ausgezeichneten Functionen giebt. Sodann folgt ein wichtiges Theorem über Gruppen, welche die grösstmögliche Zahl ausgezeichneter Functionen enthalten.

Eine Gruppe mit m ausgezeichneten Functionen und $2q + m$ Gliedern enthält $(q + m)$-gliedrige Involutionssysteme, also muss

$$q + m \leqq n$$

sein. Nennen wir die Zahl der Gliedern r, so nimmt diese Bedingung die Form an

$$\frac{r + m}{2} \leqq n.$$

Nennen wir endlich die Zahl der Glieder $n + k$, so erhalten wir die dritte Form

$$m \leqq n - k,$$

welche zeigt, dass, wenn die Zahl der Glieder grösser als n ist, die Zahl der ausgezeichneten Functionen einen Maximumswerth hat.

Theorem XIII. Besitzt eine gegebene Gruppe $u_1 \cdots u_{n+k}$ *die grösstmögliche Zahl ausgezeichneter Functionen* $\Phi_1 \cdots \Phi_{n-k}$, *so verlangt die Integration des Involutionssystems*

$$\Phi_1 = a_1 , \cdots \Phi_{n-k} = a_{n-k}$$

nur ausführbare Operationen.

Denn meine Erweiterung der Cauchy'schen Methode sagt aus, dass die Integration eines Involutionssystems

$$\Phi_1 = a_1 , \cdots \Phi_{n-k} = a_{n-k}$$

geleistet werden kann, wenn alle Lösungen des vollständigen Systems

$$(\Phi_1 F) = 0 , \cdots (\Phi_{n-k} F) = 0$$

gefunden sind. Aber solche Lösungen sind eben $u_1 \cdots u_{n+k}$, und zwar giebt es keine andere. Also ist mein Theorem bewiesen.

§ 16.

Erledigung des zweiten Hauptproblems.

Wir erledigen zuerst einen speciellen Fall des zweiten Hauptproblems und zeigen darnach, dass das allgemeine Problem sich auf diesen speciellen Fall zurückführen lässt.

35. Wir setzen voraus, dass $F_1 \cdots F_r$ und $F_1' \cdots F_r'$ zwei r-gliedrige Gruppen sind; wir werden entscheiden, ob es eine Berührungstransformation giebt, welche jedes F_i in das entsprechende F_i' überführt. Existirt eine solche Transformation, so führt sie (Satz 11.) die Gleichung

$$(F_i F_k)_{xp} = \Omega_{ik}(F_1 \cdots F_r)$$

in

$$(F_i' F_k')_{x'p'} = \Omega_{ik}(F_1' \cdots F_r')$$

über. Soll also die besprochene Transformation möglich sein, so muss jedes $(F_i' F_k')_{x'p'}$ sich in derselben Weise durch $F_1' \cdots F_r'$, wie das entsprechende $(F_i F_k)_{xp}$, durch $F_1 \cdots F_r$ ausdrücken lassen. Es lässt sich umgekehrt zeigen, dass diese nothwendige Bedingung auch hinreichend ist.

Seien in der That $F_1 \cdots F_r$ und $F_1' \cdots F_r'$ zwei solche r-gliedrige Gruppen, dass

(A) $(F_i F_k) = \Omega_{ik}(F_1 \cdots F_r)$, $(F_i' F_k') = \Omega_{ik}(F_1' \cdots F_r')$,

und sei $X_1 \cdots X_\alpha \; P_1 \cdots P_\beta$, wo

$$X_i = \Phi_i(F_1 \cdots F_r), \quad P_i = \Psi_i(F_1 \cdots F_r),$$

eine kanonische Form der ersten Gruppe.

Ich bilde die Functionen

$$X_i' = \Phi_i(F_1' \cdots F_r'), \quad P_i' = \Psi_i(F_1' \cdots F_r')$$

und die Ausdrücke

$$(X_i' X_k') \ (X_i' P_k') \ (P_i' P_k') ,$$

welche wegen (A) dieselben Functionen von $F_1' \cdots F_r'$, wie

$$(X_i X_k) \ (X_i P_k) \ (P_i P_k)$$

von $F_1 \cdots F_r$ sind. Nun gelten aber nach unserer Voraussetzung die Relationen

$$(X_i X_k) = (X_i P_k) = (P_i P_k) = 0 , \quad (X_i P_i) = 1 ,$$

also finden auch die entsprechenden Gleichungen

$$(X_i' X_k') = (X_i' P_k') = (P_i' P_k') = 0 , \quad (X_i' P_i') = 1$$

statt. Nun sind offenbar $X_1' \cdots X_\alpha' \ P_1' \cdots P_\beta'$ von einander unabhängige Functionen, und also ist

$$X_1' \cdots X_\alpha' \ P_1' \cdots P_\beta'$$

eine kanonische Form der Gruppen $F_1' \cdots F_r'$. Folglich giebt es (Theorem X.) eine Berührungstransformation, welche jedes X_i und P_i in das entsprechende X_i' und P_i' transformirt. Dabei geht, wie man unmittelbar sieht, jedes F_i in das entsprechende F_i' über. Also:

Satz 51. Seien $F_1 \cdots F_r$ und $F_1' \cdots F_r'$ zwei r-gliedrige Gruppen. Soll es Berührungstransformationen geben, welche jedes F_i in das entsprechende F_i' überführt, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass jedes $(F_i F_k)$ sich in derselben Weise durch $F_1 \cdots F_r$, wie das entsprechende $(F_i' F_k')$ durch $F_1' \cdots F_r'$ ausdrückt.

36. Nun können wir das allgemeine Problem angreifen.

Seien also vorgelegt zwei Systeme von Functionen $F_1 \cdots F_r$ und $F_1' \cdots F_r'$. Es soll entschieden werden, ob es eine Berührungstransformation giebt, welche jedes F_i in das entsprechende F_i' überführt.

Zunächst ist klar, dass wir voraussetzen können, dass alle F_i (und ebenso alle F_i') von einander unabhängig sind; denn wären z. B. nur $F_1 \cdots F_\alpha$ von einander unabhängig, dagegen

$$F_{\alpha+k} = W_k(F_1 \cdots F_\alpha) \quad (k = 1 \cdots r - \alpha) ,$$

so müssten offenbar auch $F_1' \cdots F_\alpha'$ von einander unabhängig sein und die übrigen $F_{\alpha+k}'$ sich folgendermassen durch $F_1' \cdots F_\alpha'$ ausdrücken:

$$F_{\alpha+k}' = W_k(F_1' \cdots F_\alpha') .$$

Ist dies aber der Fall, so ist auch klar, dass eine Berührungstransformation, welche $F_1 \cdots F_\alpha$ bez. in $F_1' \cdots F_\alpha'$ transformirt, gleichzeitig $F_{\alpha+1} \cdots F_r$ in $F_{\alpha+1}' \cdots F_r'$ überführt.

Seien also $F_1 \cdots F_r$ und ebenso $F_1' \cdots F_r'$ von einander unabhängig. Existirt die verlangte Berührungstransformation, so führt dieselbe jedes $(F_i F_k)$ in das entsprechende $(F_i' F_k')$ über. Ich bilde nun neue Functionen, indem ich setze

$$(F_{a^{(1)}} F_{b^{(1)}}) = F_{r+1}, \quad (F_{a^{(2)}} F_{b^{(2)}}) = F_{r+2} \cdots (F_{a^{(\varrho)}} F_{b^{(\varrho)}}) = F_{r+\varrho},$$

wo die Zahlen $a^{(k)}$ und $b^{(k)}$ der Beschränkung unterworfen sind, dass

$$a^{(k)} < r + \varrho, \quad b^{(k)} < r + \varrho$$

sein muss und dass F_{r+k} sich nicht durch $F_1 \cdots F_r \cdots F_{r+k-1}$ ausdrücken lassen soll. In dieser Weise fahre ich fort so lange wie möglich, d. h. bis ich die durch $F_1 \cdots F_r$ bestimmte Gruppe

$$F_1 \cdots F_r \cdots F_{r+\varrho},$$

welche höchstens $2n$ Glieder enthält, gefunden habe. Setze ich nun in entsprechender Weise

$$(F'_{a^{(k)}} F'_{b^{(k)}}) = F'_{r+k},$$

so muss die gesuchte Berührungstransformation jedes F_{r+k} in das entsprechende F'_{r+k} transformiren. Also müssen auch

$$F_1' \cdots F_r' \cdots F'_{r+\varrho}$$

eine Gruppe bilden; ferner muss nach dem vorangehenden Satze jedes $(F_i' F_k')$ sich in derselben Weise durch $F_1' \cdots F'_{r+\varrho}$, wie das entsprechende $(F_i F_k)$ durch $F_1 \cdots F_{r+\varrho}$ ausdrücken lassen. Andererseits ist diese nothwendige Forderung nach dem Obenstehenden auch hinreichend. Demnach:

Theorem XIV. Seien vorgelegt zwei Systeme Functionen bez. von xp und von $x'p'$

$$F_1 \cdots F_\alpha \text{ und } F_1' \cdots F_\alpha'.$$

Soll man entscheiden, ob es Berührungstransformationen giebt, welche jedes F_i in das entsprechende F_i' transformirt, so verfährt man in folgender Weise: Unter den F nimmt man r von einander unabhängige, etwa $F_1 \cdots F_r$, durch die sich die übrigen ausdrücken lassen:

$$F_{r+k} = W_k(F_1 \cdots F_r) \quad (k = 1 \cdots \alpha - r).$$

Eine erste Bedingung ist dann, dass $F_1' \cdots F_r'$ unabhängige Functionen sind, durch die sich die F'_{r+k} in entsprechender Weise ausdrücken:

$$F'_{r+k} = W_k(F_1' \cdots F_r').$$

Ist dies der Fall, so bildet man die durch $F_1 \cdots F_r$ bestimmte Gruppe, indem man setzt

$$(F_{a^{(1)}} F_{b^{(1)}}) = F_{r+1}, \cdots\cdots (F_{a^{(k)}} F_{b^{(k)}}) = F_{r+k}$$

und dabei die Zahlen $a^{(k)} b^{(k)}$ so wählt, dass immer

$$a^{(k)} < r + k, \quad b^{(k)} < r + k$$

und dass kein F_{r+k} sich durch $F_1 \cdots F_{r+k-1}$ ausdrücken lässt. Sei

$$F_1 \cdots F_{r+\varrho}$$

die in dieser Weise erhaltene Gruppe. Setzt man dann in entsprechender Weise

$$(F'_{a^{(1)}} F'_{b^{(1)}}) = F'_{r+1}, \cdots (F'_{a^{(\varrho)}} F'_{b^{(\varrho)}}) = F'_{r+\varrho},$$

so müssen auch die Functionen

$$F_1' \cdots F'_{r+\varrho}$$

eine Gruppe mit $r+\varrho$ Gliedern bilden; und überdies muss jedes $(F_i' F_k')$ dieser Gruppe sich in derselben Weise durch $F_1' \cdots F'_{r+\varrho}$ wie das entsprechende $(F_i F_k)$ durch $F_1 \cdots F_{r+\varrho}$ ausdrücken lassen. Finden alle diese Bedingungen statt, so ist die verlangte Transformation möglich.

Dieses Theorem bestimmt alle zwischen den gegebenen Functionen $F_1 \cdots F_a$ stattfindenden Beziehungen, die bei beliebigen Berührungstransformationen ungeändert bleiben. Wie man sieht, lassen sich alle derartige Beziehungen vermöge des Differentialsymbols $(\Phi\Pi)$ in Verbindung mit endlichen Functionalrelationen ausdrücken.

§ 17.

Integrationsmethoden, die sich auf die früheren Entwickelungen stützen.

37. Ich setze voraus, dass ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1, \cdots F_q = C_q$$

integrirt werden soll und dass man bereits eine Reihe Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ kennt, die allen Gleichungen

$$(F_i \Phi) = 0$$

genügen. Kann man vermöge des Poisson-Jacobi'schen Theorems keine weiteren Lösungen auffinden, so bilden $F_1 \cdots F_q\ \Phi_1 \cdots \Phi_r$ eine Gruppe, in welcher $F_1 \cdots F_q$ ausgezeichnete Functionen sind. Giebt es ausserdem noch μ solche Functionen

$$F_{q+1} \cdots F_{q+\mu},$$

so bestimme man dieselben (§ 11. Schluss) vermöge der Operationen

$$\mu,\ \mu-1,\ \cdots 3,\ 2,\ 1.$$

Alsdann ist

$$F_1 = C_1, \cdots\cdots F_{q+\mu} = C_{q+\mu}$$

ein neues Involutionssystem mit $r-\mu$ bekannten Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{r-\mu}$ der $q+\mu$ Gleichungen $(F_i\Phi)=0$, und die Integration des vorgelegten Involutionssystems ist auf diejenige des neuen Systems zurückgeführt.

Man kann bemerken, dass $r-\mu$ eine gerade Zahl sein muss; denn $r-\mu$ ist die Differenz zwischen der Zahl der Glieder $r+q$ und der Zahl der ausgezeichneten Functionen $q+\mu$, und ist also nach einem früheren Satze (Theorem IX.) eine gerade Zahl.

38. Wir werden hierdurch auf die äusserst wichtige Aufgabe geführt, ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1 , \cdots F_m = C_m$$

in möglichst einfacher Weise zu integriren, wenn man $2q$ Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ des Systems $(F_i\Phi) = 0$ kennt, welche zusammen mit den F eine Gruppe bilden, deren einzige ausgezeichnete Functionen die F sind.

Zu dem Ende stellt man das vollständige System auf

$$(F_1F) = 0 , \cdots (F_mF) = 0 , \quad (\Phi_1F) = 0 , \cdots (\Phi_{2q}F) = 0 ,$$

unter dessen $2n - 2q - m$ Lösungen m schon bekannt sind, nämlich $F_1 \cdots F_m$. Man bestimmt eine weitere Lösung F_{m+1} vermöge einer Operation

$$2n - 2q - 2m .$$

Hierbei ist zu bemerken, dass F_{m+1} nicht der Gruppe $F_1 \cdots F_m \Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ angehören kann. Denn $F_1 \cdots F_m$ sind die einzigen Functionen dieser Gruppe, welche zugleich der Polargruppe angehören, und F_{m+1} ist nach unserem Verfahren keine Function von $F_1 \cdots F_m$.

Hiermit ist unser Problem zurückgeführt auf die Integration des Involutionssystems

$$F_1 = C_1 , \cdots F_{m+1} = C_{m+1}$$

mit $2q$ Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ des entsprechenden vollständigen Systems $(F_i\Phi) = 0$. Hier gehen wir in derselben Weise weiter. Wir stellen also das vollständige System auf:

$$(F_1F) = 0 , \cdots (F_{m+1}F) = 0 , \quad (\Phi_1F) = 0 , \cdots (\Phi_{2q}F) = 0 ,$$

unter dessen $2n - 2q - m - 1$ Lösungen $m + 1$ bekannt sind, nämlich $F_1 \cdots F_{m+1}$. Wir bestimmen eine weitere Lösung F_{m+2} vermöge einer Operation

$$2n - 2q - 2m - 2$$

und bemerken dabei wie oben, dass F_{m+2} nicht der Gruppe $F_1 \cdots F_{m+1} \Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ angehören kann.

Sodann behandeln wir das Involutionssystem

$$F_1 = C_1 , \cdots F_{m+2} = C_{m+2}$$

mit den bekannten Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ der Gleichungen $(F_i\Phi) = 0$ und finden eine Function F_{m+3} durch eine Operation

$$2n - 2q - 2m - 4 ,$$

darnach eine Function F_{m+4} durch eine Operation

$$2n - 2q - 2m - 6$$

u. s. w. und endlich eine Function F_{n-q} durch eine Operation

Hiermit ist die Integration des ursprünglichen Involutionssystems zurückgeführt auf diejenige des Systems

$$F_1 = C_1 , \cdots F_{n-q} = C_{n-q}$$

mit $2q$ bekannten Lösungen

$$\Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$$

der $n - q$ Gleichungen $(F_i \Phi) = 0$. Aber die Integration dieses Systems wird (Theorem XIII.) durch meine Erweiterung der Cauchy'schen Methode ohne Weiteres geleistet. Demnach:

Satz 52. Die Integration eines Involutionssystems

$$F_1 = C_1 , \cdots F_m = C_m$$

mit $2q$ bekannten Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ der m Gleichungen

$$(F_1 \Phi) = 0 , \cdots (F_m \Phi) = 0$$

verlangt die Operationen

$$2n - 2q - 2m, \quad 2n - 2q - 2m - 2, \cdots 6, 4, 2,$$

während bei der directen Anwendung der erweiterten Cauchy'schen Methode die Operationen

$$2n-2q-2m, \quad 2n-2q-2m-1, \quad 2n-2q-2m-2, \cdots 3, 2, 1$$

erforderlich waren. Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems keine weiteren Lösungen Φ giebt, das heisst, dass $F_1 \cdots F_m \Phi_1 \cdots \Phi_{2q}$ eine Gruppe bilden und dass die F die einzigen ausgezeichneten Functionen dieser Gruppe sind.

Combiniren wir hiermit den Inhalt der vorangehenden Nummer, so erhalten wir das folgende Theorem, welches in schematischer Weise die wichtigsten Integrations-Erleichterungen angiebt, die sich aus dem Vorhergehenden ziehen lassen.

Theorem XV. Soll ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1 , \cdots F_q = C_q$$

integrirt werden, und kennt man dabei $2v + m$ Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2v+m}$ der q Gleichungen $(F_i \Phi) = 0$, die mit $F_1 \cdots F_q$ eine Gruppe bilden, welche ausser den F noch m ausgezeichnete Functionen enthält, so verlangt die Ausführung unseres Integrationsgeschäfts die folgenden Operationen

$$m, \quad m - 1, \quad m - 2, \cdots 3, 2, 1,$$

$$2n - 2q - 2v - 2m, \quad 2n - 2q - 2v - 2m - 2, \cdots 6, 4, 2.$$

Die directe Anwendung der erweiterten Cauchy'schen Methode verlangte die Operationen

$$2n - 2q - 2v - m, \quad 2n - 2q - 2v - m - 1, \cdots 3, 2, 1,$$

Die Jacobi'sche Methode würde im Allgemeinen noch viel weniger Nutzen aus den Functionen Φ ziehen.

Man erkennt übrigens leicht, dass häufig noch grössere Integrationsvereinfachungen sich erreichen lassen, nämlich dann, wenn man bereits Untergruppen kennt.

39. Um die Leistungen dieser Theorie mit denen der erweiterten Cauchy'schen Methode zu vergleichen, gehe ich zurück auf die früher (Nr. 34.) gefundene Relation zwischen der Zahl r der Glieder und der Zahl m der ausgezeichneten Functionen einer Gruppe:

$$\frac{r+m}{2} \leqq n .$$

Diese Gleichung nimmt im vorliegenden Falle, da die Gruppe

$$F_1 \cdots F_q \; \Phi_1 \cdots \Phi_{2\nu+m}$$

$2\nu + m + q$ Glieder und $q + m$ ausgezeichnete Functionen enthält, die folgende Form an:

$$\frac{2\nu + 2q + 2m}{2} \leqq n ,$$

oder

$$2n - 2\nu - 2q - 2m \geqq 0 .$$

Wir betrachten zuerst den Fall

$$2n - 2\nu - 2q - 2m > 0 ,$$

hierauf den Fall

$$2n - 2\nu - 2q - 2m = 0 .$$

A. Ist

$$2n - 2\nu - 2q - 2m > 0 ,$$

so überzeugt man sich leicht davon, dass die neue Methode einfachere Integrationen als die frühere Methode verlangt. Denn in diesem Falle ist

$$2n - 2\nu - 2q - m > m ,$$

und daher sind die Zahlen

$$m, \; m-1, \; \cdots 3, \; 2, \; 1,$$

$$2n - 2q - 2\nu - 2m, \; 2n - 2q - 2\nu - 2m - 2, \; \cdots 4, \; 2$$

kleiner als die Zahlen

$$2n - 2q - 2\nu - m, \; 2n - 2q - 2\nu - m - 1, \; \cdots 3, \; 2, \; 1 .$$

B. In dem Falle

$$2n - 2\nu - 2q - 2m = 0$$

dagegen verlangen die beiden Methoden gleich hohe Operationen. Die neue Methode verlangt nämlich in diesem Falle die Operationen

$$m, \; m-1, \; \cdots 3, \; 2, \; 1,$$

während die alte die Operationen verlangt

$$2n - 2q - 2\nu - m, \; 2n - 2q - 2\nu - m - 1, \; \cdots 3, \; 2, \; 1,$$

was eben auf dasselbe hinauskommt.

Wir wollen endlich noch den Fall $q = 1$ etwas näher betrachten. Eine Gleichung

$$F(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = \text{Const.}$$

soll integrirt werden, und man kennt $2\nu + m$ Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_{2\nu+m}$ der Gleichung $(F\Phi) = 0$, aus denen keine neue Lösung durch Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems gefunden werden kann. Die Gruppe

$$F\Phi_1 \cdots \Phi_{2\nu+m}$$

enthält, setzen wir voraus, ausser F noch m ausgezeichnete Functionen.

Ist hier die Zahl der bekannten Lösungen

$$2\nu + m < n - 1,$$

und also auch

$$m < n - 1,$$

so ist

$$2\nu + 2m < 2n - 2$$

und also

$$2n - 2\nu - 2m - 2 > 0.$$

Nach unseren obenstehenden Entwickelungen verlangt also unsere Methode in diesem Falle einfachere Integrationen als die Cauchy'sche.

Sei jetzt

$$2\nu + m = n - 1;$$

ist dann $\nu = 0$, so ist $m = n - 1$ und die Gleichungen

$$F = C, \quad \Phi_1 = C_1, \cdots \Phi_{n-1} = C_{n-1}$$

bilden ein Involutionssystem, dessen Integration nach der von mir verbesserten Jacobi'schen Methode unter allen Umständen nur noch eine Quadratur erheischt.

Ist dagegen

$$2\nu + m = n - 1$$

und

$$\nu > 0,$$

so ist

$$m < n - 3$$

und also

$$2\nu + 2m < 2n - 4,$$

oder

$$2n - 2\nu - 2m - 2 > 0.$$

In diesem Falle verlangt also die neue Theorie wiederum einfachere Operationen als die Cauchy'sche.

Ist endlich $2\nu + m$ gleich 2, so kann man entweder die eine der beiden bekannten Lösungen wählen, und sodann die Jacobi'sche Methode anwenden, oder auch beide benutzen und der obenstehenden Theorie folgen. Beide Methoden verlangen gleich hohe Integrationen. Dieser Umstand, dass man aus einer bekannten Lösung denselben Nutzen ziehen kann wie aus zwei solchen, beruht keineswegs auf einem

Mangel der Methode. Es liesse sich beweisen, dass dies in der Natur der Sache liegt. Ist $2v + m$ grösser als 2, so brauche ich nicht meine neue Theorie mit der Jacobi'schen zu vergleichen; denn diese letzte steht in diesem Falle selbst gegen die Cauchy'sche zurück.

Wir betrachten nun den Fall

$$2v + m > n .$$

Nach meinen früheren Entwickelungen soll der ungünstige Fall, in dem meine Methode keine Vereinfachung leistet, dann eintreten, wenn

$$2n - 2v - 2m - 2 = 0 .$$

Diese Bedingung tritt ein, wenn die Gruppe

$$F\Phi_1 \cdots \Phi_{2r+m}$$

die grösstmögliche Zahl ausgezeichneter Functionen enthält und sonst niemals. Also:

Theorem XVI. Soll eine Gleichung

$$F(x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n) = \text{Const.}$$

integrirt werden und kennt man mehr als zwei Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ der Gleichung $(F\Phi) = 0$, so vereinfacht meine neue Theorie immer die zurückstehenden Integrationsschwierigkeiten, ausgenommen allein wenn

$$r \leqq n$$

und überdies die Gruppe $F\Phi_1 \cdots \Phi_r$ die grösstmögliche Zahl ausgezeichnete Functionen enthält, in welchem Falle meine Methode ebenso hohe Integrationen erfordert wie die alte Theorie.

§ 18.

Schematisch ausgeführte Beispiele.

40. Um die Bedeutung der vorangehenden Theorien klar hervortreten zu lassen, behandle ich einige Beispiele schematisch.

A. Sei vorgelegt

$$p_{10} - f(x_1 \cdots x_{10} p_1 \cdots p_9) = 0$$

mit sieben bekannten Lösungen $\varphi_1 \cdots \varphi_7$ der Gleichung $(p_{10} - f, \varphi) = 0$, die zusammen mit $p_{10} - f$ eine Gruppe bilden. Es sind hier vier verschiedene Fälle denkbar, die eine verschiedene Behandlung verlangen.

1) Unsere Gruppe enthält nur eine ausgezeichnete Function ausser $p_{10} - f$. Alsdann verlangt das zurückstehende Integrationsgeschäft die Operationen

$$1, 10, 8, 6, 4, 2.$$

2) Unsere Gruppe enthält drei ausgezeichnete Functionen ausser $p_{10} - f$. Alsdann sind folgende Operationen nothwendig

$$3, 2, 1, 8, 6, 4, 2.$$

3) Enthält die Gruppe fünf ausgezeichnete Functionen ausser $p_{10}-f$, so sind folgende Operationen nothwendig

$$5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 2.$$

4) Ist endlich die Gruppe ein Involutionssystem, so sind nur die Operationen nothwendig

$$4, 2.$$

Früher wusste man nur den letzten Fall in so einfacher Weise zu behandeln, und dies sogar nur, wenn das betreffende Involutionssystem die bekannte Bedingung erfüllte (§ 7.). *Die übrigen Fälle waren nicht bekannt*; man verlangte immer die Operationen

$$11, 10, 9, 8, \cdots 3, 2, 1,$$

oder mit Benutzung der Jacobi'schen Multiplicatortheorie die Operationen

$$11, 10, 9, \cdots 4, 3, 2,$$

Ich resumire dieses Bespiel durch folgendes Schema:

1 ausgezeichnete Function	1, 10, 8, 6, 4, 2.
3 ausgezeichnete Functionen	3, 2, 1, 8, 6, 4, 2.
5 ausgezeichnete Functionen	5, 4, 3, 2, 1, 6, 4, 2.
7 ausgezeichnete Functionen	4, 2.
Ausser im letzten Falle verlangte man früher mit Benutzung der Multiplicatortheorie die Operationen	11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

B. Sei vorgelegt

$$p_{10} - f = 0$$

mit 8 bekannten Lösungen $\varphi_1 \cdots \varphi_8$ der Gleichung $(p_{10} - f, \varphi) = 0$. Dieselben bilden mit $p_{10} - f$ eine Gruppe, welche ausser $p_{10} - f$ noch 8 oder 6 oder 4 oder 2 oder keine ausgezeichnete Functionen enthält. Das folgende Schema giebt die in diesen Fällen nothwendigen Operationen an.

keine ausgezeichnete Function	10, 8, 6, 4, 2.
2 ausgezeichnete Functionen	2, 1, 8, 6, 4, 2.
4 ausgezeichnete Functionen	4, 3, 2, 1, 6, 4, 2.
6 ausgezeichnete Functionen	6, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 2.
8 ausgezeichnete Functionen	2.
Ausser im letzten Falle brauchte man früher mit Benutzung der Multiplicatortheorie die Operationen	10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.

C. Sei vorgelegt

$$p_{10} - f = 0$$

mit 12 bekannten Lösungen $\varphi_1 \cdots \varphi_{12}$ von $(p_{10} - f, \varphi) = 0$, aus denen sich keine weitere solche durch Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems ableiten lässt. Das folgende Schema erklärt die möglichen Fälle, verglichen mit der alten Methode.

keine ausgezeichnete Function	6, 4, 2.
2 ausgezeichnete Functionen	2, 1, 4, 2.
4 ausgezeichnete Functionen	4, 3, 2, 1, 2.
6 ausgezeichnete Functionen	6, 5, 4, 3, 2, 1.
Die alte Theorie verlangt mit Benutzung der Multiplicatortheorie immer	6, 5, 4, 3, 2.

Ausser im letzten Falle giebt also meine Theorie immer eine Integrationserniedrigung.

§ 19.

Andeutung einiger weiteren Integrationsvereinfachungen.

41. Die grosse Wichtigkeit der entwickelten Integrationstheorien beruht insbesondere darauf, dass man bei der Behandlung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. nach den beiden Methoden, welche Mayer und ich im Frühlinge 1872 gaben, häufig in die folgende Lage kommt:

Ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1, \cdots\cdots F_m = C_m$$

soll integrirt werden, und man kennt schon eine *Reihe* Functionen $\Phi_1 \cdots \Phi_r$, welche allen Gleichungen $(F_i\Phi) = 0$ genügen.

Es schien daher naturgemäss, sich die Frage zu stellen: Wie muss man verfahren, um die zurückstehenden Integrationen hinsichtlich der Zahl und der Ordnung möglichst zu erniedrigen?

Diejenigen Vereinfachungen, die sich hierbei immer erreichen lassen, sind in dem letzten Paragraphen angegeben. Es bleibt übrig zu zeigen, wie man die Umstände, die bei der weiteren Behandlung des Problems eintreten können, am vortheilhaftesten verwerthen kann.

Sei vorgelegt ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1, \cdots\cdots F_m = C_m$$

mit r Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ der m Gleichungen $(F_i\Phi) = 0$, aus denen sich keine weitere Lösung durch Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems berechnen lässt. (Hierbei können wir voraussetzen,

dass die Gruppe $F_1 \cdots F_m \Phi_1 \cdots \Phi_r$ keine ausgezeichneten Functionen als die F enthält; denn im entgegengesetzten Falle könnte man dieselben bestimmen und dann diese Functionen den F hinzufügen.

Nach unserer allgemeinen Theorie stellen wir das vollständige System

$$(F_1 F) = 0\,, \cdots (F_m F) = 0\,, \quad (\Phi_1 F) = 0\,, \cdots (\Phi_r F) = 0$$

auf und suchen durch Anwendung des Mayer'schen Theorems eine von $F_1 \cdots F_m$ verschiedene gemeinsame Lösung desselben. Gelingt es, eine solche zu bestimmen, so findet man bekanntlich sehr häufig gleichzeitig mehrere, etwa ϱ solche

$$\Pi_1 \cdots \Pi_\varrho\,.$$

Es ist nun denkbar, dass die Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems noch weitere Lösungen Π giebt*). Jedenfalls kann man die durch unsere Functionen bestimmte Gruppe

$$F_1 \cdots F_m\ \Phi_1 \cdots \Phi_r\ \Pi_1 \cdots \Pi_\varpi$$

immer berechnen. Das ursprüngliche Problem ist hierdurch auf die Integration des Involutionssystems

$$F_1 = C_1\,, \cdots F_m = C_m$$

mit den bekannten Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_r\ \Pi_1 \cdots \Pi_\varpi$ zurückgeführt.

Ehe man hier weiter geht, muss man wie gewöhnlich untersuchen, ob die Gruppe $F_1 \cdots F_m\ \Phi_1 \cdots \Phi_r\ \Pi_1 \cdots \Pi_\varpi$ noch andere ausgezeichnete Functionen als die F enthält. Wenn solche existiren, so bestimmt man dieselben, und dabei nimmt unser Problem wieder die ursprüngliche Form an:

Ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1\,, \cdots F_{m+q} = C_{m+q}$$

mit k bekannten Lösungen $\Omega_1 \cdots \Omega_k$ der $m + q$ Gleichungen $(F_i \Omega) = 0$ soll integrirt werden, wobei die F die einzigen ausgezeichneten Functionen der betreffenden Gruppe sind. Hier geht man in derselben Weise weiter. —

Hier kann die Bemerkung ihren Platz finden, dass die vorangehenden Theorien theilweise eine andere Form erhalten könnten, nämlich durch Anwendung eines Satzes, der im engsten Zusammenhange mit meiner neuen Integrationsmethode (1872) steht:

Theorem XVI. Sei vorgelegt ein Involutionssystem

$$F_1 = C_1\,, \cdots F_m = C_m$$

zwischen den Variabeln $x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n$ und seien $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ bekannte

*) Ich habe mich an einem Beispiel überzeugt, dass dieser Fall wirklich eintreten kann.

Lösungen der m Gleichungen $(F_i\Phi) = 0$. Alsdann kann man das Involutionssystem zurückführen auf eine einzige Gleichung von der Form

$$f(x_1 \cdots x_{n-m}\, p_1 \cdots p_{n-m}) = \text{Const.},$$

in der Art, dass die Integration dieser einen Gleichung diejenige des Involutionssystems nach sich zieht, und kann zugleich q Lösungen $\varphi_1 \cdots \varphi_q'$ von $(f\varphi) = 0$ angeben.

§ 20.

Behandlung des Problems der drei Körper nach meiner allgemeinen Theorie.

42. Hamilton und Jacobi haben bekanntlich gezeigt, dass jedes Problem der mécanique céleste sich durch eine gewisse partielle Differentialgleichung 1. O.

$$H(x_1 \cdots x_n\, p_1 \cdots p_n) = a$$

ausdrücken lässt. Die bekannten Integrale der simultanen Differentialgleichungen, welche unmittelbar das betreffende Problem definiren, geben gleich viele Lösungen der linearen Gleichung

$$(HF) = 0.$$

Meine allgemeine Theorie lehrt nun, wie man in jedem einzelnen Falle die bekannten Lösungen benutzen muss, um die zurückstehenden Integrationen soviel wie möglich hinsichtlich der Zahl und der Ordnung zu reduciren. Als Beispiel wähle ich das Problem der drei Körper und setze dabei zunächst voraus, dass der eine Körper fest ist; sodann gebe ich eine directe Behandlung des allgemeinen Falles.

Bewegen sich drei materielle Körper, von denen der eine fest ist, vermöge ihrer gegenseitigen Anziehung, so gelten die drei Flächensätze. Ich bezeichne die partielle Differentialgleichung, welche das Problem ausdrückt, mit

$$H(x_1 \cdots x_6\, p_1 \cdots p_6) = a,$$

und die drei Lösungen der Gleichung $(HF) = 0$, die den Flächensätzen entsprechen, mit

$$F_1\, F_2\, F_3.$$

Zwischen denselben bestehen bekanntlich die Relationen

$$(F_1 F_2) = F_3, \quad (F_2 F_3) = F_1, \quad (F_3 F_1) = F_2,$$

und also bilden $F_1\, F_2\, F_3$ eine dreigliedrige Gruppe, die kein Involutionssystem ist und daher *eine* ausgezeichnete Function Φ enthält. Dieselbe wird bestimmt durch zwei beliebige von den Gleichungen

$$(F_1\Phi) = 0 = \qquad F_3\frac{\partial\Phi}{\partial F_2} - F_2\frac{\partial\Phi}{\partial F_3},$$
$$(F_2\Phi) = 0 = -F_3\frac{\partial\Phi}{\partial F_1} \qquad + F_1\frac{\partial\Phi}{\partial F_3},$$
$$(F_3\Phi) = 0 = \quad F_2\frac{\partial\Phi}{\partial F_1} - F_1\frac{\partial\Phi}{\partial F_2}.$$

Integrirt man hier nach den gewöhnlichen Regeln, so findet man

$$\Phi = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Es ist klar, dass die viergliedrige Gruppe

$$H,\ F_1,\ F_2,\ F_3$$

zwei ausgezeichnete Functionen

$$H \text{ und } F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

enthält; also besteht jedes Involutionssystem, welches dieser Gruppe angehört, höchstens aus drei Gliedern. Ein solches ist

$$H = a\,,\quad F_1 = b\,,\quad F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = c\,;$$

auf die Integration dieses Systems ist also das ursprüngliche Problem zurückgeführt. Meine neue Integrationsmethode lehrt aber, dass es immer möglich ist, eine Gleichung von der Form

$$f(x_1 \cdots x_4\, p_1 \cdots p_1) = 0$$

aufzustellen, die dem obenstehenden Involutionssysteme äquivalent ist. Nach Mayer's und meiner alten Theorie verlangt also die Erledigung des ursprünglichen Problemes nur noch die Operationen

$$6,\ 4,\ 2.$$

43. Sei nun

$$H(x_1 \cdots x_9\, p_1 \cdots p_9) = a$$

die partielle Differentialgleichung, die dem allgemeinen Probleme der drei Körper äquivalent ist. Seien

$$\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$$

die drei Lösungen der Gleichung $(H\varphi) = 0$, die den drei Schwerpunktsintegralen entsprechen, ferner

$$\varphi_4\ \varphi_5\ \varphi_6$$

die drei Lösungen, die den Flächensätzen entsprechen, endlich

$$\varphi_7\ \varphi_8\ \varphi_9$$

die Lösungen, die aus den zweiten Schwerpunktsintegralen durch Elimination der Zeit hervorgehen. Zu bemerken ist dabei, dass zwischen den 9 Functionen φ eine Relation

$$\varphi_1\varphi_7 + \varphi_2\varphi_8 + \varphi_3\varphi_9 = 0$$

besteht. Die Functionen $\varphi_1 \cdots \varphi_8$ bilden eine achtgliedrige Gruppe. Wir werden finden, dass dieselbe zwei ausgezeichnete Functionen ent-

hält, und dass es folglich möglich ist, fünfgliedrige Involutionssysteme aus unserer Gruppe auszuscheiden.

Wir müssen nach unserer allgemeinen Theorie die von allen $(\varphi_i \varphi_k)$ gebildete Determinante mit 8 Reihen und Colonnen

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\varphi_1 \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1 \varphi_8) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_8 \varphi_1) & \cdots & (\varphi_8 \varphi_8) \end{vmatrix}$$

aufstellen. Man findet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 & 0 & M\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 & -M\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 & M\varphi_2 & -M\varphi_1 \\ 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 & 0 & \varphi_6 & -\varphi_5 & 0 & \varphi_9 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_4 & -\varphi_9 & 0 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 & \varphi_5 & -\varphi_4 & 0 & \varphi_8 & -\varphi_7 \\ 0 & M\varphi_3 & -M\varphi_2 & 0 & \varphi_9 & -\varphi_8 & 0 & M\varphi_9 \\ -M\varphi_3 & 0 & M\varphi_1 & -\varphi_9 & 0 & \varphi_7 & -M\varphi_9 & 0 \end{vmatrix},$$

wo M eine Constante ist, und φ_9 durch die Identität

$$\varphi_1 \varphi_7 + \varphi_2 \varphi_8 + \varphi_3 \varphi_9 = 0$$

bestimmt wird. Die Berechnung der Determinante zeigt, dass sie gleich Null ist. Also enthält unsere Gruppe jedenfalls eine und demzufolge mindestens zwei ausgezeichnete Functionen. Hätte sie mehr als zwei solche Functionen, so würde deren Zahl vier oder noch grösser sein. Dann müssten aber alle Unterdeterminanten zweiter und dritter Ordnung verschwinden und man verificirt ohne Schwierigkeit, dass es Unterdeterminanten dritter (und auch zweiter) Ordnung giebt, welche von Null verschieden sind. Also hat unsere Gruppe zwei ausgezeichnete Functionen und enthält demzufolge Involutionssysteme mit fünf Gliedern und keins mit mehr als fünf Gliedern. Ist ein solches System gefunden, so bilden seine Glieder zusammen mit H ein 6-gliedriges Involutionssystem, dessen Integration sich nach meiner Methode auf diejenige einer einzigen Gleichung

$$f(x_1 \cdots x_4 p_1 \cdots p_4) = 0$$

zurückführen lässt.

Um ein fünfgliedriges Involutionssystem durch möglichst einfache Operationen (§ 15., 33.) aus der achtgliedrigen Gruppe auszuscheiden, bemerken wir, dass $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4\ \varphi_5\ \varphi_6$ eine sechsgliedrige Untergruppe bilden, welche das Involutionssystem $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ enthält. Untersuchen wir die Determinante der sechsgliedrigen Gruppe, so finden wir, dass auch diese Gruppe zwei ausgezeichnete Functionen besitzt. Also ent-

hält sie Involutionssysteme mit 4 und kein solches mit mehr als 4 Gliedern. Wir suchen ein solches, welches die Form

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3\,\Phi(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4\varphi_5\varphi_6)$$

besitzt. Die Function Φ wird bestimmt durch zwei von den Gleichungen

$$(\varphi_1\Phi)=0\,,\quad (\varphi_2\Phi)=0\,,\quad (\varphi_3\Phi)=0\,,$$

die durch Entwickelung und Einsetzung der Werthe der $(\varphi_i\varphi_k)$ die Form erhalten:

$$\varphi_3\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_5}-\varphi_2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_6}=0\,,$$
$$-\varphi_3\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_4}+\varphi_1\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_6}=0\,.$$

Integrirt man nach den gewöhnlichen Regeln, so findet man

$$\Phi=\varphi_1\varphi_4+\varphi_2\varphi_5+\varphi_3\varphi_6\,.$$

Wir kennen also ein viergliedriges Involutionssystem

(A) $$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_1\varphi_4+\varphi_2\varphi_5+\varphi_3\varphi_6$$

der achtgliedrigen Gruppe. Um nun das gesuchte fünfgliedrige Involutionssystem zu finden, brauchen wir nur eine Function Π der Gruppe zu bestimmen, die zu den Functionen (A) in Involutionsbeziehung steht. Indem man den gewöhnlichen Regeln folgt, findet man für Π die Function

$$(M\varphi_4-\varphi_7)^2+(M\varphi_5-\varphi_8)^2+(M\varphi_6-\varphi_9)^2\,.$$

Hiermit ist das gesuchte Involutionssystem gefunden*). Darnach giebt eine Elimination eine Gleichung der Form

$$f(x_1\cdots x_4\,p_1\cdots p_4)=0\,,$$

auf deren Integration das Problem der drei Körper sich zurückführen lässt. Dieses bekannte Resultat ist hiermit auf seinen inneren Grund zurückgeführt.

Ehe Mayer und ich unsere neue Integrationsmethoden im Jahre 1872 veröffentlicht hatten, verlangte die Erledigung des Problems der drei Körper nach der Jacobi-Weiler'schen Methode die Operationen

$$6,\ 4,\ 4,\ 2,\ 2.$$

Unsere Arbeiten zeigen, dass nur die Operationen

$$6,\ 4,\ 2$$

erforderlich sind.

Es ist selbstverständlich, dass die Entwickelungen dieses Paragraphen sich ohne Weiteres auf das allgemeine Problem von n Körpern ausdehnen**).

---

*) Clebsch führte in seinen Vorlesungen das Problem der drei Körper auf die Integration des aufgestellten Involutionssystems zurück.

**) Bei einer anderen Gelegenheit werde ich die Mechanik einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit mit constantem Krümmungsmass entwickeln. Die-

Dritter Abschnitt.

Theorie der homogenen Gruppen.

In diesem Abschnitte betrachte ich eine Anzahl homogener Functionen $H_1 \cdots H_r$ von $x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$ und bestimme alle zwischen denselben stattfindenden Beziehungen, die bei homogenen Berührungstransformationen ungeändert bleiben. Gleichzeitig erledigt sich das entsprechende Problem für beliebige Functionen von $z x_1 \cdots x_n p_1 \cdots p_n$, welche beliebigen Berührungstransformationen unterworfen werden.

§ 21.

Homogene Gruppen.

44. Zuerst soll ein neuer Begriff eingeführt werden; derselbe beruht auf dem folgenden Satze:

Satz 53. Sind H_α und H_β homogene Functionen von α^{ter} und β^{ter} Dimension, so ist $(H_\alpha H_\beta)$ homogen von $(\alpha+\beta-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Denn man hat

$$(H_\alpha H_\beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial H_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial H_\beta}{\partial x_i} \right);$$

nun sind $\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial H_\beta}{\partial x_i}$ homogen bez. von α^{ter} und β^{ter} Dimension; ferner sind $\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}$ und $\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i}$ homogen bez. von $(\alpha-1)^{\text{ter}}$ und $(\beta-1)^{\text{ter}}$ Dimension. Also ist sowohl $\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial H_\beta}{\partial p_i}$ wie $\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H_\beta}{\partial x_i}$ von der $(\alpha+\beta-1)^{\text{ten}}$ Dimension; also ist auch $(H_\alpha H_\beta)$ homogen von $(\alpha+\beta-1)^{\text{ter}}$ Dimension.

Corollar. Erzeugen zwei oder mehrere homogene Functionen $H_1 \cdots H_\varrho$ eine r-gliedrige Gruppe, so besteht dieselbe in derjenigen Form, in welcher sie sich zunächst darbietet, aus r Gliedern, die homogen sind. Hierbei ist zu bemerken, dass Functionen, die einer solchen Gruppe angehören, im Allgemeinen nicht homogen sind.

Def. Eine r-gliedrige Gruppe heisst homogen, wenn sie r homogene von einander unabhängige Functionen enthält.

---

jenigen Integrale der Bewegungsgleichungen, die ihren Grund in der freien Beweglichkeit des betreffenden Raumes in sich selbst haben, können vermöge eines allgemeinen Princips, welches ich ein andermal geben werde, aufgestellt werden. Wie dann hinterher diese Integrale am besten ausgenutzt werden, zeigt diese Abhandlung. Es ist mir nicht bekannt, ob die hiermit angedeutete Theorie schon gegeben ist.

Satz 54. Sind $H_1 \cdots H_r$ homogene Functionen, die eine Gruppe bilden, und bezeichnet F eine beliebige Function dieser Gruppe, so gehört auch $\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k}$ unserer Gruppe an.

Denn die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=r} p_k \frac{\partial F}{\partial H_i} \frac{\partial H_i}{\partial p_k}$$

geht, wenn man zuerst hinsichtlich k summirt und sich dabei erinnert, dass alle H_i homogen, etwa von der s_i^{ten} Dimension sind, in

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{i=r} s_i \frac{\partial F}{\partial H_i} \cdot H_i$$

über; hier ist aber die rechte Seite eine Function von $H_1 \cdots H_r$.

Satz 55. Bilden $K_1 \cdots K_r$ eine Gruppe, welche die Eigenschaft besitzt, dass jedes $\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K_i}{\partial p_k}$ sich durch die K ausdrückt, so ist die Gruppe homogen.

Sind nämlich einige der Ausdrücke

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K_i}{\partial p_k} = \Omega_i (K_1 \cdots K_r)$$

von Null verschieden, so ist die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = \Phi ,$$

oder die entsprechende

$$\sum_{i=1}^{i=r} \Omega_i \frac{\partial \Phi}{\partial K_i} = \Phi$$

eine lineare partielle Differentialgleichung mit r von einander unabhängigen Lösungen

$$\Phi_1 \cdots \Phi_r ,$$

welche homogen von 1^{ter} Dimension sind und unserer Gruppe angehören. Also ist die Gruppe homogen. — Sind endlich alle Ω_i gleich Null, so heisst dies, dass alle K von nullter Dimension sind; auch in diesem Falle ist also die Gruppe homogen.

Satz 56. Sind alle Functionen einer homogenen Gruppe von nullter Dimension, so ist die Gruppe ein Involutionssystem.

Seien nämlich $N_1 \cdots N_r$ Functionen nullter Dimension, die eine r-gliedrige Gruppe bilden. Ist der Ausdruck $(N_i N_k)$ von Null verschieden, so muss derselbe (Satz 53.) von -1^{ter} Dimension sein; nun

ist es aber unmöglich, eine Function -1^{ter} Dimension durch Grössen nullter Dimension $N_1 \cdots N_r$ auszudrücken; also müssen alle $(N_i N_k)$ gleich Null und die Gruppe ein Involutionssystem sein.

Satz 57. Enthält eine homogene Gruppe Functionen, die nicht von nullter Dimension sind, so kann die Gruppe die Form $N_1 \cdots N_{r-1} H$ erhalten; hier bezeichnen alle N Functionen nullter Dimension und H eine Function 1^{ter} Dimension.

Sind nämlich $H \cdots H_r$ homogene Functionen unserer Gruppe, so ist es immer möglich, indem man jedes H durch eine gewisse Potenz desselben ersetzt, der Gruppe eine solche Form

$$N_1 \cdots N_\varrho \; H_{\varrho+1} \cdots H_r$$

zu geben, dass sie nur Glieder von nullter und 1^{ter} Dimension enthält. Setzt man nun

$$\frac{H_{\varrho+1}}{H_r} = N_{\varrho+1}, \quad \cdots \quad \frac{H_{r-1}}{H_r} = N_{r-1},$$

so ist

$$N_1 \cdots N_{r-1} H_r$$

eine Form unserer Gruppe, welche die gestellten Forderungen erfüllt.

§ 22.

Die Polargruppe und die ausgezeichneten Functionen einer homogenen Gruppe sind homogen.

45. Die Theorien dieses Abschnittes beruhen auf einem Theoreme, welches wir jetzt beweisen werden. Zuerst jedoch ein Hülfssatz.

Satz 58. Die Gleichungen

$$(HK) = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} = sH,$$

in denen s eine Constante bezeichnet, ziehen die folgende

$$\left(H, \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K}{\partial p_k}\right) = 0$$

nach sich.

Denn setzen wir

$$A(H) = (HK), \quad B(H) = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - sH,$$

so genügt, weil $A(0) = B(0) = 0$ ist, jede gemeinsame Lösung H unserer beiden Gleichungen zugleich auch der Gleichung

$$A(B(H)) - B(A(H)) = 0.$$

Durch Ausführung findet man aber:

$$A(B(H)) - B(A(H)) = (H, K) - \left(H, \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K}{\partial p_k}\right).$$

Also ziehen in der That unsere beiden Gleichungen die dritte

$$\left(H, \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K}{\partial p_k}\right) = 0$$

nach sich.

Theorem XVIII. Die Polargruppe einer homogenen Gruppe ist homogen.

Beweis. Seien $H_1 \cdots H_r$ homogene Functionen, die eine r-gliedrige Gruppe bilden, und sei $K_1 \cdots K_{2n-r}$ die Polargruppe. Alsdann gelten die Gleichungen

$$(H_i K_\varrho) = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H_i}{\partial p_k} = s_i H_i\,,$$

die nach dem vorangehenden Satze die folgenden

$$\left(H_i, \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K_\varrho}{\partial p_k}\right) = 0\,, \quad (i = 1 \cdots r)$$

nach sich ziehen. Also besitzt die Gruppe $K_1 \cdots K_{2n-r}$ die Eigenschaft, dass der Ausdruck $\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial K_\varrho}{\partial p_k}$ jedesmal eine Function der Grössen $K_1 \cdots K_{2n-r}$ ist. Also (Satz 55.) bilden $K_1 \cdots K_{2n-r}$ eine homogene Gruppe.

Satz 59. Sei $H_1 \cdots H_r$ eine homogene Gruppe. Alsdann bilden die Gleichungen

$$(H_1\Phi) = 0\,, \cdots (H_r\Phi) = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

ein vollständiges System, wenn nicht zufälliger Weise die letzte Gleichung eine algebraische Consequenz der übrigen ist.

Die Polargruppe von $H_1 \cdots H_r$ ist nämlich homogen und besitzt daher (Satz 57.) entweder die Form $N_1 \cdots N_{2n-r-1} H$ oder die Form $N_1 \cdots N_{2n-r}$. Im ersten Falle giebt es unter den $2n - r$ Lösungen des vollständigen Systems

(A) $$(H_1\Phi) = 0\,, \cdots (H_r\Phi) = 0$$

$2n - r - 1$, nämlich $N_1 \cdots N_{2n-r-1}$, welche zugleich der Gleichung

(B) $$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

genügen. Alsdann bilden also

$$(H_1\Phi) = 0\,, \quad \cdots \quad (H_r\Phi) = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} = 0$$

ein vollständiges System. — Im zweiten Falle sind sämmtliche Lösungen der Gleichungen (A) zugleich Lösungen von (B), welche Gleichung also eine Consequenz und zwar eine algebraische Consequenz von (A) ist.

Es ist zu bemerken, dass in diesem letzten Falle $r \geqq n$ sein muss. Denn die Polargruppe, da sie aus Functionen nullter Dimension besteht, ist (Satz 56.) ein Involutionssystem, und kann also höchstens n Glieder enthalten. —

Ich werde mit Benutzung des letzten Satzes eine Integrationsmethode der Gleichungen

$$N_1 \left(x_1 \cdots x_n \frac{p_1}{p_n} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} \right) = \text{Const.}$$

angeben, die hinsichtlich der Zahl und der Ordnung der nothwendigen Integrationen mit Mayer's und meinen früheren Theorien übereinstimmt.

Ich stelle auf das vollständige System

$$(N_1 F) = 0\,, \quad \sum p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0$$

und bestimme eine Lösung N_2 desselben vermöge einer Operation $2n - 3$. Alsdann ist $N_1 N_2$ ein Involutionssystem. Ich stelle auf das vollständige System

$$(N_1 F) = 0\,, \quad (N_2 F) = 0\,, \quad \sum p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0$$

und bestimme eine Lösung desselben N_3, die von N_1 und N_2 verschieden ist, durch eine Operation $2n - 5$. In dieser Weise findet man zuletzt ein Involutionssystem

$$N_1 = a_1\,, \quad N_2 = a_2\,, \quad \cdots \quad N_n = a_n\,;$$

eliminirt man zwischen diesen Gleichungen die Differentialquotienten $p_1 \cdots p_n$, was immer möglich ist, da die p nur als Verhältnisse auftreten, so erhält man eine Gleichung zwischen $x_1 \cdots x_n$ oder unter Umständen mehrere, die eine vollständige Lösung der vorgelegten Gleichung darstellen.

46. Wir wenden uns nun zu den ausgezeichneten Functionen der homogenen Gruppen.

Theorem XIX. Die ausgezeichneten Functionen einer homogenen Gruppe bilden eine homogene Gruppe.

Sei nämlich $H_1 \cdots H_r$ eine homogene Gruppe und $K_1 \cdots K_{2n-r}$ die homogene Polargruppe derselben. Besitzen diese beiden Gruppen m gemeinsame ausgezeichnete Functionen, so ist es (Theorem VII.)

immer möglich, $r - m$ solche Glieder in der ersten Gruppe, etwa $H_1 \cdots H_{r-m}$ zu wählen, dass zwischen den $2n - m$ Grössen

$$H_1 \cdots H_{r-m}\ K_1 \cdots K_{2n-r}$$

keine Relation stattfindet. Alsdann bilden diese Functionen eine Gruppe und zwar eine homogene Gruppe, deren Polargruppe, die ebenfalls homogen sein muss, aus den ausgezeichneten Functionen der ursprünglichen Gruppe besteht (Satz 25., Beweis). Hiermit ist unser Theorem erwiesen.

Satz 60. Giebt es unter den m ausgezeichneten Functionen einer homogenen Gruppe einige, deren Dimensionen von Null verschieden sind, so kann man sämmtliche ausgezeichnete Functionen vermöge der Operationen

$$m - 1,\ \ m - 2,\ \cdots\ 3,\ 2,\ 1,\ 1$$

bestimmen. Meine alte Methode verlangte die Operationen m, $m-1$, $\cdots$ 3, 2, 1.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass unsere Gruppe schon die Form $N_1 \cdots N_{r-1} H$ besitzt Bezeichne ich mit N eine Function von $N_1 \cdots N_{r-1}$, so bestimmen die Gleichungen

$$(N_1 \mathsf{N}) = 0\,,\ \cdots\ (N_{r-1}\mathsf{N}) = 0\,,\ \ (H\mathsf{N}) = 0\,,$$

oder entwickelt

$$(\alpha) \qquad \sum_{k=1}^{k=r-1} (N_1 N_k)\,\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 0\,,\ \cdots\cdots\ \sum_{k=1}^{k=r-1} (H N_k)\,\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 0$$

die ausgezeichneten Functionen nullter Dimension. Nun sind die $(N_i N_k)$ Functionen —1ter Ordnung und $(H N_k)$ ist eine Function nullter Ordnung von $N_1 \cdots N_{r-1} H$. Es müssen daher diese Ausdrücke die Form

$$(N_i N_k) = \frac{f_{ik}(N_1 \cdots N_{r-1})}{H}\,,$$

$$(H N_k) = \varphi_{ik}(N_1 \cdots N_{r-1})$$

haben. Durch Substitution dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen (α), wenn man die $r - 1$ ersten noch mit H multiplicirt, in r Gleichungen, die nur noch die $r - 1$ unabhängigen Variabeln $N_1 \cdots N_{r-1}$ enthalten; die Variable H ist gänzlich verschwunden. Man entscheidet nun in der gewöhnlichen Weise, wie viele gemeinsame Lösungen unsere r linearen Gleichungen besitzen. Haben sie m solche, d. h. sind sämmtliche ausgezeichnete Functionen von nullter Dimension, so verlangt ihre Bestimmung wie gewöhnlich die Operationen m, $m - 1$, $\cdots$ 3, 2, 1. Haben dagegen unsere Gleichungen nur $m - 1$ gemeinsame Lösungen, so findet man dieselben durch die Operationen

$$m - 1,\ \ m - 2,\ \cdots\ 3,\ 2,\ 1.$$

Nachdem man in dieser Weise $m-1$ ausgezeichnete Functionen nullter Dimension bestimmt hat, findet man eine weitere ausgezeichnete Function, die nicht von nullter Dimension ist, durch eine Operation 1.

§ 23.

Kanonische Formen der homogenen Gruppen.

Zuerst beweisen wir einige Hülfssätze. Sodann stellen wir zwei kanonische Formen auf; eine jede homogene Gruppe kann die eine oder die andere dieser beiden Formen annehmen. Der Bequemlichkeit wegen brauche ich im Folgenden immer das Symbol P, um eine homogene Function 1^{ter} Dimension zu bezeichnen.

47. *Satz 61.* Unter den Functionen F einer homogenen Gruppe $N_1 \cdots N_{r-1} P$, welche der Gleichung

$$(N_1 F) = 1$$

genügen, giebt es einige, die von 1^{ter} Dimension sind und also die Form $P \cdot \mathsf{N}(N_1 \cdots N_{r-1})$ besitzen. N_1 darf selbstverständlich keine ausgezeichnete Function sein.

Denn durch Ausführung finden wir

$$(N_1,\ P\mathsf{N}) = (N_1 P)\,\mathsf{N} + (N_1 \mathsf{N})\,P$$

oder

$$(N_1,\ P\mathsf{N}) = (N_1 P)\,\mathsf{N} + \sum_{k=1}^{k=r-1} (N_1 N_k)\,P\,\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k}\,.$$

Hier ist $(N_1 P)$ von nullter Dimension, $(N_1 N_k)$ dagegen von -1^{ter} Dimension, und also auch $(N_1 N_k) P$ von nullter Dimension. Es müssen daher diese Ausdrücke, die bekanntlich Functionen von $N_1 \cdots N_{r-1} P$ sind, die Form haben

$$\begin{aligned}(N_1 P) &= \varphi(N_1 \cdots N_{r-1})\,,\\ (N_1 N_k) P &= f_k(N_1 \cdots N_{r-1})\,.\end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werthe verwandelt sich aber die Gleichung $(N_1, P\mathsf{N}) = 1$ in die folgende:

$$\varphi \cdot \mathsf{N} + \sum_{k=1}^{k=r-1} f_k \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 1\,,$$

welche P gar nicht mehr enthält, und eine lineare partielle Differentialgleichung mit den unabhängigen Variabeln $N_1 \cdots N_{r-1}$ ist. Ist N eine beliebige Lösung derselben, so ist $P \cdot \mathsf{N}$ eine Function 1^{ter} Ordnung unserer Gruppe, welche die Forderungen unseres Satzes erfüllt.

Satz 62. Eine homogene Gruppe von der Form $N_1 \cdots N_{r-1} P$ enthält Functionen nullter Dimension $\mathsf{N}(N_1 \cdots N_{r-1})$, welche die Gleichung

$$(P\,\mathsf{N}) = 1$$

befriedigen, vorausgesetzt natürlich, dass P keine ausgezeichnete Function ist.

Denn man hat

$$(P\mathsf{N}) = \sum_{k=1}^{k=r-1} (PN_k)\frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k}$$

und (PN_k), als eine Function nullter Dimension, muss sich durch $N_1 \cdots N_{r-1}$ allein ausdrücken lassen. Wenn daher

$$(PN_k) = f_k\,(N_1 \cdots N_{r-1})$$

ist, so ist

$$\sum_{k=1}^{k=r-1} f_k \frac{\partial \mathsf{N}}{\partial N_k} = 1$$

eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen N und den unabhängigen Variabeln $N_1 \cdots N_{r-1}$, deren Lösungen unserer Gruppe angehören und in der verlangten Beziehung zu der vorgelegten Function P stehen.

Satz 63. Enthält eine homogene Gruppe $N_1 \cdots N_{r-1} P$ eine zweigliedrige Untergruppe $N_1 P$, so ist auch die $(r-2)$-gliedrige Untergruppe, die mit der zweigliedrigen in Involution liegt (Satz 34.), homogen.

Ist nämlich $H_1 \cdots H_{2n-r}$ die Polargruppe von $N_1 \cdots N_{r-1} P$, so ist bekanntlich

$$H_1 \cdots H_{2n-r} N_1 P$$

eine homogene Gruppe, deren homogene Polargruppe eben die besprochene $(r-2)$-gliedrige Untergruppe ist. Also ist unser Satz bewiesen.

48. *Theorem XX. Eine homogene Gruppe kann immer die Form*

$$X_1 P_1 \cdots X_q P_q\, U_1 \cdots U_m$$

erhalten. Hier sind X_i und P_i Functionen bez. nullter und erster Ordnung, die in den bekannten gegenseitigen Beziehungen stehen. $U_1 \cdots U_m$ sind die ausgezeichneten Functionen der Gruppe, die selbst eine homogene Gruppe bilden.

Beweis. Wenn die gegebene homogene Gruppe $H_1 \cdots H_r$ ein Involutionssystem ist, so hat sie schon unmittelbar die verlangte Form. Ist dies nicht der Fall, so nehme man für X_1 eine Function nullter Ordnung der Gruppe und bestimme nach dem ersten Satze dieses Paragraphen eine Function 1ter Ordnung P_1 der Gruppe aus der Gleichung

$$(X_1 P_1) = 1\,.$$

Sodann bestimme man (vorang. Satz) die homogene $(r-2)$-gliedrige Untergruppe

$$H_1^{(1)} \cdots H_{r-2}^{(1)},$$

die mit $X_1 P_1$ in Involution liegt. Hierdurch erhält die ursprüngliche Gruppe die Form

$$X_1 P_1 H_1^{(1)} \cdots H_{r-2}^{(1)}.$$

Ist $H_1^{(1)} \cdots H_{r-2}^{(1)}$ ein Involutionssystem, so ist die ursprüngliche Gruppe schon auf die verlangte Form gebracht. Ist dies nicht der Fall, so zerlegen wir $H_1^{(1)} \cdots H_{r-2}^{(1)}$ in die beiden, involutorisch gelegenen, homogenen Gruppen $X_2 P_2$ und $H_1^{(2)} \cdots H_{r-4}^{(2)}$, wodurch die ursprüngliche Gruppe die Form

$$X_1 P_1 X_2 P_2 H_1^{(2)} \cdots H_{r-4}^{(2)}$$

annimmt. Ist hier $H_1^{(2)} \cdots H_{r-4}^{(2)}$ ein Involutionssystem, so ist die verlangte Form gefunden. Im entgegengesetzten Falle führen wir eine neue Zerlegung aus u. s. w.

Sind endlich so viele Zerlegungen als möglich, etwa q solche ausgeführt, so hat unsere Gruppe die verlangte Form

$$X_1 P_1 \cdots X_q P_q H_1^{(q)} \cdots H_{r-2q}^{(q)}$$

erhalten. — Hier sind nun noch zwei Fälle denkbar. Entweder sind sämmtliche ausgezeichnete Functionen von nullter Dimension, oder aber es giebt einige ausgezeichnete Functionen, deren Dimension von Null verschieden ist. Also:

Corollar 1. Sind sämmtliche ausgezeichnete Functionen einer homogenen Gruppe von nullter Dimension, so ist

$$X_1 P_1 \cdots X_q P_q X_{q+1} \cdots X_{q+m}$$

die kanonische Form der Gruppe. Hier bezeichnen X_i und P_i Functionen bez. nullter und erster Ordnung, die in den bekannten gegenseitigen Beziehungen stehen.

Corollar 2. Enthält eine homogene Gruppe ausgezeichnete Functionen, die nicht von nullter Ordnung sind, so ist

$$X_1 P_1 \cdots X_q P_q X_{q+1} \cdots X_{q+m-1} P_{q+m},$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$X_1 P_1 \cdots X_q P_q P_{q+1} \cdots P_{q+m}$$

die kanonische Form der Gruppe.

Die Entwickelungen am Schlusse des vorangehenden Paragraphen zeigen, wie man entscheidet, ob eine vorgelegte homogene Gruppe der einen oder der anderen von den besprochenen beiden Kategorien angehört.

§ 24.

Invariante Eigenschaften einer homogenen Gruppe.

Ich werde jetzt beweisen, dass die einzigen Eigenschaften einer homogenen Gruppe, die von der Form derselben unabhängig sind und dabei bei beliebigen homogenen Berührungstransformationen (welche offenbar die vorgelegte Gruppe immer in eine neue *homogene* Gruppe überführen) ungeändert bleiben, sich durch drei ganze positive Zahlen ausdrücken lassen, 1) die Zahl der Glieder, 2) die Zahl der ausgezeichneten Functionen, 3) die Zahl der ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung. — Ich schlage bei dieser Untersuchung einen Weg ein, der demjenigen sehr ähnlich ist, dem ich in § 13., auf den ich verweise, gefolgt bin.

49. Zuerst betrachte ich Gruppen, deren sämmtliche ausgezeichnete Functionen von nullter Dimension sind.

Satz 64. Bilden $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$ eine homogene Gruppe, so giebt es immer solche Functionen P_{q+1}, dass $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_{q+1}$ eine neue kanonische homogene Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfasst.

Denn die Polargruppe von $X_1 \cdots X_q\, X_{q+2} \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$ ist homogen und enthält X_{q+1}, welches keine ausgezeichnete Function ist. Nach dem zweiten Satze des vorangehenden Paragraphen enthält unsere Polargruppe daher Functionen erster Dimension, etwa P_{q+1}, welche

$$(X_{q+1} P_{q+1}) = 1$$

ergeben und somit allen unseren Forderungen genügen.

Satz 65. Bilden $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$ eine homogene Gruppe, so giebt es immer solche Functionen $P_{q+1} \cdots P_{q+m}$, dass $X_1 \cdots X_{q+m}$ $P_1 \cdots P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe ist, welche die ursprüngliche umfasst.

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus der m-maligen Anwendung des vorhergehenden.

Satz 66. Bilden $X_1 \cdots X_q\, P_1 \cdots P_q$ eine homogene Gruppe und ist $q < n$, so giebt es immer eine Function nullter Dimension X_{q+1}, die mit unserer Gruppe in Involution liegt. Alsdann ist $X_1 \cdots X_{q+1}$ $P_1 \cdots P_q$ eine neue kanonische Gruppe, welche die vorgelegte Gruppe umfasst.

Denn die Polargruppe von $X_1 \cdots X_q\, P_1 \cdots P_q$ ist homogen und besteht aus wenigstens 2 Gliedern. Sie enthält daher wenigstens eine Function nullter Ordnung, die unseren Forderungen genügt.

Satz 67. Ist $X_1 \cdots X_{q+m}\, P_1 \cdots P_q$ eine homogene Gruppe, so giebt es immer solche weitere Functionen X und P, bez. nullter und

erster Ordnung, dass $X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n$ eine kanonische homogene Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfasst.

Dieser Satz folgt als Corollar aus den vorangehenden.

Theorem XXI. Besitzen zwei homogene Gruppen, deren ausgezeichnete Functionen sämmtlich von nullter Ordnung sind, gleich viele Glieder und gleich viele ausgezeichnete Functionen, so giebt es immer homogene Berührungstransformationen, welche die eine Gruppe in die andere überführen.

Beweis. Es seien die Glieder der einen Gruppe Functionen von $x_1 \cdots p_n$, die der anderen Functionen von $x_1' \cdots p_n'$. Nach den gemachten Voraussetzungen können die beiden Gruppen resp. die kanonischen Formen erhalten

$$X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_q,$$
$$X_1' \cdots X_{q+m}' P_1' \cdots P_q',$$

wo natürlich die X, P Functionen von den xp und die X', P' Functionen der $x'p'$ sind.

Nach dem vorangehenden Satze giebt es nun immer solche weitere Functionen X, P resp. X', P', dass

$$X_1 \cdots X_n P_1 \cdots P_n \text{ und } X_1' \cdots X_n' P_1' \cdots P_n'$$

wiederum kanonische homogene Gruppen bilden.

Nach Theorem X. (Beweis) bestimmen daher die $2n$ Gleichungen

$$X_i = X_i', \quad P_i = P_i'$$

eine Berührungstransformation. Diese führt aber die eine Gruppe in die andere über; sie ist überdies homogen, also ist der Satz erwiesen.

50. Wir wenden uns nun zu homogenen Gruppen mit ausgezeichneten Functionen, die nicht sämmtlich von nullter Ordnung sind.

Satz 68. Bilden $X_1 \cdots X_q P_1 \cdots P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe, so giebt es immer solche Functionen X_{q+1}, dass $X_1 \cdots X_{q+1} P_1 \cdots P_{q+m}$ wiederum eine kanonische homogene Gruppe ist, welche die vorgelegte umfasst.

Denn die Polargruppe von $X_1 \cdots X_q P_1 \cdots P_q P_{q+2} \cdots P_{q+m}$ ist homogen und enthält P_{q+1}, welches keine ausgezeichnete Function derselben ist. Daher enthält diese Gruppe (Satz 62.) Functionen nullter Ordnung X_{q+1}, welche

$$(P_{q+1} X_{q+1}) = 1$$

ergeben und also unseren Forderungen genügen.

Satz 69. Ist $X_1 \cdots X_q P_1 \cdots P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe, so giebt es solche Functionen $X_{q+1} \cdots X_{q+m}$, dass $X_1 \cdots X_{q+m} P_1 \cdots P_{q+m}$ eine homogene kanonische Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfasst.

Dieser Satz entspringt unmittelbar aus der m-maligen Anwendung des vorhergehenden.

Satz 70. Bilden $X_1 \cdots X_q\, P_1 \cdots P_{q+m}$ eine kanonische homogene Gruppe, so giebt es solche weitere Functionen X und P, dass $X_1 \cdots X_n\, P_1 \cdots P_n$ eine kanonische homogene Gruppe bilden, welche die vorgelegte umfasst.

Dieser Satz folgt durch successive Anwendung der vorhergehenden Sätze dieses Paragraphen.

Theorem XXII. Besitzen zwei homogene Gruppen, deren ausgezeichnete Functionen nicht sämmtlich von nullter Ordnung sind, gleich viele Glieder und gleich viele ausgezeichnete Functionen, so giebt es immer homogene Berührungstransformationen, welche die eine Gruppe in die andere überführen.

Denn nach unseren Voraussetzungen können unsere Gruppen bez. die beiden kanonischen Formen

$$X_1 \cdots X_q\, P_1 \cdots P_{q+m} \text{ und } X_1' \cdots X_q'\, P_1' \cdots P_{q+m}'$$

erhalten, wobei alle XP Functionen von $x_1 \cdots p_n$, alle $X'P'$ Functionen von $x_1' \cdots p_n'$ sind. Alsdann giebt es solche weitere Functionen X, P und X', P', dass auch

$$X_1 \cdots X_n\, P_1 \cdots P_n \text{ und } X_1' \cdots X_n'\, P_1' \cdots P_n'$$

kanonische homogene Gruppen sind. Also definiren die $2n$ Gleichungen

$$X_i = X_i', \quad P_i = P_i'$$

wiederum eine homogene Berührungstransformation, welche die eine der beiden Gruppen in die andere überführt.

Corollar. Die einzigen Eigenschaften einer homogenen Gruppe, die von der Form der Gruppe unabhängig sind und bei beliebigen homogenen Berührungstransformationen ungeändert bleiben, sind 1) *die Zahl der Glieder* r, 2) *die Zahl der ausgezeichneten Functionen* m, 3) *die Zahl der ausgezeichneten Functionen nullter Dimension, welche entweder gleich* m *oder* $m-1$ *sein muss. Hier ist* r *eine ganze positive Zahl, die nicht grösser als* $2n$ *sein kann; wir haben ferner in dem vorangehenden Abschnitte gefunden, dass* $r-m$ *eine positive gerade Zahl sein muss, und endlich, dass* $r+m$ *höchstens gleich* $2n$ *ist.*

---

51. Es hat nun gar keine Schwierigkeiten, die Theorien der Paragraphen 14., 15. und 16. auf homogene Functionen und homogene Berührungstransformationen auszudehnen.

Es zeigt sich, dass die invarianten Beziehungen zwischen einer homogenen Gruppe und einer homogenen Untergruppe vollständig durch

acht Zahlen bestimmt sind. Die sechs ersten definiren die individuellen invarianten Eigenschaften jeder der beiden homogenen Gruppen. Die zwei letzten sind die Zahl ϖ der gemeinsamen ausgezeichneten Functionen, und die Zahl ϖ oder $\varpi - 1$ der gemeinsamen ausgezeichneten Functionen nullter Ordnung.

Soll man ein Involutionssystem aus einer homogenen Gruppe ausscheiden, so ist es immer möglich, eine Erniedrigung in der Ordnung der nothwendigen Integrationen zu erreichen.

Soll man entscheiden, ob r gegebene homogene Functionen $H_1 \cdots H_r$ durch eine homogene Berührungstransformation bez. in $H_1' \cdots H_r'$ sich überführen lassen, so kann man immer (§ 16.) voraussetzen, dass alle H_i und ebenso alle H_i' von einander unabhängig sind. Eine erste Forderung ist, dass die entsprechenden Functionen der beiden Systeme von derselben Ordnung sind. Ist diese Forderung erfüllt, so bestimmt man wie in § 16. die beiden durch unsere Functionen bestimmten Gruppen

$$H_1 \cdots H_r \cdots H_\alpha \text{ und } H_1' \cdots H_r' \cdots H_{\alpha'}'.$$

Hier muss α' gleich α sein und ferner muss sich jedes $(H_i' H_k')$ in derselben Weise durch die H_i', wie das entsprechende $(H_i H_k)$ durch die H_i ausdrücken lassen. Sind alle diese Forderungen erfüllt, so sieht man wie damals ein, dass die verlangte Transformation möglich ist; und zwar wird dieselbe offenbar eine *homogene* Transformation.

Hiermit sind alle zwischen $H_1 \cdots H_r$ stattfindenden Beziehungen bestimmt, die bei beliebigen homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben.

§ 25.

Integrationserniedrigungen, die sich auf die vorhergehenden Entwickelungen stützen.

Die vorangehenden Theorien zeigen, wie man die bei der Integration einer partiellen Differentialgleichung

$$F(z x_1 \cdots x_{n-1} p_1 \cdots p_{n-1}) = 0$$

eintretenden Umstände am vortheilhaftesten ausnutzen kann. Indem ich insbesondere auf § 17., 18. und 19. verweise, kann ich mich auf das Folgende beschränken.

52. Ich setze voraus, dass ein Involutionssystem nullter Ordnung

$$N_1 = C_1, \cdots N_q = C_q$$

integrirt werden soll, und dass man eine Anzahl homogene Functionen $H_1 \cdots H_r$ kennt, welche allen Gleichungen $(N_i H_k) = 0$ genügen. Ist es unmöglich, vermöge des Poisson-Jacobi'schen Theorems weitere

Functionen H zu bestimmen, so bilden $N_1 \cdots N_q H_1 \cdots H_r$ eine homogene Gruppe. Wir betrachten nun zuerst den Fall, dass diese Gruppe ausgezeichnete Functionen enthält, die nicht von nullter Dimension sind; sodann den Fall, dass sämmtliche ausgezeichnete Functionen von nullter Ordnung sind.

A. Enthält die Gruppe $N_1 \cdots N_q H_1 \cdots H_r$ ausser $N_1 \cdots N_q$ m ausgezeichnete Functionen

$$N_{q+1} \cdots N_{q+m-1} H,$$

die nicht sämmtlich von nullter Ordnung sind, so bestimmt man dieselben (Satz 60.) vermöge der Operationen

$$m-1,\ m-2,\ \cdots 3,\ 2,\ 1,\ 1.$$

Hinterher behandelt man das Involutionssystem

$$N_1 = C_1,\ \cdots\ N_{q+m-1} = C_{q+m-1},\quad H = C$$

nach den in Nr. 38. gegebenen allgemeinen Regeln.

B. Enthält die Gruppe $N_1 \cdots N_q H_1 \cdots H_r$ ausser $N_1 \cdots N_q$ noch m ausgezeichnete Functionen, die sämmtlich von der nullten Ordnung sind:

$$N_{q+1} \cdots N_{q+m},$$

so bestimmt man dieselben vermöge der Operationen

$$m,\ m-1,\ \cdots 3,\ 2,\ 1.$$

Hinterher stellt sich die Aufgabe, das Involutionssystem nullter Ordnung

$$N_1 = C_1,\ \cdots\ N_{q+m} = C_{q+m}$$

mit $r-m$ homogenen Lösungen $H_1 \cdots H_{r-m}$ der $q+m$ Gleichungen $(N_k H) = 0$ in möglichst einfacher Weise zu integriren. Zu diesem Zwecke stellt man die Gleichungen auf:

$$(A)\quad (N_1 N) = 0, \cdots (N_{q+m} N) = 0,\ (H_1 N) = 0, \cdots (H_{r-m} N) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial N}{\partial p_k} = 0,$$

die ein vollständiges System bilden müssen. Bestände nämlich die Polargruppe der Gruppe

$$N_1 \cdots N_{q+m} H_1 \cdots H_{r-m}$$

nur aus Functionen nullter Ordnung, so wäre diese Polargruppe mit dem Inbegriffe der ausgezeichneten Functionen $N_1 \cdots N_{q+m}$ identisch. Dann aber wäre die Integration unseres Involutionssystems (Theorem XIII.) schon als geleistet zu betrachten; diesen Fall brauchen wir also nicht zu berücksichtigen. Von dem vollständigen Systeme (A) kennt man nun $m+q$ Lösungen $N_1 \cdots N_{q+m}$; also findet man eine weitere Lösung N_{q+m+1} vermöge einer Operation

$$2n - 2q - r - m - 1.$$

Hiermit ist Alles zurückgeführt auf die Integration des Involutionssystems

$$N_1 = C_1 , \cdots N_{q+m+1} = C_{q+m+1}$$

mit $r - m$ Lösungen $H_1 \cdots H_{r-m}$ des Systems $(N_i H) = 0$. Man geht nun in entsprechender Weise weiter und bestimmt eine Function N_{q+m+2} vermöge einer Operation

$$2n - 2q - r - m - 3$$

u. s. w. und endlich eine letzte Function N vermöge einer Operation 1.

Hiermit ist nach meinen früheren Entwickelungen (Theorem XIII.) das Integrationsgeschäft abgeschlossen.

§ 26.

Vervollständigung der Theorie des Poisson-Jacobi'schen Theorems.

Das Poisson-Jacobi'sche Theorem ist einer Vervollständigung fähig, die ich jetzt geben werde. Zunächst betrachte ich beliebige Functionen von $x_1 \cdots p_n$, sodann homogene Functionen von xp.

53. Sind φ_1 und φ_2 Lösungen der Gleichung

$$(f\varphi) = 0 ,$$

so sagt das Poisson-Jacobi'sche Theorem aus, dass auch $(\varphi_1 \varphi_2)$ eine solche Lösung ist.

Es existiren mehrere verwandte Theoreme, von denen ich hier das folgende, von Laurent herrührende anführe:

Sind $\varphi = \varphi_1, \cdots \varphi_k, \psi_1, \cdots \psi_k$ irgend $2k$ Lösungen der Gleichung $(f\varphi) = 0$, so ist immer auch

$$\sum_{\lambda_1 \cdots \lambda_k} \sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{\lambda_k}} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{\lambda_1}} \cdots \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{\lambda_k}}$$

eine solche.

Mayer machte mich gelegentlich auf diesen Satz aufmerksam und bemerkte dabei, dass derselbe wahrscheinlicher Weise nur solche Lösungen geben würde, die man auch durch successive Anwendung des Poisson-Jacobi'schen Theorems erhalten könnte. Als Antwort konnte ich ihm die Theorie dieser Nummer mittheilen.

Satz 71. Genügen alle gemeinsamen Lösungen F der Gleichungen

$$(\Phi_1 F) = 0 , \cdots (\Phi_q F) = 0$$

gleichzeitig auch der Gleichung

$$(\Pi F) = 0 ,$$

so gehört Π der durch $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ bestimmten Gruppe $\Phi_1 \cdots \Phi_q \cdots \Phi_r$ an.

Denn die gemeinsamen Lösungen der gegebenen q Gleichungen sind die Lösungen des vollständigen Systems

$$(\Phi_1 F) = 0 , \cdots (\Phi_r F) = 0 .$$

Bezeichnet man dieselben durch $F_1 \cdots F_{2n-r}$, so muss

$$(\Pi F_1) = 0 , \cdots (\Pi F_{2n-r}) = 0$$

sein, das heisst Π muss der Polargruppe von $F_1 \cdots F_{2n-r}$ angehören. Diese Polargruppe ist aber eben $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ selbst.

Hieraus ergiebt sich sogleich das nachstehende bemerkenswerthe Theorem.

Theorem XXIII. Kennt man irgend q Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ der Gleichung

$$(F\Phi) = 0$$

und findet man aus diesen Lösungen durch irgend welche Operationen, die ganz unabhängig sind von der Form der Function F, eine weitere Lösung Π, so gehört Π stets der durch $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ bestimmten Gruppe an.

54. Dieses Theorem bleibt nicht mehr richtig, wenn die Function F gewissen Beschränkungen unterworfen ist. Ich werde den wichtigen Fall, dass F eine homogene Function ist, betrachten und für denselben eine entsprechende Theorie entwickeln.

Wir haben früher gesehen (Satz 54.), dass eine jede homogene Gruppe, die eine Function Φ enthält, zugleich die Function

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}$$

enthalten muss, und (Satz 55.), dass umgekehrt eine Gruppe $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ homogen ist, wenn jedes

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_k}$$

sich durch die Φ ausdrücken lässt. Folglich kann ich über die durch eine gegebene Function bestimmte homogene Gruppe, und ebenso über die durch mehrere gegebene Functionen bestimmte homogene Gruppe sprechen.

Satz 72. Sei F eine homogene Function, Φ irgend eine Function, welche zu jener in der Beziehung

$$(F\Phi) = 0$$

steht, und endlich $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ die durch Φ bestimmte homogene Gruppe. Alsdann gelten sämmtliche Gleichungen $(F\Phi_k) = 0$.

Dieser Satz ist eine Consequenz eines früheren (Satz 58.), dass nämlich die Gleichung

$$(F\Phi) = 0$$

die folgende

$$\left(F, \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial \Phi}{\partial p_k}\right) = 0$$

nach sich zieht, in Verbindung mit dem Poisson-Jacobi'schen Satze.

Satz 73. Sei F eine homogene Function und $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ gegebene Functionen, deren jede mit F in Involution liegt, d. h. $(F\Phi_k) = 0$ ergiebt. Bezeichnet dann $\Phi_1 \cdots \Phi_q \cdots \Phi_r$ die durch $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ bestimmte homogene Gruppe, so stehen auch die neuen Functionen Φ in Involutionsbeziehung zu F.

Dieser Satz ist eine Consequenz vom vorangehenden in Verbindung mit dem Poisson-Jacobi'schen Theorem.

Satz 74. Genügen alle gemeinsamen *homogenen* Lösungen F der Gleichungen

$$(\Phi_1 F) = 0, \cdots (\Phi_q F) = 0$$

zugleich der Relation

$$(\Pi F) = 0,$$

so gehört Π der durch $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ bestimmten homogenen Gruppe $\Phi_1 \cdots \Phi_q \cdots \Phi_r$ an.

Denn die gemeinsamen homogenen Lösungen F der gegebenen q Gleichungen sind die homogenen Lösungen des vollständigen Systems

$$(\Phi_1 F) = 0, \cdots (\Phi_r F) = 0.$$

Es giebt $2n - r$ solche Lösungen $F_1 \cdots F_{2n-r}$, welche eben die Polargruppe von $\Phi_1 \cdots \Phi_r$ bilden. Also genügt Π den Gleichungen

$$(\Pi F_1) = 0, \cdots (\Pi F_{2n-r}) = 0,$$

das heisst Π muss der Polargruppe von $F_1 \cdots F_{2n-r}$ angehören. Diese Polargruppe ist aber eben $\Phi_1 \cdots \Phi_r$.

Also haben wir den Satz:

Theorem XXIV. Kennt man irgend q Lösungen $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ der Gleichung

$$(F\Phi) = 0,$$

in welcher F eine homogene Function bezeichnet, und findet man durch irgend welche Operationen, die von der Form der homogenen Function F unabhängig sind, eine weitere Lösung Π, so gehört Π der durch $\Phi_1 \cdots \Phi_q$ bestimmten homogenen Gruppe an.

Endlich könnte man eine entsprechende Theorie für den Fall entwickeln, dass F homogen von nullter Ordnung ist. Hierdurch würde man einige bemerkenswerthe Resultate erhalten. Man würde nämlich a priori die Möglichkeit einiger Integrationsvereinfachungen einsehen, die ich in § 25. in anderer Weisse erreicht habe.

Indem ich schliesse, stelle ich ein allgemeines Problem:

Seien $H_1 \cdots H_\alpha$ homogene Functionen erster Dimension, die in solchen gegenseitigen Beziehungen stehen, dass jedes $(H_i H_k)$ sich als lineare Function mit constanten Coefficienten der H ausdrückt:

$$(H_i H_k) = \sum_{\omega=1}^{\omega=\alpha} C_\omega^{ik} H_\omega .$$

Alsdann sage ich, dass alle H eine *Transformationsgruppe* bilden, und betrachte dabei alle lineare Functionen der H von der Form

$$d_1 H_1 + d_2 H_2 + \cdots d_\alpha H_\alpha$$

als mit den H selbst gleichberechtigt. Ich frage nun nach den Eigenschaften einer gegebenen Transformationsgruppe, die bei homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben. Ich habe gefunden, dass es eine *begrenzte Zahl* Typen von Transformationsgruppen giebt. Es muss späteren Arbeiten vorbehalten werden, den präcisen Sinn, die Richtigkeit und Bedeutung dieser Behauptung darzulegen.

Christiania, 5. Juli 1874.

Directe Begründung der Theorie der Berührungstransformationen.

Zusatz zu der vorhergehenden Abhandlung.

Von A. Mayer in Leipzig.

In dem vorangehenden Aufsatze begründet Lie die Theorie der Berührungstransformationen in der Weise, dass er die Aufgabe, alle Berührungstransformationen zu bestimmen, als einen speciellen Fall des Pfaff'schen Problems auffasst und auf dieselbe die Resultate anwendet, die Clebsch für das letztere Problem gewonnen hat. Man kann aber auch ohne allzugrossen Rechnungsaufwand die genannte Aufgabe ganz direct angreifen, und bei ihrer fundamentalen Wichtigkeit hat dieselbe gewissermassen ein Anrecht auf eine solche selbstständige Behandlung. Aus diesem Grunde und weil hierdurch die Lie'schen Untersuchungen auch demjenigen zugänglich werden, der sich noch nicht näher mit dem Pfaff'schen Probleme beschäftigt hat, lasse ich hier diejenige directe Ableitung der Fundamentalformeln aus der Theorie der Berührungstransformationen folgen, die ich bereits in den Göttinger Nachrichten 1874, S. 317, mitgetheilt habe und auf die sich Lie am Ende der Einleitung und im Eingange zum ersten Abschnitte bezieht.

Ich schicke zunächst, um später den Gang der Untersuchung nicht durch Nebenbetrachtungen aufzuhalten, einen Hülfssatz über Functionaldeterminanten voraus:

Es seien $X_0, X_1, \cdots X_n$ Functionen der $n + 1 + h$ Variabeln $x_0, x_1, \cdots x_{n+h}$ und allgemein:

$$a_i^k = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}.$$

Wenn dann sämmtliche Determinanten der Form:

$$(0 k_1 \cdots k_n) = \sum \pm a_0^0 a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$$

verschwinden, in denen $k_1, \cdots k_n$ irgend n von den Zahlen $1, 2, \cdots n + h$ bezeichnen, so verschwinden, vorausgesetzt, dass nicht jede

der $n+1$ Functionen X frei von x_0 ist, überhaupt alle Determinanten von der Form:

$$(k_0 k_1 \cdots k_n) = \sum \pm a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n},$$

in denen $k_0, k_1, \cdots k_n$ beliebige $n+1$ der Zahlen $0, 1, \cdots n+h$ sind, und die Functionen $X_0, X_1, \cdots X_{n+h}$ sind daher nicht unabhängig von einander.

Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach. Bezeichnet man nämlich durch A die Determinante:

$$A = \sum \pm a_{n+1}^0 a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n},$$

in der $a_{n+1}^0, a_{n+1}^{k_0}, \cdots a_{n+1}^{k_1}$ beliebige neue Elemente sind, so ist nach den gemachten Voraussetzungen:

$$\frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^{k_0}} = \frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^{k_1}} = \cdots = \frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^{k_n}} = 0,$$

während die Grössen $a_0^0, a_1^0, \cdots a_n^0$ nicht sämmtlich Null sind. Aus den Identitäten:

$$0 = a_i^0 \frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^0} + a_i^{k_0} \frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^{k_0}} + \cdots a_i^{k_n} \frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^{k_n}},$$

in denen $i = 0, 1, \cdots n$ ist, ergiebt sich daher sofort:

$$0 = \frac{\partial A}{\partial a_{n+1}^0} = (k_0 k_1 \cdots k_n);$$

was eben zu beweisen war. —

Das allgemeine Problem der Berührungstransformationen nun, zu dessen Lösung ich mich jetzt direct wende, besteht nach der Lie'schen Definition in Folgendem:

Man soll die $2n+1$ *Grössen* $Z, X_1, \cdots X_n, P_1, \cdots P_n$ *als Functionen der* $2n+1$ *unabhängigen Variabeln* $z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n$ *so bestimmen, dass identisch*

$$dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \varrho (dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

wird, wo ϱ *irgend eine Function jener Variabeln ist.*

Diese Forderung zerfällt unmittelbar in die $2n+1$ Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z} = \varrho,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = -\varrho p_k,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0 . \tag{3}$$

Bezeichnet man aber zur Abkürzung durch das Zeichen

$$\frac{d}{dx_k} \text{ die Operationen } \frac{\partial}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial}{\partial z},$$

so lassen sich nach (1) die Gleichungen (2) durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{dZ}{dx_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{dX_i}{dx_k} = 0 .$$

Das vorgelegte Problem wird also gelöst durch die $2n$ Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} A_k &= \frac{dZ}{dx_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{dX_i}{dx_k} = 0, \\ B_k &= \frac{\partial Z}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0 , \end{aligned} \right. \tag{4}$$

in Verbindung mit der Gleichung (1).

Nun gelten, wenn man unter f eine beliebige Function von z, $x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n$ versteht, identisch die Relationen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_k}\frac{df}{dx_h} - \frac{d}{dx_h}\frac{df}{dx_k} &= 0 , \\ \frac{\partial}{\partial p_h}\frac{df}{dx_k} - \frac{d}{dx_k}\frac{\partial f}{\partial p_h} &= \frac{\partial p_k}{\partial p_h} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial p_h}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial p_h} &= 0 \end{aligned}$$

und durch Anwendung derselben ergeben sich unter Benutzung der Gleichung (1) aus den Gleichungen (4) sofort die folgenden Bedingungen für die Functionen X und P:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dP_i}{dx_h}\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dP_i}{dx_k}\frac{dX_i}{dx_h} \right) &= 0 , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_h}\frac{dX_i}{dx_k} - \frac{dP_i}{dx_k}\frac{\partial X_i}{\partial p_h} \right) &= \varrho \frac{\partial p_k}{\partial p_h}, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_h}\frac{\partial X_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial X_i}{\partial p_h} \right) &= 0 . \end{aligned} \right. \tag{a}$$

Mit Hülfe dieser Relationen erhält man aber aus den $2n$ linearen Gleichungen:

$$\text{(b)}\qquad \begin{cases} u_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{dX_i}{dx_k} y_k + \frac{\partial X_i}{\partial p_k} z_k \right), \\ v_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{dP_i}{dx_k} y_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} z_k \right) \end{cases}$$

sofort die folgenden $2n$:

$$\text{(c)}\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} \left(u_i \frac{\partial P_i}{\partial p_h} - v_i \frac{\partial X_i}{\partial p_h} \right) = \varrho y_h , \\ \sum_{i=1}^{i=n} \left(u_i \frac{dP_i}{dx_h} - v_i \frac{dX_i}{dx_h} \right) = -\varrho z_h . \end{cases}$$

Die Gleichungen (a) lassen sich also auffassen als die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (c) die Auflösungen seien der Gleichungen (b). Daraus erhellt unmittelbar, erstens dass die Determinante:

$$\text{(5)}\qquad R = \sum \pm \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial p_n}$$

nur mit ϱ zugleich verschwinden kann, und also, da ϱ, in Folge der Natur unseres Problems, nicht identisch verschwinden kann, nothwendig verschieden von Null sein muss, und zweitens, dass man die Gleichungen (a) ersetzen kann durch die folgenden:

$$\text{(6)}\qquad \begin{cases} [X_i X_\lambda] = [X_\lambda P_i] = [P_i P_\lambda] = 0 , \\ [P_\lambda X_\lambda] = \varrho , \end{cases}$$

wo allgemein das Symbol $[F\Phi]$ den Ausdruck bezeichnet:

$$[F\Phi] = \sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_h} \frac{d\Phi}{dx_h} - \frac{dF}{dx_h} \frac{\partial \Phi}{\partial p_h} \right).$$

In Folge der Bedingungen (6) aber gelten für die durch (4) definirten Ausdrücke A_k und B_k die identischen Relationen:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(B_k \frac{dX_\lambda}{dx_k} - A_k \frac{\partial X_\lambda}{\partial p_k} \right) = [Z X_\lambda] ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(B_k \frac{dP_\lambda}{dx_k} - A_k \frac{\partial P_\lambda}{\partial p_k} \right) = [Z P_\lambda] + \varrho P_\lambda .$$

Wegen der oben bewiesenen Eigenschaft der Determinante R lassen sich daher die $2n$ Gleichungen (4) ersetzen durch die folgenden $2n$:

$$[Z X_\lambda] = 0 , \quad [Z P_\lambda] = -\varrho P_\lambda$$

und wir erhalten somit den Satz, den Lie ohne Beweis angiebt:

I. *Damit identisch*

$$dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

werde, ist es nothwendig und hinreichend, dass

$$(7) \qquad \begin{cases} [ZX_\lambda] = [X_i X_\lambda] = [X_\lambda P_i] = [P_i P_\lambda] = 0\,, \\ [P_\lambda X_\lambda] = \varrho\,, \quad [ZP_\lambda] = -\varrho P_\lambda \end{cases}$$

sei, wo

$$\varrho = \frac{\partial Z}{\partial z} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial z}$$

*ist**).

Man sieht ferner leicht

II. *dass diejenigen Functionen* $Z, X_1, \cdots X_n, P_1, \cdots P_n$, *welche das betrachtete Problem lösen, von einander unabhängig sind.*

Die Functionaldeterminante

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x_n} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial p_n}$$

nämlich lässt sich so schreiben:

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial p_n}.$$

Setzt man aber hierin für die Elemente:

$$\frac{\partial Z}{\partial z}, \frac{dZ}{dx_1}, \cdots \frac{dZ}{dx_n}, \frac{\partial Z}{\partial p_1}, \cdots \frac{\partial Z}{\partial p_n}$$

ihre Werthe aus den Gleichungen (1) und (4) ein, so erhält man sofort

$$\Delta = \varrho R\,,$$

was nach dem Vorhergehenden die obige Behauptung beweist.

Auf der andern Seite ist stets:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(B_k \frac{dZ}{dx_k} - A_k \frac{\partial Z}{\partial p_k} \right) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i [ZX_i]\,,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(B_k \frac{dX_\lambda}{dx_k} - A_k \frac{\partial X_\lambda}{\partial p_k} \right) = [ZX_\lambda] + \sum_{i=1}^{i=n} P_i [X_\lambda X_i].$$

Sobald man also $n+1$ Functionen $Z, X_1, \cdots X_n$ gefunden hat, welche die $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen

$$(8) \qquad [ZX_\lambda] = 0\,, \quad [X_\lambda X_i] = 0$$

erfüllen und für welche überdies nicht alle Determinanten von den Formen:

*) Staz 13. von Lie.

$$\sum \pm \frac{dX_1}{dx_{k_1}} \cdots \frac{dX_i}{dx_{k_i}} \frac{\partial X_{i+1}}{\partial p_{k_{i+1}}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial p_{k_n}},$$

oder:

$$\sum \pm \frac{dZ}{dx_{k_1}} \frac{dX_{\lambda_2}}{dx_{k_2}} \cdots \frac{dX_{\lambda_i}}{dx_{k_i}} \frac{\partial X_{\lambda_{i+1}}}{\partial p_{k_{i+1}}} \cdots \frac{\partial X_{\lambda_n}}{\partial p_{k_n}}$$

Null sind, so ziehen immer n von den $2n$ Gleichungen (4) die n übrigen nach sich.

Nun können jene Determinanten nicht sämmtlich den Werth Null besitzen, sobald irgend eine Determinante der Form:

$$(9) \qquad \sum \pm \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial X_1}{\partial x_{k_1}} \cdots \frac{\partial X_i}{\partial x_{k_i}} \frac{\partial X_{i+1}}{\partial p_{k_{i+1}}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial p_{k_n}}$$

$$= \sum \pm \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{dX_1}{dx_{k_1}} \cdots \frac{dX_i}{dx_{k_i}} \frac{\partial X_{i+1}}{\partial p_{k_{i+1}}} \cdots \frac{\partial X_n}{\partial p_{k_n}}$$

verschieden von Null ist, und es bestimmen dann die n Gleichungen:

$$A_{k_1} = 0, \cdots A_{k_i} = 0, \quad B_{k_{i+1}} = 0, \cdots B_{k_n} = 0$$

in Verbindung mit der Gleichung (1) eindeutig die $n+1$ übrigen Unbekannten des Problems $P_1, \cdots P_n$ und ϱ.

Die Determinanten von der Form (9) selbst aber können nach dem vorausgeschickten Hülfssatze nicht alle identisch verschwinden, sobald $Z, X_1, \cdots X_n$ von einander unabhängige Functionen sind und nicht jede derselben frei von z ist, und diesen Bedingungen müssen die genannten Functionen genügen, wenn sie unser Problem lösen sollen. Denn nach II. müssen sie von einander unabhängig sein und in Folge der Gleichung (1) muss wenigstens eine von ihnen die Variable z enthalten.

Hiermit ist der folgende Satz gewonnen:

III. *Um das Problem*

$$dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k\right)$$

zu lösen, ist es nothwendig und hinreichend, dass man $n+1$ von einander unabhängige Functionen $Z, X_1, \cdots X_n$ der Variabeln $z, x_1, \cdots x_n, p_1 \cdots p_n$ gefunden habe, welche nicht sämmtlich frei von z sind und paarweise den Gleichungen genügen:

$$[ZX_\lambda] = 0, \quad [X_\lambda X_i] = 0.$$

Die noch übrigen $n+1$ Unbekannten $P_1, \cdots P_n$ und ϱ bestimmen sich hierauf eindeutig aus der Gleichung (1) *und aus n von den Gleichungen* (4).

Den Zusatz: *„welche nicht sämmtlich frei von z sind"* kann man aber ganz weglassen, wodurch unser Satz übergeht in das Theorem I.

von Lie. Denn es giebt keine $n+1$ von einander unabhängigen Functionen, welche die Gleichungen (8) erfüllten und frei wären von z. In der That betrachtet man Z, $X_1, \cdots X_n$ als blosse Functionen von $x_1, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_n$ und nimmt an, dass $X_1, \cdots X_n$ paarweise den Bedingungen:

$$[X_i X_i] = 0$$

genügen und von einander unabhängig sind, so bilden die n Gleichungen:

$$[Z X_1] = 0\,, \cdots [Z X_n] = 0$$

ein System von n linearen partiellen Differentialgleichungen für die Function Z, welches nur $2n$ unabhängige Variable enthält und in welchem keine Gleichung eine blosse algebraische Folge der übrigen ist. Dies System kann daher nicht mehr als n unabhängige Lösungen besitzen und diese sind eben X_1, $X_2, \cdots X_n$. —

Aus diesem Lie'schen Satze ergeben sich zwei höchst wichtige Resultate für die partiellen Differentialgleichungen 1. O.

Betrachtet man X_1 als eine beliebig gegebene Function von z, $x_1, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_n$, die Variable z als Function von $x_1, \cdots x_n$ und die Grössen $p_1, \cdots p_n$ als die partiellen Differentialquotienten von z nach $x_1, \cdots x_n$, so wird die Gleichung

$$X_1 = \text{const.} = a_1$$

eine partielle Differentialgleichung 1. O. zwischen der unbekannten Function z und den n unabhängigen Variabeln $x_1, \cdots x_n$.

Nach der Cauchy'schen Methode*) genügt nun zur vollständigen Integration dieser Gleichung die Kenntniss aller Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung mit $2n+1$ unabhängigen Variabeln z, $x_1, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_n$:

$$[X_1 F] = 0\,. \tag{10}$$

Hat man aber n von einander, wie von der gegebenen Function X_1 unabhängige Functionen $X_2, \cdots X_n$, Z gefunden, welche den $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen (8) genügen, so kann man nach dem letzten Satze durch blosse Auflösung linearer Gleichungen n andere Functionen $P_1, \cdots P_n$ finden, durch welche die Gleichung

$$dZ - \sum_{i=1}^{i=n} P_i dX_i = \varrho\,(dz - \sum_{k=1}^{k=n} p_k dx_k)$$

zu einer identischen wird. Da aber nach Satz I., alsdann für $i = 2, 3, \cdots n$

$$[X_1 Z] = [X_1 X_i] = [X_1 P_i] = 0$$

ist, so sieht man mit Rücksicht auf II., dass:

*) Vgl. diese Annalen Bd. III., S. 446.

$$F = X_1, X_2, \cdots X_n, Z, P_2, \cdots P_n$$

die $2n$ unabhängigen Lösungen der Gleichung (10) sind. Man hat daher den Satz*), auf welchen sich die wichtige Verallgemeinerung gründet, die Lie der Jacobi'schen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. gegeben hat**).

IV. Um die gegebene partielle Differentialgleichung 1. O.

$$H_0 (z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n) = a_0$$

vollständig integriren zu können, braucht man nur irgend n von einander, wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \cdots H_n$ der Variabeln $z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n$ gefunden zu haben, welche paarweise den Bedingungen:

$$[H_i H_k] = 0$$

genügen, wobei es durchaus nicht nothwendig ist, dass, wie früher verlangt wurde, die Functionen $H_0, H_1, \cdots H_n$ gerade in Bezug auf $z, p_1, \cdots p_n$ von einander unabhängig seien.

Hat man umgekehrt die partielle Differentialgleichung $H_0 = a_0$ vollständig integrirt, so kann man immer***) auf rein algebraischem Wege n von einander, wie von H_0 unabhängige Functionen $H_1, \cdots H_n$ finden, welche alle Bedingungen

$$[H_i H_k] = 0$$

erfüllen. Nach dem Vorhergehenden bedarf es dann aber nur noch der Auflösung von linearen Gleichungen, um alle $2n$ Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$[H_0 F] = 0$$

zu erhalten. Dies ist aber nichts anderes als eine neue und allgemeinere Form des bekannten Jacobi'schen Satzes:

V. Die Auffindung aller Lösungen F der Charakteristik:

$$[H_0 F] = 0$$

lässt sich zurückführen auf die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung 1. O.

$$H_0 = a_0. \quad -$$

Die wichtigste Classe von Berührungstransformationen ist diejenige, bei welcher in den Functionen $X_1, \cdots X_n, P_1, \cdots P_n$ die Variable z gar nicht vorkommt. Aus dem Vorhergehenden folgt sofort, dass in diesem Falle die Function Z die Form haben muss:

$$Z = Az + \Pi,$$

*) Satz 17. von Lie.

**) § 7. der Lie'schen Abhandlung.

***) Vgl. Nr. 17. der Lie'schen Abhandlung.

wo A eine Constante und Π eine blosse Function von $x_1, \cdots x_n$, $p_1, \cdots p_n$ ist.

In der That, wenn die Functionen X und P die Variable z nicht enthalten, so ist auch

$$\varrho = [P_1 X_1]$$

frei von z, und indem die Gleichung (1) unter der gemachten Annahme sich auf:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \varrho$$

reducirt, ergiebt sich:

$$Z = \varrho z + \Pi .$$

Durch diese Substitution aber werden die Gleichungen (2) und (3):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x_k} z + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = - \varrho p_k ,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial p_k} z + \frac{\partial \Pi}{\partial p_k} - \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{\partial X_i}{\partial p_k} = 0$$

und zeigen daher, da in ihnen die Variable z nur je in dem ersten Gliede vorkommt, dass $\varrho =$ const. sein muss.

Hiermit ist der Zweck dieser Note erreicht, insofern darin nur gezeigt werden sollte, wie man die Theorie der Berührungstransformationen unabhängig von der Theorie des Pfaff'schen Problems darstellen kann.

Ueber eine Erweiterung der Lie'schen Integrationsmethode*).

Von A. Mayer in Leipzig.

Unter der Voraussetzung, dass $H_1, H_2, \cdots H_r$ von einander unabhängige Functionen der $2n$ Variabeln:

$$q_1, \cdots q_n, p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \cdots p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}$$

sind und dass diese Functionen paarweise die Bedingungen:

$$[H_i, H_k] = 0$$

erfüllen, liefert bekanntlich die Lie'sche Methode den Satz:

I. Sind $H_1, H_2, \cdots H_r$ gerade in Bezug auf die Differentialquotienten p von einander unabhängig, so lässt sich die simultane Integration der r partiellen Differentialgleichungen:

$$H_1 = h_1, \; H_2 = h_2, \cdots H_r = h_r \tag{1}$$

zurückführen auf die vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung mit nur noch $n - r + 1$ unabhängigen Variabeln. —

Lassen sich dagegen — immer unter der oben angegebenen Voraussetzung — aus den Gleichungen (1) die Grössen p vollständig eliminiren, so besitzen diese Gleichungen überhaupt keine gemeinsame Lösung und daher kann auch von einer simultanen Integration derselben keine Rede mehr sein. Immerhin aber bilden noch diejenigen von den Gleichungen (1), die von einander unabhängig sind in Betreff der p, für sich ein Jacobi'sches System, und wenn die Lie'sche Methode wirklich dasselbe zu leisten vermag, was seit ihrer Verbesserung durch Lie**) meine Vereinfachung der Jacobi'schen Methode leistet, so muss sich ohne Zuhülfenahme fremder Betrachtungen zeigen lassen, dass man auch in dem letzten Falle jedes in den Gleichungen (1) enthaltene Jacobi'sche System mit Hülfe der übrigen Gleichungen (1) zurückführen kann auf eine einzige partielle Differentialgleichung, die nur noch $n - r + 1$ unabhängige Variable besitzt.

Diesen Nachweis zu liefern und damit der Lie'schen Methode dieselbe Allgemeinheit zu geben, die durch Lie der Jacobi'schen Methode zu Theil geworden ist, ist der Zweck der folgenden Mittheilung***).

*) Vgl. diese Annalen Bd. VI., S. 162.

**) Vgl. S. 240.

***) Eine frühere Note (Göttinger Nachr. 1873, Nr. 11) verfolgt zwar bereits einen ähnlichen Zweck, betrachtet aber nur den speciellen Fall, wo $r - 1$ von den Gleichungen (1) ein Jacobi'sches System bilden.

Der Wunsch, durch dieselbe meinen früheren Aufsatz im VI. Bande dieser Annalen in der Art zu ergänzen, dass beide zusammen so zu sagen ein einheitliches Gesammtbild der Lie'schen Methode gewähren, möge es entschuldigen, wenn ich zum Theil auch bekannte Sachen, wie namentlich den oben angegebenen Satz 1., von Neuem reproducire. —

Neben dem bekannten Zeichen:

$$(F, \Phi) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right)$$

gebrauche ich im Folgenden noch, wenn F und Φ als Functionen anderer Variabeln $q_1', \cdots q_n', p_1' \cdots p_n'$ angesehen werden, die Bezeichnung:

$$(F, \Phi)' = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial q_k'} \frac{\partial \Phi}{\partial p_k'} - \frac{\partial F}{\partial p_k'} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k'} \right).$$

Aus dieser Definition ergiebt sich unmittelbar der Satz:

II. Wenn man in den Functionen F und Φ von

$$q_1, \cdots q_m, q_{m+1}, \cdots q_n, p_1, \cdots p_m, p_{m+1}, \cdots p_n$$

diese Variabeln resp. mit:

$$q_1', \cdots q_m', p_{m+1}', \cdots p_n', -p_1', \cdots -p_m', q_{m+1}', \cdots q_n'$$

vertauscht, so geht (F, Φ) über in $-(F, \Phi)'$. —

Dies vorausgeschickt seien nun $H_1, H_2, \cdots H_m$ Functionen von $q_1, \cdots q_n, p_1, \cdots p_n$, welche paarweise den Bedingungen

$$(H_i, H_k) = 0$$

genügen. Ich nehme an, dass sich aus den m Gleichungen:

$$H_1 = h_1, \; H_2 = h_2, \cdots H_m = h_m, \tag{2}$$

in denen $h_1, h_2, \cdots h_m$ willkührliche Constanten bezeichnen, die Variabeln $p_1, p_2, \cdots p_m$ bestimmen lassen, und bezeichne durch:

$$p_1 = F_1, \; p_2 = F_2, \cdots p_m = F_m \tag{3}$$

die so erhaltenen Werthe, wobei also in den Functionen $F_1, F_2, \cdots F_m$ nur noch die Variabeln $q_1, \cdots q_n, p_{m+1}, \cdots p_n$ vorkommen.

Durch die Substitutionen (3) wird dann mit der Gleichung $H_i = h_i$ zugleich auch die Gleichung:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial H_i}{\partial p_\lambda} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x} = 0$$

identisch erfüllt, sobald man unter x irgend eine der Variabeln $q_1, \cdots q_n, p_{m+1}, \cdots p_n$ versteht. Da aber in dieser Voraussetzung jedes $\frac{\partial p_\lambda}{\partial x} = 0$ ist, so kann man die letztere Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\partial H_i}{\partial x} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial H_i}{\partial p_\lambda} \frac{\partial (F_\lambda - p_\lambda)}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

und in dieser Form erhellt unmittelbar, dass die Gleichung auch für $x = p_1, p_2, \cdots p_m$ noch richtig bleibt. Nun ist der Ausdruck (H_i, H_k) eine lineare homogene Function der Differentialquotienten von H_i. Setzt man daher die aus (4) folgenden Werthe dieser Differentialquotienten ein, so ergiebt sich:

$$(H_i, H_k) = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial H_i}{\partial p_\lambda} (F_\lambda - p_\lambda, H_k),$$

und indem man die Formel (4) auch auf die Differentialquotienten von H_k anwendet, sieht man, dass durch die Substitutionen (3) identisch wird:

$$(H_i, H_k) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial H_i}{\partial p_\lambda} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\partial H_k}{\partial p_\mu} (F_\lambda - p_\lambda, F_\mu - p_\mu).$$

Bedenkt man nun, dass die Determinante:

$$\sum \pm \frac{\partial H_1}{\partial p_1} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial H_m}{\partial p_m},$$

da sie an sich nicht Null ist, auch nicht dadurch verschwinden kann, dass man die in ihr gar nicht vorkommenden Grössen h den gegebenen Functionen H gleichsetzt, so ergiebt sich aus der erhaltenen Formel sofort, wenn man zunächst die m Identitäten:

$$(H_1, H_k) = 0, \cdots (H_m, H_k) = 0$$

anwendet und sodann berücksichtigt, dass dieselben auch für $k = 1, 2, \cdots m$ gelten sollen, dass in Folge unserer Voraussetzungen jedes

$$(F_\lambda - p_\lambda, F_\mu - p_\mu)$$

identisch Null ist. Daraus aber folgt nach Satz IX. meines früheren Aufsatzes, dass die m partiellen Differentialgleichungen (3) und demnach auch die gegebenen (2) sich zurückführen lassen auf eine einzige partielle Differentialgleichung mit nur noch $n - m + 1$ unabhängigen Variabeln, womit der Satz I. bewiesen ist. —

Nehmen wir nun aber an, dass uns irgend $m + s$ unabhängige Functionen $H_1, H_2, \cdots H_{m+s}$ der Variabeln $q_1, \cdots q_n, p_1, \cdots p_n$ vorgelegt seien, welche die Bedingungen:

$$(H_i, H_k) = 0$$

erfüllen, aber so beschaffen sind, dass sich aus den $m+s$ Gleichungen:

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \cdots H_{m+s} = h_{m+s} \tag{5}$$

die Differentialquotienten p ganz eliminiren lassen.

Da der Fall, dass alle $m + s$ Functionen H frei von den p wären, keinen Sinn hat, so will ich annehmen, *dass etwa die m ersten Gleichungen* (5) *sich nach* $p_1, p_2, \cdots p_m$ *auflösen lassen, während durch Substitution dieser Auflösungen die s letzten Gleichungen* (5) *frei werden mögen von allen p.*

In dieser Voraussetzung bilden nach dem Vorhergehenden die Gleichungen:

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \cdots H_m = h_m \tag{2}$$

ein Jacobi'sches System und es fragt sich nun, wie kann man, ohne die Lie'sche Methode zu verlassen, zur Integration dieses Jacobi'schen Systems die s übrigen Gleichungen (5) verwerthen?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zunächst untersuchen, in Bezug auf welche $m+s$ von den $2n$ Variabeln q und p die Functionen $H_1, H_2, \cdots H_{m+s}$ bei unseren Voraussetzungen von einander unabhängig sind.

Bezeichnen wir wieder durch

$$p_1 = F_1, \quad p_2 = F_2, \quad \cdots p_m = F_m \tag{3}$$

die Auflösungen der Gleichungen (2), so wissen wir aus dem Vorhergehenden, dass jedes

$$(F_\lambda - p_\lambda, \; F_\mu - p_\mu) = 0$$

ist. Weiter, wenn unter $\Phi_{m+1}, \cdots \Phi_{m+s}$ die Werthe verstanden werden, welche die Functionen $H_{m+1}, \cdots H_{m+s}$ durch die Substitutionen (3) erhalten, so erfüllen diese Substitutionen für $k = m+1, \cdots m+s$ und $x = q_1, \cdots q_n, \; p_{m+1}, \cdots p_n$ mit der Gleichung $H_k = \Phi_k$ gleichzeitig auch die Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = \frac{\partial H_k}{\partial x} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\partial H_k}{\partial p_\mu} \frac{\partial F_\mu}{\partial x},$$

welche, wenn man ihr die Form giebt:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = \frac{\partial H_k}{\partial x} + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\partial H_k}{\partial p_\mu} \frac{\partial (F_\mu - p_\mu)}{\partial x}$$

auch für $x = p_1, \cdots p_m$ noch Geltung behält. Hiernach und nach (4) wird daher durch die Substitutionen (3) für $i = 1, 2, \cdots m$ und $k = m+1, \cdots m+s$:

$$(H_i, H_k) = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\partial H_i}{\partial p_\lambda} (F_\lambda - p_\lambda, \; \Phi_k) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\partial H_i}{\partial p_\lambda} \frac{\partial H_k}{\partial p_\mu} (F_\lambda - p_\lambda, \; F_\mu - p_\mu),$$

woraus folgt, dass die Identitäten

$$(H_i, H_k) = 0 \text{ und } (F_\lambda - p_\lambda, \; F_\mu - p_\mu) = 0$$

die folgenden nach sich ziehen:

$$(F_\lambda - p_\lambda, \; \Phi_k) = 0 . \tag{6}$$

Nach Voraussetzung sind nun die Functionen $\Phi_{m+1}, \cdots \Phi_{m+s}$, als die Werthe, welche $H_{m+1}, \cdots H_{m+s}$ durch die Substitutionen (3) anneh-

men, frei von allen p und von einander unabhängige Functionen der Variabeln q. Nach (6) ist daher jede derselben eine gemeinsame Lösung der m Gleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_\lambda} - \sum_{h=m+1}^{h=n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial p_h} \frac{\partial \Phi}{\partial q_h} = 0.$$

Daraus folgt aber sofort, dass $\Phi_{m+1}, \cdots \Phi_{m+s}$ von einander unabhängig sind in Bezug auf s von den Variabeln

$$q_{m+1}, \cdots q_n.$$

Denn die Annahme

$$\Phi_{m+s} = \varphi(\Phi_{m+1}, \cdots \Phi_{m+s-1}, q_1, \cdots q_m)$$

würde für $\lambda = 1, 2, \cdots m$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_\lambda} = 0$$

ergeben und folglich der Unabhängigkeit der Functionen $\Phi_{m+1}, \cdots \Phi_{m+s}$ widersprechen.

Hiermit ist der Satz gewonnen:

III. Es seien $H_1, H_2, \cdots H_{m+s}$ von einander unabhängige Functionen der Variabeln $q_1, \cdots q_n, p_1, \cdots p_n$, welche paarweise den Bedingungen

$$(H_i, H_k) = 0$$

genügen. Wenn sich dann aus m von den Gleichungen

$$H_1 = h_1, \; H_2 = h_2, \; \cdots \; H_{m+s} = h_{m+s}$$

die Grössen $p_1, p_2, \cdots p_m$ bestimmen lassen und durch Substitution dieser Werthe die s übrigen Gleichungen frei werden von sämmtlichen Variabeln p, so sind nothwendig die Functionen $H_1, H_2, \cdots H_{m+s}$ unabhängig von einander in Bezug auf $p_1, \cdots p_m$ und in Bezug auf s von den Variabeln $q_{m+1}, \cdots q_n$. —

Um nunmehr zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage zu gelangen, brauchen wir nur noch auf unser Jacobi'sches System (2) den folgenden Satz anzuwenden, der sich als specieller Fall unmittelbar aus dem Satze II. in meiner früheren Abhandlung ergiebt, wenn man dort

$$\varphi = c_m q_m + \cdots c_n q_n$$

nimmt und die Bezeichnung der Variabeln passend abändert:

IV. Wenn die m, nach $p_1, p_2, \cdots p_m$ auflösbaren Gleichungen:

$$H_1 = h_1, \; H_2 = h_2, \; \cdots H_m = h_m, \; \left(p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$$

ein Jacobi'sches System bilden, so gilt dasselbe auch von den m Gleichungen:

$$H_1' = h_1, \; H_2' = h_2, \; \cdots H_m' = h_m, \; \left(p_i' = \frac{\partial V'}{\partial q_i'}\right),$$

in die sich die vorhergehenden verwandeln, wenn man:

$$q_1, \cdots q_m, \; q_{m+1}, \cdots q_n, \; p_1, \cdots p_m, \; p_{m+1}, \cdots p_n$$

resp. mit:

$$q_1', \cdots q_m', \; p_{m+1}', \cdots p_n', \; -p_1', \cdots -p_m', \; q_{m+1}', \cdots q_n'$$

vertauscht, und man kann aus einer beliebigen vollständigen Lösung des letzten Systems durch blosse algebraische Operationen eine vollständige Lösung des ersten erhalten. —

Die Functionen $H_1', H_2', \cdots H_{m+s}'$ nämlich, die aus unseren Functionen $H_1, H_2, \cdots H_{m+s}$ durch die angegebene Vertauschung entstehen, sind nach Satz III. unabhängig von einander in Bezug auf die Differentialquotienten p'. Wegen der Identitäten $(H_i, H_k) = 0$ ist überdies nach Satz II. auch jedes $(H_i', H_k')' = 0$. Nach Satz I. bilden daher die $m + s$ Gleichungen:

$$H_1' = h_1, \; H_2' = h_2, \; \cdots \; H_{m+s}' = h_{m+s}$$

ein Jacobi'sches System, dessen Integration sich auf die vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung mit nur noch $n - m - s + 1$ unabhängigen Variabeln zurückführen lässt. Jede vollständige Lösung dieses Jacobi'schen Systems ist aber zu gleicher Zeit auch eine vollständige Lösung des Systems:

$$H_1' = h_1, \; H_2' = h_2, \; \cdots \; H_m' = h_m$$

und auf das letztere ist eben durch Satz IV. das vorgelegte System (2) zurückgeführt worden.

Wir erhalten somit als Endresultat das Theorem:

Um das gegebene Jacobi'sche System von m partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln:

$$H_i(q_1, \cdots q_n, \; p_1, \cdots p_n) = h_i, \qquad i = 1, 2, \cdots m$$

auf eine einzige partielle Differentialgleichung mit nur noch $n - m - s + 1$ unabhängigen Variabeln zurückführen zu können, genügt es, irgend s von einander, wie von $H_1, \cdots H_m$ unabhängige Functionen $H_{m+1}, \cdots H_{m+s}$ der Variabeln q und p gefunden zu haben, welche alle Gleichungen $(H_i, H_k) = 0$ erfüllen.

Will man diesen Satz auf den wichtigsten Fall einer einzigen partiellen Differentialgleichung anwenden, so braucht man nur $m = 1$ zu nehmen. Setzt man überdies noch $s = n - 1$, so erhält man den Satz von Lie:

Die vollständige Integration der gegebenen partiellen Differentialgleichung

$$H_1(q_1, \cdots q_n, \; p_1, \cdots p_n) = h_1$$

erfordert stets nur noch eine Quadratur, sobald man irgend $n - 1$ von einander, wie von H_1 unabhängige Functionen $H_2, \cdots H_n$ gefunden hat, welche den Forderungen $(H_i, H_k) = 0$ genügen.

Untersuchungen im Gebiete des logarithmischen Potentiales*).

Von Meutzner in Meissen.

§ 1.

Hauptaufgabe; Ueberblick der Lösungsmethoden.

Das Problem, welches den Hauptgegenstand des Folgenden bildet und welches sich dahin aussprechen lässt:

> Eine Function der beiden rechtwinkligen Coordinaten zu ermitteln, welche im Innern einer gegebenen Ellipsenfläche die bekannten Eigenschaften des logarithmischen Potentiales besitzt und am Rande der Fläche vorgeschriebene Werthe hat,

dies Problem ist nur ein Specialfall des allgemeineren:

> Eine Function Φ der rechtwinkligen Coordinaten x, y zu ermitteln, welche erstens innerhalb einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ durchaus der Gleichung genügt:
>
> $$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0\,,$$
>
> welche zweitens sammt den Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ innerhalb der gegebenen Fläche überall eindeutig und stetig ist, und welche drittens endlich am Rande der Fläche $\mathfrak{A}$, d. i. auf der Begrenzungscurve derselben vorgeschriebene Werthe $\Phi = f$ besitzt.

Zur Lösung dieser Aufgabe bieten sich im Allgemeinen vier verschiedene Wege dar, die im Nachstehenden kürzlich charakterisirt werden sollen.

Die erste Methode geht unmittelbar auf die Lösung des gestellten Problemes los; sie sucht nämlich allgemeine Functionen ausfindig zu machen, welche, jede für sich betrachtet, auf der gegebenen Fläche der ersten und zweiten Bedingung (den *„Hauptbedingungen“*) Genüge leisten. Indem man die gefundenen Functionen mit unbestimmten Coefficienten multiplicirt und ein Aggregat der so gewonnenen Ausdrücke bildet, erhält man unmittelbar eine Function, welche ihrer Entstehung nach die Hauptbedingungen befriedigt und gleichzeitig in den noch zu bestimmenden Coefficienten das Mittel an die Hand giebt, der dritten Bedingung gerecht zu werden. — Die so gefundene Function

*) Anm. d. Red. — Dieser Name, wie überhaupt die hier gebrauchten Bezeichnungen sind eingeführt von C. Neumann in seinem Aufsatz über die Integration der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ (Borchardt's Journal Bd. 59, Seite 335).

ist dann die einzige mögliche Lösung der vorgelegten Aufgabe. Es gilt nämlich der Satz:

> Soll eine Function Φ sammt ihren ersten Ableitungen auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sein, soll sie ferner auf dieser Fläche der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ Genüge leisten, und soll sie endlich in den Randpunkten der Fläche vorgeschriebene Werthe $\Phi = f$ besitzen, so ist hierdurch die Function auf der Fläche $\mathfrak{A}$ *vollständig* bestimmt; es giebt neben ihr *keine zweite, von ihr verschiedene* Function, welche *gleichzeitig* denselben Bedingungen entsprechen könnte.

Gleiches gilt natürlich für die durch die übrigen Methoden ermittelten Functionen.

Die zweite Methode bedient sich, um das Problem zu lösen, der sogenannten Green'schen Function und liefert den Werth der gesuchten Function in jedem inneren Punkte p der gegebenen Fläche. Indess erscheint sie wesentlich abhängig von dem ersten Verfahren, sofern die Green'sche Function G durch folgende Eigenschaften charakterisirt ist: G, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ sind im Innern der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig; es ist durchaus auf der Fläche $\Delta G = 0$ und es besitzt G Randwerthe, welche gleichwerthig sind mit den natürlichen Logarithmen der von dem inneren Punkte p aus nach dem Rande s gezogenen Radiivectores; letztere Eigenschaft kann ausgedrückt werden durch:

$$\overline{G} = G_s = L_{ps}.$$

Hat man für eine gegebene Fläche die Green'sche Function gefunden, und setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{dG_s}{dn} - \frac{dL_{ps}}{dn}\right) = \eta_s^{(p)},$$

so ist die Lösung der algemeinen Aufgabe gegeben durch die Formel:

$$\Phi_p = \int_{\mathfrak{A}} \eta_s^{(p)} \Phi_s \, ds,$$

wo Φ_s die gegebenen Randwerthe von Φ, n die in das Innere der Fläche $\mathfrak{A}$ laufende Normale der Randcurve s bedeutet.

Die dritte Methode unterscheidet sich von der zweiten nur dadurch, dass man die Grösse $\eta_s^{(p)}$ nicht vermittelst der Green'schen Function, sondern durch ein mehr directes Verfahren findet. Sie beruht auf dem (aus der letzten Formel sich ergebendem) Satze, dass eine Randbelegung von der Masse $\eta_s^{(p)} ds$ für alle äusseren Punkte äquipotential ist mit einer in p concentrirten Masse Eins.

Die vierte Methode, die *„des arithmetischen Mittels“*, ist erst vor wenigen Jahren von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Neu-

mann in Leipzig, publicirt worden*). Hierbei wird die Lösung angestrebt durch ein eigenthümliches successives Verfahren, das — mit Bezug auf das vorschwebende Ziel ausgesprochen — aus folgenden Bemerkungen erhellen wird. Gegeben sei die endliche Fläche $\mathfrak{A}$, welche nur eine einzige, überall convexe, stetig gebogene Randcurve s besitzt, und p ein irgendwo innerhalb $\mathfrak{A}$ gelegener Punkt. Versteht man unter $(ds)_p$ den Betrag des unendlich kleinen Winkels, welchen die von p nach den Endpunkten des Curvenelementes ds gezogenen Radiivectors einschliessen, unter f die vorgeschriebenen Randwerthe der gesuchten Function, so bilde man zunächst *„das arithmetische Mittel der Werthe f in Bezug auf den gegebenen inneren Punkt p“*

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{A}} f(ds)_p$$

und hieraus:

$$v = 2u_s - f,$$

worin u_s den Grenzwerth bezeichnet, gegen welchen u_p convergirt, falls der Punkt p der Peripherie s näher und näher rückt. In derselben Weise, wie man aus den Werthen f die Functionen u_p, v ableitet, gewinnt man aus den Werthen v die Functionen u_p', v'; aus den Werthen v' die Functionen u_p'', v'' etc. etc. Das vorgelegte Problem findet dann seine Lösung durch die Formel:

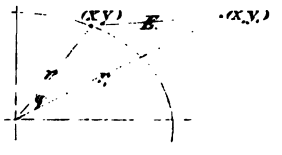
$$\Phi_p = v_s^{(2n+1)} + 2\left\{u_p - u_p' + u_p'' - u_p''' + - \cdots - u_p^{(2n+1)}\right\},$$

wo $v_s^{(2n+1)}$ die Constante repräsentirt, gegen welche $v^{(2n+1)}$ für $n = \infty$ convergirt.

§ 2.

Grund für die Einführung eines besondern Coordinatensystems.

Ehe wir den sich aufdrängenden Aufgaben näher treten, bedarf es gewisser Vorbereitungen. Da sich nämlich das dritte Verfahren auf das Potential linear vertheilter Massen gründet, so bedürfen wir im weiteren Verlaufe des Logarithmus der Entfernung zweier Punkte. Es leuchtet aber sofort ein, dass die gewöhnlichen Coordinaten hier unzureichend sind. Sei nämlich die Aufgabe gestellt, den Logarithmus der Entfernung E des Ellipsenpunktes (x, y) von dem gegebenen Punkte (x_1, y_1) zu berechnen! Wollte man hierbei ausgehen von der bekannten Formel



$$E^2 = r^2 + r_1^2 - 2r \cdot r_1 \cos\varphi,$$

welche ja leicht eine Zerlegung in zwei Factoren gestattet, so würde

*) Berichte der math.-phys. Classe der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften 1870, p. 49—56, und Jahrbuch über die Fortschritte der Math. Bd. III, p. 491 sq.

sich hierbei die Unzuträglichkeit einstellen, dass für jeden anderen Punkt der Ellipsenperipherie der Radiusvector r einen anderen Werth besitzt, so dass in den Ausdruck für E zwei Variable eingingen. Die Behandlung des analogen Problems für die Kreisfläche führt auf den Gedanken, im vorliegenden Falle eines Coordinatensystems sich zu bedienen, welches die Punkte einer Ellipse determinirt durch Angabe einer für diese Ellipse constanten und einer anderen variabeln Grösse.

§ 3.

Natur des neuen Coordinatensystems, Bedeutung von ω und ϑ.

Zu Coordinaten, welche den gestellten Anforderungen genügen, gelangen wir mittels der Gleichung*)

$$x + iy = c \cdot \cos(\omega - i\vartheta),$$

woraus mittels der Euler'schen Formeln folgt:

$$\text{(I.)} \qquad \begin{cases} x = c \cdot \dfrac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2} \cdot \cos\omega, \\ y = c \cdot \dfrac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{2} \cdot \sin\omega. \end{cases}$$

Hieraus wieder ergiebt sich:

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2 \cdot \left(\dfrac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{c^2 \cdot \left(\dfrac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{2}\right)^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2\omega} - \dfrac{y^2}{c^2 \cdot \sin^2\omega} = 1. \end{cases}$$

Man erkennt sofort, dass, falls man in den vorstehenden Gleichungen ϑ beziehendlich ω als variable Parameter betrachtet, die erste dieser Gleichungen eine Schaar Ellipsen, die zweite eine Schaar Hyperbeln darstellt. — Schreibt man die Gleichungen (II.) aber in der Gestalt:

$$\text{(II}^{a}\text{.)} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{c^2 \cdot \left(\dfrac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}\right)^2} + \dfrac{y^2}{c^2 \cdot \left(\dfrac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}\right)^2 - c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{c^2 \cdot \cos^2\omega} + \dfrac{y^2}{c^2 \cdot \cos^2\omega - c^2} = 1, \end{cases}$$

und beachtet man, dass die Gleichung

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - \varepsilon^2} = 1,$$

worin k (ein variabler Parameter) die halbe grosse Achse, ε die halbe

*) Vgl. Briot et Bouquet: Th. d. fonctions doubl. périodiques (Paris, 1859), pag. 10.

Brennpunktdistanz bedeutet, ein System confocaler Ellipsen oder Hyperbeln darstellen, je nachdem $k \gtrless \varepsilon$, so folgt, dass die Gleichungen (II.) zusammen ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln darstellen, deren gemeinschaftliche Brennpunkte die Coordinaten

$$x = +c\,, \quad y = 0\,; \quad x = -c\,, \quad y = 0$$

besitzen. Zugleich ergiebt sich, dass die beiden Halbachsen der Ellipsen durch:

$$\frac{c}{2}\,(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})\,, \quad \frac{c}{2}\,(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})\,,$$

die der Hyperbeln durch

$$c \cdot \cos\omega\,, \quad c \cdot \sin\omega$$

ausgedrückt werden.

Man hat sich also bei Einführung dieses neuen Coordinatensystems die ganze unendliche Ebene durch diese beiden Curvensysteme erfüllt zu denken, so dass jeder Punkt der Ebene als Durchschnittspunkt einer der Ellipsen und einer der Hyperbeln aufzufassen ist. Mit anderen Worten: jeder beliebige Punkt wird durch Angabe des ihm zugehörigen Werthes von ϑ und ω völlig bestimmt sein. Für dieselbe Ellipse ist $\vartheta = \text{const.}$, ω variabel: also walten hier ganz ähnliche Verhältnisse ob, wie bei den Polarcoordinaten r, φ des Kreises.

Es erübrigt noch eine Untersuchung der Werthe, welche ϑ und ω annehmen müssen, um alle Punkte der Ebene zu umfassen. — Da sämmtliche Ellipsen des Systems auch erhalten werden können, wenn man ϑ von 0 bis $-\infty$ abnehmen lässt, so setzen wir fest, dass unter ϑ stets nur *positive* Werthe sollen verstanden werden. Es kann also ϑ alle Werthe im Intervalle von 0 bis ∞ annehmen, und es entspricht dem Werthe $\vartheta = 0$ die Ellipse, welche sich als Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte darstellt und daher eigentlich eine doppelt gelegte Linie ist; dem Werthe $\vartheta = \infty$ gehört die Ellipse zu, welche sich in unendlicher Ferne um die beiden Brennpunkte herumzieht; wir werden in der Folge von solchen unendlich grossen Ellipsen stets absehen. Man kann diese Betrachtungen über die Werthe von ϑ dahin zusammenfassen: *„ϑ wird jederzeit im Wachsen begriffen sein, sobald man von einer die Brennpunkte enger umschliessenden Ellipse zu einer dieselben aus weiterer Entfernung umgebenden übergeht“.*

Was andererseits das Werthgebiet von ω betrifft, so kann man darüber in folgender Weise sich aufklären. Setzt man

$$\frac{c}{2}\,(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) = a\,, \quad \frac{c}{2}\,(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) = b\,,$$

so ist

$$x = a \cdot \cos\omega\,, \quad y = b \cdot \sin\omega\,.$$

Nun ist $x = \pm a$ für $y = 0$, also hat ω dort die Werthe 0, 2π, oder π; es ist $x = 0$ für $y = \pm b$, also hat ω dort die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Aus der vorstehenden Betrachtung ergiebt sich also:

„Um alle Werthe der unendlichen Ebene eindeutig zu bestimmen, muss ϑ alle Werthe von 0 bis ∞, ω alle Werthe von 0 bis 2π annehmen“.

Zus. Dass ω, um alle Punkte der Ellipse $\vartheta = \text{Const.}$ zu ergeben, die Werthe 0 bis 2π annehmen muss, folgt auch schon aus seiner geometrischen Bedeutung. Die Bedeutung der Grösse ϑ wird der Anschauung näher gebracht durch die Relationen:

$$\frac{c}{2}(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) = a\,, \qquad \frac{c}{2}(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) = b\,,$$

wo a und b die Halbachsen der Ellipsen bedeuten. Nach leichten Transformationen findet man

$$c^{\vartheta} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,,$$

d. h. *„e^{ϑ} ist die Quadratwurzel des Quotienten aus der Summe und Differenz der Halbachsen der Ellipse.“*

§ 4.

Orthogonalität des Curvensystems; das Flächenelement.

Das neue Coordinatensystem erweist sich als sehr geeignet zur Berechnung der Potentiale des elliptischen Ringes und der Ellipsenfläche. Zunächst ist bekanntlich ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln ein System von Orthogonalcurven.

Diese Orthogonalität aber setzt uns in den Stand, das Flächenelement $dx \cdot dy$ in den neuen Coordinaten bequem zu berechnen. Das Quadrat dss Differentials ds des Bogens irgend einer Curve in den Coordinaten ϑ, ω wird von der Form sein:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \Theta^2 d\vartheta^2 + \Omega^2 \cdot d\omega^2,$$

worin

$$\Theta^2 = \Omega^2 = \frac{c^2}{4} \cdot (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega)\,.$$

Hieraus erhalten wir die Bogenelemente ds_e, ds_h der confocalen Ellipsen und Hyperbeln, wenn wir einmal $\vartheta = \text{const.}$, $d\vartheta = 0$; das andere Mal $\omega = \text{const.}$, $d\omega = 0$ setzen; also wird

$$ds_e = \Omega \cdot d\omega\,,$$
$$ds_h = \Theta \cdot d\vartheta\,.$$

Da die Ellipsen und Hyperbeln unseres Systems zu einander orthogonal sind, so schneiden die Ellipsen $\vartheta = \vartheta$ und $\vartheta = \vartheta + d\vartheta$ zusammen mit den Hyperbeln $\omega = \omega$ und $\omega = \omega + d\omega$ aus der Ebene ein unendlich kleines krummliniges Rechteck aus, dessen Flächeninhalt sich also durch $ds_e \cdot ds_h$ wird darstellen lassen.

„Folglich wird das Flächenelement in den neuen Coordinaten ausgedrückt durch:

$$ds_e \cdot ds_h = \frac{c^2}{4} \cdot (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2 \cdot \cos 2\omega)\, d\vartheta \cdot d\omega\text{“*)}.$$

Zus. 1. Zu demselben Resultate gelangt man mittels folgenden allgemeinen Satzes über die Transformation vielfacher Integrale auf neue Variabeln (cf. Baltzer, Determ. § 12. (5, 6)):

„Soll das n-fache Integral

$$\int^{(n)} F(x_1, x_2, \cdots x_n) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \cdot dx_n$$

durch die mittels der n Substitutionsgleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 (y_1, y_2 \cdot \cdot y_n), \\ x_2 &= x_2 (y_1, y_2 \cdot \cdot y_n), \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= x_n (y_1, y_2 \cdot \cdot y_n) \end{aligned}$$

eingeführten n neuen Variabeln $y_1, y_2 \cdot \cdot y_n$ in ein neues n-faches Integral transformirt werden, so besteht die Relation:

$$\int^{(n)} F_x dx_1 \cdot dx_2 \cdot \cdot \cdot dx_n = \int^{(n)} F_y \cdot R_n, dy_1 \cdot dy_2 \cdot \cdot dy_n .$$

Hierin hat man rechter Hand unter F_y die in den neuen Variabeln y ausgedrückte Function F_x, und unter R_n die Functionaldeterminante

$$R_n = \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \cdot \cdot \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_n}$$

zu verstehen“.

Mit Zugrundelegung dieses Satzes haben wir jetzt zu bilden

$$\int\int dx \cdot dy = \int\int \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial x}{\partial \omega} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{vmatrix} d\vartheta \cdot d\omega .$$

Nun folgt aus den Definitionsgleichungen (I.) § 3.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} &= \frac{c}{2} \cdot (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \cos \omega = \frac{\partial y}{\partial \omega}, \\ \frac{\partial x}{\partial \omega} &= -\frac{c}{2} \cdot (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \sin \omega = -\frac{\partial y}{\partial \vartheta} . \end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\int\int dx \cdot dy = \int\int \frac{c^2}{4} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2 \cos 2\omega)\, d\vartheta \cdot d\omega ,$$

*) Vergl. Hesse, Anal. Geometrie d. Raumes,[2] p. 291.

woraus für das Flächenelement derselbe Werth sich ergiebt, der oben gefunden wurde.

Zus. 2. Im Anschlusse hieran berechnen wir den Inhalt des Ellipsenringes (J_r) und der Ellipsenfläche (J_f).

Es ist

$$J_r = \frac{c^2}{4} \cdot d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega)\, d\omega\,,$$

$$J_r = \frac{c^2\pi}{2} \cdot (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})\,.$$

Andererseits ist

$$J_f = \frac{c^2}{4} \cdot \int_0^{\vartheta} \int_0^{2\pi} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega)\, d\vartheta \cdot d\omega\,,$$

$$J_f = \frac{c^2\pi}{4} \cdot (e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\,.$$

§ 5.

Logarithmus der Entfernung zweier Punkte.

Wir schliessen unsere Vorbereitungen ab mit der Berechnung des Logarithmus der Entfernung zweier Punkte. Zuvor ist da Folgendes zu bemerken. Bekanntlich ist die Reihenentwickelung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \text{in. inf.}$$

gültig für jeden Werth von x, welcher der Ungleichung genügt:

$$-1 < x < +1\,.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration von $x = 0$ bis $x = \alpha$ die Formel:

$$-l(1-\alpha) = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \cdots,$$

oder

$$l(1-\alpha) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{n}, \qquad (-1 < \alpha < +1)\,.$$

Das Quadrat der Entfernung E zweier Punkte (x, y) und (x_1, y_1) ist bekanntlich

$$E^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\,,$$

setzt man nun

$$x = \frac{c}{2} \cdot (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \cos\omega\,, \qquad y = \frac{c}{2} \cdot (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \sin\omega\,,$$

$$x_1 = \frac{c}{2} \cdot (e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1}) \cdot \cos\omega_1\,, \qquad y_1 = \frac{c}{2} \cdot (e^{\vartheta_1} - e^{-\vartheta_1}) \cdot \sin\omega_1\,,$$

so ist

$$E^2 = \frac{c^2}{4}\Big\{\big([e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}]\cos\omega - [e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1}]\cos\omega_1\big)^2 + \big([e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}]\sin\omega - [e^{\vartheta_1} - e^{-\vartheta_1}]\sin\omega_1\big)^2\Big\}.$$

Führt man die Quadrate aus, wendet auf die cos die Euler'schen Formeln an und zieht wieder zusammen, so erhält man:

$$\text{(III.)} \quad E^2 = \frac{c^2}{4}\left\{\left(e^{(\vartheta+\vartheta_1)}+e^{-(\vartheta+\vartheta_1)}\right)-\left(e^{(\omega+\omega_1)i}+e^{-(\omega+\omega_1)i}\right)\right\} \cdot \left\{\left(e^{(\vartheta-\vartheta_1)}+e^{-(\vartheta-\vartheta_1)}\right)-\left(e^{(\omega-\omega_1)i}+e^{-(\omega-\omega_1)i}\right)\right\}.$$

Bezeichnet man augenblicklich

$$e^{\vartheta+\vartheta_1} = \alpha\,, \quad e^{\vartheta-\vartheta_1} = \beta\,,$$

so kommt man auf:

$$\text{(IV.)} \quad \log(E^2) = \log\frac{e^{2\vartheta}c^2}{4} + \log\left(1-\frac{e^{(\omega+\omega_1)i}}{\alpha}\right)+\log\left(1-\frac{e^{-(\omega+\omega_1)i}}{\alpha}\right) + \log\left(1-\frac{e^{(\omega-\omega_1)i}}{\beta}\right)+\log\left(1-\frac{e^{-(\omega-\omega_1)i}}{\beta}\right).$$

Die Benutzung obiger Summenformel giebt:

$$\text{(V.)} \quad \log E = \log\frac{e^{\vartheta}c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{\cos n(\omega+\omega_1)}{e^{n(\vartheta+\vartheta_1)}}+\frac{\cos n(\omega-\omega_1)}{e^{n(\vartheta-\vartheta_1)}}\right\}.$$

$$\text{(VI.)} \quad \log E = \log\frac{e^{\vartheta}c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{e^{n\vartheta_1}+e^{-n\vartheta_1}}{e^{n\vartheta}}\cos n\omega_1\cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta_1}-e^{-n\vartheta_1}}{e^{n\vartheta}}\sin n\omega_1\sin n\omega\right\}.$$

Da die Gültigkeit der Summenformel für $l(1-\alpha)$ durch die Ungleichung $-1 < \alpha < +1$ beschränkt ist, so folgt aus der Entwickelung (V.), dass (VI.) nur gültig ist, so lange $\vartheta_1 < \vartheta$. Ferner ist zu bemerken, dass die Zerlegung von

$$\cos n(\omega \pm \omega_1)$$

in

$$\cos n\omega \cdot \cos n\omega_1 \mp \sin n\omega \cdot \sin n\omega_1$$

und die dann ausgeführte Vereinigung der Coefficienten von $\cos n\omega_1 \cos n\omega$, $\sin n\omega_1 \sin n\omega$ deshalb erlaubt ist, weil

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos n(\omega+\omega_1)}{e^{n(\vartheta+\vartheta_1)}}, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos n(\omega-\omega_1)}{e^{n(\vartheta-\vartheta_1)}}$$

(letztere Reihe unter der Bedingung $\vartheta_1 < \vartheta$) unbedingt convergiren und ebenso die in (VI.) auftretenden Reihen convergent sind.

Ist hingegen $\vartheta_1 > \vartheta$, so leitet man aus (III.) erstens ab:

$$E^2 = \frac{c^2}{4}e^{2\vartheta_1}\left(1-\frac{e^{(\omega+\omega_1)i}}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{e^{-(\omega+\omega_1)i}}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{e^{(\omega-\omega_1)i}}{\beta_1}\right)\left(1-\frac{e^{-(\omega-\omega_1)i}}{\beta_1}\right),$$

wo

$$\alpha_1 = e^{\vartheta_1+\vartheta}\,, \qquad \beta_1 = e^{\vartheta_1-\vartheta}$$

gesetzt ist; und hieraus ganz analog wie zuvor:

$$(V^a.) \quad \log E = \log \frac{e^{\vartheta_1} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{\cos n(\omega + \omega_1)}{e^{n(\vartheta_1 + \vartheta)}} + \frac{\cos n(\omega - \omega_1)}{e^{n(\vartheta_1 - \vartheta)}} \right\}.$$

$$(VI^a.) \quad \log E = \log \frac{e^{\vartheta_1} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}{e^{n\vartheta_1}} \cos n\omega_1 \cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}}{e^{n\vartheta_1}} \sin n\omega_1 \sin n\omega \right\}.$$

Aus der Entwickelung ($V^a.$) erhellt nun wieder, dass ($VI^a.$) nur anwendbar ist, so lange $\vartheta < \vartheta_1$ ist.

§ 6.

Potential eines unendlich dünnen, von confocalen Ellipsen begrenzten Ringes.

Gegeben sei ein elliptischer Ring, welcher durch die beiden confocalen Ellipsen $\vartheta = \vartheta$ und $\vartheta = \vartheta + d\vartheta$ begrenzt werde. Der angezogene Punkt, in welchem wir stets die Masseneinheit concentrirt denken wollen, kann entweder ausserhalb (ϑ_a, ω_a) oder innerhalb (ϑ_i, ω_i), d. h. in der leeren Fläche des Ringes liegen. Wir denken uns die ganze Ringfläche mit Masse von derselben Dichtigkeit q gleichförmig bedeckt.

Die auf einem Flächenelemente befindliche Masse ist

$$dm = q \cdot \frac{c^2}{4} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega)\, d\vartheta \cdot d\omega ,$$

woraus sich die Masse des ganzen Ringes berechnet:

$$m_r = q \cdot J_r = \frac{q \cdot \pi \cdot c^2}{2} \cdot (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta})\, d\vartheta .$$

Ist E die variable Entfernung des angezogenen Punktes von den Ringelementen, so ist das Potential des Massenelementes gegeben durch $dm \log E$, folglich wird das Potential des Ringes ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(1) \qquad v = \frac{q \cdot c^2}{2} \cdot d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega)\, d\omega \cdot \log E .$$

Liegt nun der Punkt ausserhalb, d. h. ist $\vartheta_a > \vartheta$, so hat man nach § 5. die Entwickelung ($VI^a.$) zu nehmen:

$$\log E_a = \log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}{e^{n\vartheta_a}} \cos n\omega_a \cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}}{e^{n\vartheta_a}} \sin n\omega_a \sin n\omega \right\}.$$

Setzt man dies für $\log E$ in die allgemeine Gleichung (1) für v

ein, so wird man geführt unter Rücksichtnahme auf die bekannten Formeln:

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot d\varphi = 0 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cdot d\varphi = 0 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \sin m\varphi \cdot d\varphi = 0 ,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \cos m\varphi \cdot d\varphi = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix} \text{ je nachdem } \begin{matrix} n \gtrless \\ n = \end{matrix} \right\} m ,$$

wo m, n eine der Zahlen $1, 2, 3 \cdots$ bedeutet, auf den Werth:

$$v_a = \frac{q\pi c^2}{2} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta}) \cdot d\vartheta \cdot \left\{ \log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2 e^{2\vartheta_a}} \right\} ,$$

oder

$$v_a = m_r \cdot \left\{ \log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2 e^{2\vartheta_a}} \right\} . \tag{2}$$

Liegt zweitens der angezogene Punkt im Hohlraume des Ringes, so ist $\vartheta_i < \vartheta$; man hat folglich in (1) für $\log E$ die Entwickelung zu substituiren, welche durch § 5. (VI.) dargeboten wird:

$$\log E_i = \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\vartheta_i} + e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\vartheta}} \cos n\omega_i \cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta_i} - e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\vartheta}} \sin n\omega_i \sin n\omega \right\} .$$

Schliesslich erhält man:

$$v_i = m_r \cdot \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} + \frac{q \cdot \pi \cdot c^2}{2} (e^{2\vartheta_i} + e^{-2\vartheta_i}) \frac{\cos 2\omega_i \cdot d\vartheta}{2 e^{2\vartheta}} . \tag{3}$$

Zus. 1. Lässt man die Punkte (ϑ_a, ω_a) und (ϑ_i, ω_i) auf derselben Hyperbel $(\omega_a = \omega_i)$ liegen und lässt man beide auf letzterer sich immer mehr der Ellipsenperipherie nähern, bis sie in dieselbe fallen $(\vartheta_a = \vartheta_i = \vartheta)$, so erhält man als Grenzwerth:

$$\overline{v_a} = \overline{v_i} ,$$

wie dies die Stetigkeit des Potentials erfordert.

Zus. 2. Aus (2) erkennt man, dass die Curven constanten Potentiales für einen äusseren Punkt transcendenter Natur sind; die Untersuchung derselben Curven für v_i führt, wenn man beachtet, dass die gewöhnlichen Coordinaten (x, y) des inneren Punktes mit (ϑ_i, ω_i) verknüpft sind durch:

$$x = \frac{c}{2}\,(e^{\vartheta_i} + e^{-\vartheta_i}) \cdot \cos\omega_i\,,$$

$$y = \frac{c}{2}\,(e^{\vartheta_i} - e^{-\vartheta_i}) \cdot \sin\omega_i$$

auf

$$v_i = C = A + B\,(x^2 - y^2)\,,$$

wo A und B leicht angebbare Constanten bedeuten. Daraus lässt sich folgern, dass die Curven constanten Potentiales für innere Punkte gleichseitige Hyperbeln sind, concentrisch und homothetisch mit den Curven des Coordinatensystems.

§ 7.

Logarithmisches Potential der Ellipsenfläche.

Auch hierbei ist zu unterscheiden, ob der angezogene Punkt ausserhalb oder innerhalb der Fläche sich befindet. Wir beginnen mit dem ersteren Falle, als dem einfacheren. Zu dem Ende zerlegen wir die Ellipsenfläche in unendlich schmale, von confocalen Ellipsen begrenzte Ringe und nennen $v', v'' \cdots$ die resp. Potentiale derselben auf (ϑ_a, ω_a). Ist V_a das Potential der ganzen Ellipsenfläche, so ist offenbar

$$V_a = v' + v'' + \cdots = (m' + m'' + \cdots)\left(\log\frac{e^{\vartheta_a}c}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2e^{2\vartheta_a}}\right)$$

oder

$$V_a = M\left\{\log\frac{e^{\vartheta_a}c}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2e^{2\vartheta_a}}\right\},$$

wenn $m', m'' \cdots$ die Massen der einzelnen Ringe, M die Masse der Ellipsenfläche bedeutet. Nun ist (§ 4. Zus. 2.)

$$M = q \cdot J_f = q \cdot \frac{c^2\pi}{4} \cdot (e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\,,$$

also

$$(4) \qquad V_a = \frac{q\pi c^2}{4}\left(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}\right)\left(\log\frac{e^{\vartheta_a}c}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2e^{2\vartheta_a}}\right).$$

Liegt der Punkt (ϑ_i, ω_i) im Innern der gegebenen Fläche, deren Masse wieder M sei, so theilen wir die ganze Fläche in zwei andere, indem wir in der ursprünglichen Fläche die dem Werthe ϑ_i entsprechende Ellipse gezeichnet denken. Alsdann liegt der Punkt (ϑ_i, ω_i) *ausserhalb*, nämlich am Rande der durch die Ellipse $\vartheta = \vartheta_i$ begrenzten inneren Ellipsenfläche, und *innerhalb*, nämlich am inneren Rande des durch die Ellipsen $\vartheta = \vartheta_i$ und $\vartheta = \vartheta$ begrenzten elliptischen Ringes. Ist nun V_i das Potential der ganzen Fläche, V' das der innern Ellipsenfläche, V'' das dem Ringe zugehörige Potential, so ist

$$V_i = V' + V''.$$

Aus (4) folgt sofort:

$$(A) \qquad V' = \frac{q\pi c^2}{4}\left(e^{2\vartheta_i} - e^{-2\vartheta_i}\right)\left(\log\frac{e^{\vartheta_i}c}{2} + \frac{\cos 2\omega_i}{2e^{2\vartheta_i}}\right).$$

Für V'' erhalten wir unter Bezugnahme auf den Werth von v_i in § 6. (3):

$$V'' = \frac{q\pi c^2}{2}\int_{\vartheta_i}^{\vartheta}(e^{2\vartheta}+e^{-2\vartheta})\log\frac{e^{\vartheta}c}{2}\cdot d\vartheta + \frac{q\cdot\pi c^2}{2}\cdot\frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2}\cos 2\omega_i\int_{\vartheta_i}^{\vartheta}e^{-2\vartheta}d\vartheta.$$

Das erste Glied hat den Werth:

$$(B) \qquad \frac{q\pi c^2}{4}\left[(e^{2\vartheta}-e^{-2\vartheta})\cdot\log\frac{e^{\vartheta}c}{2} - \frac{e^{2\vartheta}+e^{-2\vartheta}}{2}\right]_{\vartheta_i}^{\vartheta},$$

das zweite aber:

$$(C) \qquad \frac{q\pi c^2}{4}\left\{\frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2e^{2\vartheta_i}}\cdot\cos 2\omega_i - \frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2e^{2\vartheta}}\cos 2\omega_i\right\}.$$

Nun ist $V'' = (B) + (C)$, d. i.

$$V'' = \frac{q\pi c^2}{4}\left\{(e^{2\vartheta}-e^{-2\vartheta})\log\frac{e^{\vartheta}c}{2} - (e^{2\vartheta_i}-e^{-2\vartheta_i})\log\frac{e^{\vartheta_i}c}{2} - \frac{e^{2\vartheta}+e^{-2\vartheta}}{2} + \frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2}\right\} +$$
$$+ \frac{q\pi c^2}{4}\left\{\frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2}\cdot\frac{\cos 2\omega_i}{e^{2\vartheta_i}} - \frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2}\cdot\frac{\cos 2\omega_i}{e^{2\vartheta}}\right\}.$$

Hierzu ist, um V_i zu finden, noch (A) zu addiren. So erhält man schliesslich als Werth des Potentials einer Ellipsenfläche auf einen inneren Punkt den Ausdruck:

$$(5) \quad V_i = \frac{q\pi c^2}{4}\left\{(e^{2\vartheta}-e^{-2\vartheta})\cdot\log\frac{e^{\vartheta}c}{2} - \frac{e^{2\vartheta}+e^{-2\vartheta}}{2}\right\}$$
$$+ \frac{q\pi c^2}{4}\left\{\frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2} + \cos 2\omega_i\cdot\left(1 - \frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2e^{2\vartheta}}\right)\right\},$$

$$V_i = K + \frac{q\pi c^2}{4}\left\{\frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2} + \cos 2\omega_i\cdot\left(1 - \frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2e^{2\vartheta}}\right)\right\}.$$

Wir gelangen daher zu dem Resultate: „*Abgesehen von einer Constanten ist das Potential einer Ellipsenfläche auf einen innern Punkt* (ϑ_i, ω_i) *ausgedrückt durch:*

$$\frac{q\pi c^2}{4}\cdot\left\{\frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2} + \cos 2\omega_i\left(1 - \frac{e^{2\vartheta_i}+e^{-2\vartheta_i}}{2e^{2\vartheta}}\right)\right\};$$

das auf einen äussern Punkt (ϑ_a, ω_a) *erhält man, indem man die Masse M der Ellipsenfläche multiplicirt mit*

$$\log\frac{e^{\vartheta_a}c}{2} + \frac{\cos 2\omega_a}{2e^{2\vartheta_a}}.“$$

Zus. 1. Wendet man zur Probe unsere Formeln auf einen Punkt

am Rande der Ellipsenfläche an, so ergiebt (4), indem dann für den Rand der Fläche $\vartheta_a = \vartheta$ wird und, wenn man ω statt ω_a schreibt:

$$\overline{V_a} = \frac{q\pi c^2}{4}\left(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}\right)\cdot\left(\log\frac{e^{\vartheta}c}{2} + \frac{\cos 2\omega}{2e^{2\vartheta}}\right).$$

Aus (5) aber folgt, da jetzt $\vartheta_i = \vartheta$ wird, und wenn man ω für ω_i einsetzt:

$$\overline{V_i} = \frac{q\pi c^2}{4}\cdot(e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta})\log\frac{e^{\vartheta}c}{2} + \frac{q\pi c^2}{2}\cdot\cos 2\omega\cdot\frac{e^{2\vartheta} - e^{-2\vartheta}}{2e^{2\vartheta}}.$$

Es ist also $\overline{V_a} = \overline{V_i}$, wie es zufolge der Stetigkeit des Potentials sein muss.

Zus. 2. Mit Rücksicht auf den Werth von V_a gelangt man leicht zu der Folgerung: *„Die Potentiale zweier confocalen homogenen Ellipsenflächen auf irgend einen und denselben ausserhalb beider gelegenen Punkt (ϑ_a, ω_a) sind den Massen dieser Flächen proportional"*.

§ 8.

Geometrische Beweise zweier Sätze über elliptische Ringe.

Wir wollen in diesem Abschnitte zwei Sätze über elliptische Ringe ableiten, welche den von Steiner (Crelle's Journ. XII, p. 141) für Ellipsoidschalen bewiesenen parallel stehen. — Bei Zugrundelegung des logarithmischen Potentials wird das Anziehungsgesetz der um r von einander abstehenden Massentheilchen m und μ ausgedrückt durch die Gleichung:

$$P = \frac{km\mu}{r}.$$

Es sei nun eine von zwei *ähnlichen, concentrischen* und *coaxialen* Ellipsen begrenzte Ringfläche gegeben, welche gleichförmig mit Masse von der Dichtigkeit q belegt sei; ε sei die unendlich kleine Breite des Ringes. In seiner inneren leeren Fläche befinde sich ein Punkt von der Masse μ und es soll unter Anwendung des obigen Anziehungsgesetzes die Wirkung, welche der Ring auf den Punkt ausübt, ermittelt werden. Betrachten wir zunächst die Wirkung eines einzigen Ringelementes auf μ. Zu dem Ende legen wir durch μ zwei einander unendlich nahe Sehnen, welche aus der inneren Peripherie das Linienelement f ausschneiden. Wir beschreiben sodann um μ einen Kreis vom Radius 1, aus dem jene Sehnen das Linienelement φ ausschneiden, sowie einen Kreis vom Radius r, aus welchem durch die Sehnen das Stück g ausgeschnitten wird. (r ist der kleinere der beiden von μ nach den Endpunkten von f gezogenen Radiivectoren.) Offenbar ist

$$g = f\cdot\cos(f, g) = f\cos(n, \nu),$$

wenn n die Normale der Ellipse, ν die des Kreises r bezeichnet. Ferner ist aber auch

$$g = r \cdot \varphi ,$$

folglich

$$f = \frac{r \cdot \varphi}{\cos (n, \nu)} .$$

Das von den beiden Ellipsen begrenzte Stück σ der Normale ν ist gegeben durch

$$\varepsilon = \sigma \cdot \cos (n, \nu) ,$$

daher ist

$$f = \frac{r \cdot \varphi \cdot \sigma}{\varepsilon}$$

und das Flächenelement $f \cdot \varepsilon$ hat den Werth

$$f \cdot \varepsilon = r \cdot \varphi \cdot \sigma ,$$

daher endlich das Massenelement

$$m = q \cdot r \cdot \varphi \cdot \sigma .$$

Das m entsprechende*) Massenelement m_1 findet sich ebenso

$$m_1 = q \cdot r_1 \cdot \varphi \cdot \sigma_1 .$$

Nun gilt der Satz: *„Legt man durch zwei ähnliche concentrische coaxiale Ellipsen eine beliebige Transversale, so sind die zwischen beiden Ellipsen enthaltenen äusseren Segmente gleich“*. Daher ist $\sigma = \sigma_1$. Bilden wir endlich die von m und m_1 auf μ ausgeübten Kräfte, so folgt

$$P = \mu \cdot q \cdot \varphi \cdot \sigma = P_1 .$$

Da diese beiden Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen zu wirken streben, zerstören sie sich gegenseitig. Lösen wir den ganzen Ring in der angedeuteten Weise in Elemente auf, die immer zu zweien conjugirt sind, und sich daher gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben, so erhalten wir den Satz: *„Ein unendlich dünner elliptischer Ring, welcher von zwei ähnlichen, concentrischen, coaxialen Ellipsen gebildet wird, und gleichförmig mit Masse belegt ist, übt auf Punkte im Innern keinerlei Wirkung aus“*.

Natürlich gilt dieser Satz auch noch für Ringe von endlicher Breite, welche entweder gleichförmig mit Masse belegt sind, oder zusammengesetzt sind aus homogenen, zwischen ähnlichen Ellipsen enthaltenen Schichten, deren Dichtigkeit sich auf irgend eine Weise von der einen zur anderen Schicht ändert.

Der Punkt μ liege jetzt ausserhalb des Ringes. Wir ziehen von μ aus das Tangentenpaar an die Ellipse, construiren die den Winkel der Tangenten halbirende Gerade, welche die Berührungssehne in k schneide. Durch Sehnen, welche einander unendlich nahe liegen und

*) Die Sehnen schneiden nämlich andererseits ein Linienelement f_1 aus.

durch k gehen, zerlegen wir den Ring in einzelne Elemente; wie zuvor ist

$$m = q \cdot \varphi \cdot r \cdot \sigma ,$$

$$m_1 = q \cdot \varphi \cdot r_1 \cdot \sigma ,$$

daher

$$m : r = m_1 : r_1 .$$

Da nun

$$\angle k\mu m = \angle k\mu m_1 ,$$

so ist, wenn $\overline{m\mu} = \varrho$ und $\overline{m_1\mu} = \varrho_1$ genannt wird,

$$r : r_1 = \varrho : \varrho_1 .$$

Daher ist endlich

$$\frac{\mu m}{\varrho} = \frac{\mu m_1}{\varrho_1} .$$

Die conjugirten Massenelemente m und m_1 wirken also gleich stark auf μ und auch unter gleichen Winkeln (da $\angle k\mu m = \angle k\mu m_1$), so resultirt aus ihnen eine Kraft, welche in die Richtung der Winkelhalbirungsgeraden fällt. — Zerlegt man den ganzen Ring in der oben angedeuteten Weise, so gelten analoge Relationen für je zwei conjugirte Ringelemente, wobei der Satz in Anwendung zu bringen ist: „Denkt man sich an eine Ellipse von einem Punkte p das Tangentenpaar gelegt, ferner die Berührungssehne desselben durch einen Punkt q in zwei von p aus gleich gross erscheinende Segmente zerlegt, so wird jede andere durch q gehende Sehne von q in zwei Segmente getheilt, welche von p aus gleich gross erscheinen". — So gelangt man zu dem Theoreme*): *„Die Wirkung, welche ein unendlich schmaler, von zwei ähnlichen homothetischen Ellipsen gebildeter Ring auf einen äusseren Punkt μ ausübt, fällt jeder Zeit ihrer Richtung nach zusammen mit der Winkelhalbirungsgeraden der vom Punkte μ an die Ellipse gelegten Tangenten"*.

Fällt der angezogene Punkt in die äussere Peripherie, so geht die Winkelhalbirungstransversale über in die *Normale* dieses Punktes, woraus gleichzeitig erhellt, dass diese äussere Ellipse *eine der Curven constanten Potentiales.*

§ 9.

Potential der mit Masse belegten Ellipsenperipherie.

Indem wir nun unserer „Hauptaufgabe" näher treten wollen, stellen wir uns das Problem, eine Massenvertheilung auf einer Ellipse zu ermitteln, welche mit dem Massenpunkte m rücksichtlich eines Punktes äquipotential ist. Von allen möglichen Lagen des angezogenen Punktes

*) Dieses Theorem und die für dasselbe gegebene Ableitung schliessen sich unmittelbar bekannten Steiner'schen Untersuchungen an (Crelle's Journ. Bd. 12 p. 141).

und des Massenpunktes bezüglich der Ellipse werden wir im folgenden, ausser dem für uns besonders wichtigen Falle, wo der Massenpunkt innerhalb, der angezogene Punkt ausserhalb der Fläche sich befindet, auch den umgekehrten Fall in Erwägung ziehen.

Eine Ellipse sei ungleichförmig mit Masse belegt. Die in den einzelnen Linienelementen vorhandene Masse wird dann gegeben sein durch:

$$q_1 ds_1 , \quad q_2 ds_2 , \quad q_3 ds_3 .$$

Die auf der ganzen Peripherie angehäufte Masse ist dann:

$$m_s = \int_s q \cdot ds .$$

Das Potential dieser Massenvertheilung auf einen Punkt σ, der um E_i von ds_i entfernt ist, lautet:

$$V_\sigma^{(s)} = q_1 \cdot ds_1 \cdot \log E_1 + q_2 \cdot ds_2 \cdot \log E_2 + \cdots$$

$$V_\sigma^{(s)} = \int_s q \cdot ds \cdot \log E .$$

Der Index s deutet an, dass die Integration über den ganzen Umfang der Ellipse hin zu erstrecken ist.

Hinsichtlich der Dichtigkeit q der Belegung machen wir sofort die allgemeinste Annahme; wir denken uns, q sei eine solche Function von ω, $q = f(\omega)$, bei welcher eine stetige Vertheilung der Masse stattfindet. Alsdann können wir für diese Function eine Entwickelung annehmen, welche nach sin und cos der Vielfachen von ω fortschreitet, also:

$$q = f(\omega) = A_0' + A_1' \cos \omega + A_2' \cos 2\omega + A_3' \cos 3\omega + \cdots + B_1' \sin \omega + B_2' \sin 2\omega + B_3' \sin 3\omega + \cdots ,$$

wo die A', B' gewisse Entwickelungscoefficienten vorstellen. Würde man unmittelbar diese Entwickelung für q in die Integrale für m_s und $V_\sigma^{(s)}$ einführen, so würde man auf elliptische Integrale kommen. Beachtet man aber, dass q wie $\log E$ (vergl. § 5.) sich in Reihen darstellen, welche nach cos und sin der Vielfachen von ω fortschreiten, so ergiebt sich, dass man auch ds in eine derartige Reihe wird entwickeln müssen. Ist nun letzteres auch möglich, so führt doch dies Verfahren auf Ausdrücke, welche vermöge ihrer verwickelten Natur jede Uebersichtlichkeit des Resultates benehmen, alle weiteren Folgerungen unmöglich machen. Wir suchen daher folgendermassen zum Ziele zu gelangen: das Bogenelement ds steht zu $d\omega$ in einer gewissen Beziehung, die sich ausdrückt durch

$$ds = \frac{ds}{d\omega} \cdot d\omega .$$

Dies eingeführt, erhalten wir

$$m_s = \int_s^{\bullet} q \cdot \frac{ds}{d\omega} \cdot d\omega ,$$

$$V_\sigma^{(s)} = \int_s^{\bullet} q \cdot \frac{ds}{d\omega} \cdot d\omega \log E ,$$

Nun ist $\frac{ds}{d\omega}$ eine stetige Function von ω; wir können es mit q zu einer neuen Function q'

$$q' = q \cdot \frac{ds}{d\omega} = \varphi(\omega)$$

vereinigen, welche nach einem bekannten Satze wieder eine stetige Function von ω ist. Wir werden nun für $\varphi(\omega)$ eine ähnliche Reihenentwickelung wie zuvor für $f(\omega)$ annehmen können und schreiben:

$$q' = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega) .$$

Was ferner den in der Gleichung für $V_\sigma^{(s)}$ auftretenden $\log E$ betrifft, so können wir laut (VI.) und (VI^a.) des § 5. setzen:

$$\log E = \mathsf{A}_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\mathsf{A}_n \cos n\omega + \mathsf{B}_n \sin n\omega) ,$$

wo unter den A, B nach § 5. leicht angebbare Coefficienten zu verstehen sind, die verschiedene Werthe besitzen, je nachdem σ innerhalb oder ausserhalb der Ellipse liegt.

Bei Benutzung der eben angegebenen Entwickelungen folgt nun endlich:

$$(6) \quad m_s = \int_0^{2\pi} \Big(A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \{A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega\}\Big) d\omega = 2\pi A_0 .$$

$$(7)\ V_\sigma^{(s)} = \int_0^{2\pi} \Big(A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega)\Big)\Big(\mathsf{A}_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\mathsf{A}_n \cos n\omega + \mathsf{B}_n \sin n\omega)\Big) \cdot d$$

$$= 2\pi A_0 \mathsf{A}_0 + \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \mathsf{A}_n + B_n \mathsf{B}_n) .$$

Liegt σ ausserhalb der Ellipse ($\vartheta = \theta$), so dass $\vartheta_a > \theta$, so ist

$$\mathsf{A}_0 = \log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} ,$$

$$\mathsf{A}_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{e^{n\vartheta_a}} \cos n\omega_a ,$$

$$\mathsf{B}_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\theta} - e^{-n\theta}}{e^{n\vartheta_a}} \sin n\omega_a .$$

Liegt σ innerhalb der Ellipse, so dass $\vartheta_i < \theta$, so ist

$$A_0 = \log \frac{e^{\Theta} c}{2},$$

$$A_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_i} + e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\Theta}} \cos n\omega_i,$$

$$B_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_i} - e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\Theta}} \sin n\omega_i \qquad \text{(cf. § 5.)}.$$

Je nach der Lage des angezogenen Punktes hat man also:

$$(8)\quad V^{(s)}_{\sigma_a} = 2\pi A_0 \cdot \log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} - \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ A_n \frac{e^{n\Theta} + e^{-n\Theta}}{e^{n\vartheta_a}} \cos n\omega_a + B_n \frac{e^{n\Theta} - e^{-n\Theta}}{e^{n\vartheta_a}} \sin n\omega_a \right\}.$$

$$(9)\quad V^{(s)}_{\sigma_i} = 2\pi A_0 \cdot \log \frac{e^{\Theta} c}{2} - \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ A_n \frac{e^{n\vartheta_i} + e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\Theta}} \cos n\omega_i + B_n \frac{e^{n\vartheta_i} - e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\Theta}} \sin n\omega_i \right\}.$$

Auch hier folgt, wenn σ in die Peripherie rückt, d. h. wenn man $\vartheta_a = \vartheta_i = \theta$ werden lässt und $\omega_a = \omega_i$ durch ω ersetzt:

$$\overline{V^{(s)}_{\sigma_a}} = \overline{V^{(s)}_{\sigma_i}}.$$

§ 10.

Dichtigkeit einer der Masse m äquipotentialen Massenvertheilung auf der Ellipse: der angezogene Punkt ausserhalb.

Unsere eigentliche Aufgabe besteht aber doch darin, die Ellipsenbelegung zu ermitteln, welche mit dem gegebenen Massenpunkte m äquipotential ist in Bezug auf einen beliebigen anderen Punkt; und zwar ist für uns insonderheit wichtig, die Massenbelegung, d. h. diejenige Dichtigkeit q, derselben zu finden, deren Potential auf einen beliebigen äusseren Punkt σ_a gleichwerthig ist dem Potentiale eines inneren Massenpunktes auf σ_a. Offenbar kommt es also darauf an, die noch gänzlich unbekannten Coefficienten A', B' der Entwickelung von q oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Coefficienten A und B der Entwickelung von q' in § 9. obiger Forderung gemäss zu bestimmen.

Den Werth des Potentiales einer Massenbelegung der Ellipse auf σ_a haben wir durch Gleichung (8) § 9. bestimmt. Dies Potential soll gleichwerthig sein mit dem Potentiale des inneren Massenpunktes m auf σ_a, welches den Werth

$$m \cdot \log \overline{m\,\sigma_a} = m \cdot L_{m\,\sigma_a}$$

besitzt. Sind (ϑ_a, ω_a) die Coordinaten von σ_a, (ϑ_p, ω_p) die von m, so folgt (cf. (VI[a].) § 5.):

$$m \cdot L_{m\sigma_a} = m \cdot \log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta_a}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega_a + \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta_a}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega_a \right\} .$$

Wir suchen jetzt die noch unbestimmten Coefficienten A, B im Werthe von $V^{(s)}_{\sigma_a}$ so zu bestimmen, dass der Bedingung

$$m L_{m\sigma_a} = V^{(s)}_{\sigma_a}$$

Genüge geleistet wird. Nun sind in den beiden Potentialwerthen als Constanten gegeben θ, ϑ_p, ω_p, m, Variabeln sind ϑ_a, ω_a, welche aber in beiden Ausdrücken genau in denselben Verbindungen auftreten. Die erwähnten beiden Potentiale werden folglich für jeden Werth von ϑ_a, ω_a einander gleich sein, wenn wir die Coefficienten von

$$\log \frac{e^{\vartheta_a} c}{2} , \quad \frac{\cos n\omega_a}{e^{n\vartheta_a}} , \quad \frac{\sin n\omega_a}{e^{n\vartheta_a}}$$

beiderseits gleich setzen. Dadurch erhalten wir die Bedingungsgleichungen:

$$2\pi A_0 = m ,$$
$$\pi \cdot A_n \cdot (e^{n\theta} + e^{-n\theta}) = m (e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}) \cos n\omega_p ,$$
$$\pi \cdot B_n \cdot (e^{n\theta} - e^{-n\theta}) = m (e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}) \sin n\omega_p ,$$

oder also, es wird

$$A_0 = m : 2\pi ,$$
$$A_n = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cdot \cos n\omega_p ,$$
$$B_n = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \cdot \sin n\omega_p .$$

Damit ist die gesuchte Massenvertheilung ermittelt. Ihre Masse ist nach (6) des § 9.:

$$m_s = 2\pi A_0 = m .$$

Die Substitution der Werthe für A und B in den Ausdruck für q' (§ 9.) ergiebt ferner, da

$$q = q' \cdot \frac{d\omega}{ds} ,$$

für die Dichtigkeit q_s der gesuchten Massenbelegung:

$$(10) \quad q_s = \frac{m}{2\pi} \cdot \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega \right) \right\} \cdot \frac{d\omega}{ds} .$$

Sonach erhalten wir den Satz: *„Ist m ein gegebener Massenpunkt innerhalb einer gegebenen Ellipse und denkt man sich eine andere Masse m gleich der Masse jenes Punktes längs der Peripherie in solcher Weise vertheilt, dass ihre Dichtigkeit an jeder Stelle* (θ, ω) *durch die vorstehende Formel für* q_s *wiedergegeben wird, so übt die so erhaltene Randbelegung auf alle äusseren Punkte genau dieselbe Wirkung aus, wie der gegebene Massenpunkt m."*

Die so ermittelte Randbelegung nennt man auch kurz „die dem gegebenen Massenpunkte *m entsprechende* Randbelegung".

Zus. Von hier aus gelangt man leicht auch zu dem Theoreme: *„Ist innerhalb einer Ellipse eine beliebige Massenvertheilung (discrete Massenpunkte oder auch Massen auf Flächen) gegeben, so kann die Wirkung derselben auf äussere Punkte jeder Zeit durch eine geeignete Randbelegung der Ellipse neutralisirt werden."*

§ 11.

Fortsetzung: der angezogene Punkt innerhalb der Ellipse.

Betrachteten wir im vorigen Paragraphen den Fall, wo der Massenpunkt innerhalb, der angezogene Punkt ausserhalb der Ellipse lag, so fragt es sich, zu welchem Ergebnisse führt es, wenn wir diese Lagenverhältnisse umkehren? Es handelt sich also jetzt darum, die Dichtigkeit einer Massenvertheilung auf der Ellipse zu finden, welche mit einem äusseren Massenpunkte m äquipotential ist in Bezug auf einen inneren Punkt (ϑ_i, ω_i).

Das Potential einer Randbelegung der Ellipse auf einen inneren Punkt haben wir allgemein in § 9. durch Gleichung (9) ermittelt. Es fand sich dort

$$V_{\sigma_i}^{(s)} = 2\pi \cdot A_0 \log \frac{e^{\theta} c}{2} - \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \Big(A_n \cdot \frac{e^{n\vartheta_i} + e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\theta}} \cos n\omega_i + B_n \cdot \frac{e^{n\vartheta_i} - e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\theta}} \sin n\omega_i \Big) .$$

Das Potential des äusseren Massenpunktes m auf den inneren Punkt $\sigma_i\,(\vartheta_i, \omega_i)$ ist gegeben durch:

$$m \cdot L_{m\sigma_i}$$

und, da jetzt $\vartheta_p > \vartheta_i$, so folgt unter Anwendung von (VI[a].) § 5.:

$$m \cdot L_{m\sigma_i} = m \left\{ \log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \Big(\frac{e^{n\vartheta_i} + e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\vartheta_p}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega_i + \frac{e^{n\vartheta_i} - e^{-n\vartheta_i}}{e^{n\vartheta_p}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega_i \Big) \right\} .$$

Soll nun das Potential $V_{\sigma_i}^{(s)}$ der Ellipsenbelegung mit dem vorstehenden Potentiale identisch sein, so muss sich aus der Vergleichung beider die Dichtigkeit q_s der erforderlichen Massenbelegung oder, was dasselbe besagt, müssen sich die Entwickelungscoefficienten A, B in $V_{\sigma_i}^{(s)}$ bestimmen lassen. Man findet:

$$A_0 = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{\log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2}}{\log \frac{e^{\theta} c}{2}},$$

$$A_n = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{e^{n\theta}}{e^{n\vartheta_p}} \cos n\omega_p,$$

$$B_n = \frac{m}{\pi} \cdot \frac{e^{n\theta}}{e^{n\vartheta_p}} \sin n\omega_p.$$

Mit Einsetzung dieser Werthe wird q' (vergl. § 9.):

$$q' = \frac{m}{2\pi} \left\{ \frac{\log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2}}{\log \frac{e^{\theta} c}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{n\theta}}{e^{n\vartheta_p}} \cos n(\omega - \omega_p) \right\}.$$

Die Masse der Randbelegung aber ist:

$$m_s = 2\pi A_0 = m \cdot \frac{\log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2}}{\log \frac{e^{\theta} c}{2}}.$$

Wir gelangen sonach zu dem Satze: *„Ist m ein gegebener Massenpunkt ausserhalb einer gegebenen Ellipse und denkt man sich eine andere Masse*

$$m_s = m \cdot \frac{\log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2}}{\log \frac{e^{\theta} c}{2}}$$

längs der Peripherie der Ellipse in solcher Weise vertheilt, dass ihre Dichtigkeit q_s in jeder Stelle (θ, ω) des Randes der Gleichung

$$q_s = q' \cdot \frac{d\omega}{ds}$$

genügt — (für q' gilt der vorher ermittelte Werth) —, dann wird die so erhaltene Randbelegung auf alle inneren Punkte genau dieselbe Wirkung ausüben, wie der gegebene Massenpunkt m selbst.“

§ 12.

Lösung der Hauptaufgabe nach der dritten Methode.

Wir wenden uns endlich direct zur Lösung unserer Hauptaufgabe. Sie ist kürzlich wiederholt: Eine Function Φ von solcher Beschaffenheit

soll ermittelt werden, dass sie selbst, wie auch ihre ersten Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ auf einer gegebenen Ellipsenfläche eindeutig und stetig ist, überall auf der gegebenen Fläche der Gleichung $\Delta \Phi = 0$ genügt, und endlich am Rande der Fläche vorgeschriebene Werthe $\bar{\Phi} = \Phi_s$ besitzt. — Wie bereits in der Einleitung, § 1., erwähnt, bringen wir zur Lösung dieses Problems diejenige Methode in Anwendung, welche die Lösung reducirt auf die Ermittelung der einem gegebenen inneren Punkte entsprechenden Randbelegung und die Lösung darbietet durch die Formel:

$$\Phi_p = \int_{\mathfrak{A}} \eta_s^{(p)} \cdot \Phi_s \, . \, ds \, .$$

Der Index $\mathfrak{A}$ bedeutet hierbei, dass das Integral über die ganze Begrenzungscurve der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ hin zu erstrecken ist; ferner ist p ein innerhalb der Fläche gelegener Punkt, in welchem die *Masseneinheit* concentrirt zu denken ist; $\eta_s^{(p)}$ endlich ist die Dichtigkeit der diesem Punkte entsprechenden Randbelegung der Fläche $\mathfrak{A}$. — Man übersieht nun mit einem Blicke, wie die Gleichung (10) des § 10. die wichtigsten Dienste leistet; es geht nämlich der dort gefundene Werth von q_s unmittelbar in den von $\eta_s^{(p)}$ über, wenn man $m = 1$ setzt. Sonach erhalten wir aus § 10.:

$$\eta_s^{(p)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega \right) \right\} \cdot \frac{d\omega}{ds} \, .$$

Nehmen wir ferner an, die Randwerthe $\bar{\Phi}$ der gesuchten Function Φ seien gegeben durch die Entwickelung:

$$\bar{\Phi} = \Phi_s = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\omega + Q_n \sin n\omega) \, ,$$

so lautet die Lösung des Problems für den Punkt p:

$$\Phi_p = \int_{\mathfrak{A}} q_s \cdot \Phi_s \cdot ds = \int_0^{2\pi} q' \cdot \Phi_s \cdot d\omega \, ,$$

wenn wir augenblicklich

$$\eta_s^{(p)} \text{ durch } q' \, . \, \frac{d\omega}{ds}$$

ersetzen. Stellen wir nun zeitweilig q' dar durch

$$q' = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega) \right\} ,$$

so wird

$$\Phi_p = \int_0^{2\pi} \frac{d\omega}{2\pi} \left\{1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\omega + B_n \sin n\omega)\right\} \left\{P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\omega + Q_n \sin n\omega)\right\},$$

d. i.

$$(11)\quad \Phi_p = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(P_n \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cos n\omega_p + Q_n \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \sin n\omega_p \right).$$

Dass die so gefundene Function für sich und mit ihren ersten Ableitungen den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit genügt, auch die Gleichung $\Delta\Phi = 0$ erfüllt, folgt unmittelbar schon aus der Herleitung der Formel, welche zur Lösung des Problems in Anwendung gebracht wurde. Indess wird sich im folgenden § Gelegenheit bieten, die Richtigkeit dieser Behauptung direct einzusehen. Für jetzt wollen wir uns damit begnügen, zu verificiren, dass die gefundene Function die vorgeschriebenen Randwerthe besitzt. Dazu lassen wir den Punkt p in die Peripherie rücken, d. h. wir setzen $\vartheta_p = \theta$ und bezeichnen einfach ω_p mit ω, so folgt:

$$\Phi_s = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\omega + Q_n \sin n\omega).$$

§ 13.

Untersuchung dreier Functionen φ, ψ, χ.

Die Form der gewonnenen Lösung (11), welch letzterer man auch die Gestalt geben kann:

$$\Phi_p = P_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{P_n}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cdot (e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}) \cos n\omega_p + \frac{Q_n}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \cdot (e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}) \sin n\omega_p \right\},$$

legt die Frage sehr nahe, ob nicht vielleicht die Functionen

$$\varphi = 1,$$

$$\psi = \frac{c}{2} (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega,$$

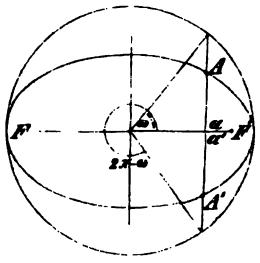
$$\chi = \frac{c}{2} (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \sin n\omega,$$

Functionen von solcher Beschaffenheit sind, dass sie sammt ihren ersten Ableitungen den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit, sowie der Gleichung

$$\Delta \cdot \cdot = \frac{\partial^2 \cdot \cdot}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \cdot \cdot}{\partial y^2} = 0$$

auf der gegebenen Ellipsenfläche genügen? — Was zunächst nun die

Function φ anlangt, so bedarf es keiner weiteren Auseinandersetzung, dass sie in der That den Hauptbedingungen Genüge leistet. Was ferner die Functionen ψ und χ betrifft, so sind, um deren Stetigkeit und Eindeutigkeit zu untersuchen, folgende Vorbemerkungen zu machen, die auch für die Ableitungen dieser Functionen von Wichtigkeit sind. Für $\vartheta = 0$ reduciren sich, wie schon früher erwähnt, die Ellipsen unseres Systems auf die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte $\overline{FF'}$. Sofern diese Strecke $\overline{FF'}$ einen Specialfall einer Ellipse repräsentirt, ist sie als eine doppelt gelegte Gerade aufzufassen, welche von F nach F' und wieder von F' nach F zurückreicht. So lange nun $\vartheta > 0$, besitzt $\cos n\omega$, $\sin n\omega$ in jedem Punkte der Ellipsen einen *einzigen* bestimmten Werth, der mit seinen Nachbarwerthen stetig zusammenhängt; in gegenüberliegenden Punkten jedoch, d. h. in Punkten A, A', welchen die Winkel ω und $2\pi - \omega$ zugehören, hat wohl $\cos n\omega$ denselben Werth, weil



$$\cos n(2\pi - \omega) = \cos n\omega ,$$

dagegen $\sin n\omega$ den entgegengesetzten Werth, weil

$$\sin n(2\pi - \omega) = -\sin n\omega .$$

Wird nun $\vartheta = 0$, so fallen gegenüberliegende Punkte wie A, A' in a, a' auf einander und, während $\cos n\omega$ auf $\overline{FF'}$ eindeutig und stetig bleibt, wird $\sin n\omega$ zweideutig und unstetig. Sonach erhalten wir das Resultat: „*Während* $\cos n\omega$ *auf der ganzen gegebenen Ellipsenfläche eindeutig und stetig ist, wird* $\sin n\omega$, *das sonst überall dieselben Eigenschaften besitzt, auf der* $\vartheta = 0$ *entsprechenden Verbindungslinie der Brennpunkte* $\overline{FF'}$ *zweideutig und unstetig.*“

Kehren wir nun zu unserer eigentlichen Untersuchung zurück, so folgt, dass ψ und χ auf der ganzen Ellipsenfläche eindeutig und stetig sind; denn für $\vartheta = 0$ wird

$$\psi_{\vartheta=0} = c \cdot \cos n\omega ,$$
$$\chi_{\vartheta=0} = 0 .$$

Es fragt sich weiter, wie verhalten sich die ersten Ableitungen von ψ und χ bezüglich der Eindeutigkeit und Stetigkeit auf der gegebenen Fläche und speciell für $\vartheta = 0$? Nun ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = n \cdot \frac{c}{2}\left\{(e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta})\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\cos n\omega - (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta})\cdot\sin n\omega\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}\right\},$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = n \cdot \frac{c}{2}\left\{(e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta})\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\cos n\omega - (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta})\cdot\sin n\omega\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\right\},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = n \cdot \frac{c}{2} \left\{ (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \sin n\omega + (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \right\},$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} = n \cdot \frac{c}{2} \left\{ (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \sin n\omega + (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \right\}.$$

Zur Bestimmung der hierin auftretenden Grössen:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

bedienen wir uns der Gleichungen:

$$x = \frac{c}{2} (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \cos \omega,$$

$$y = \frac{c}{2} (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \sin \omega,$$

aus denen sich leicht ergiebt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \cos \omega}{\frac{c}{2} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2 \cos 2\omega)} = \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \sin \omega}{\frac{c}{2} (e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2 \cos 2\omega)} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln für $\frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y}$; $\frac{\partial \chi}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ ein, so erhält man:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{n}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega} \{ (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta})(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cos n\omega \cdot \cos \omega + (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta})(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \sin n\omega \cdot \sin \omega \} = \frac{\partial \chi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{n}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega} \{ (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta})(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cos n\omega \cdot \sin \omega - (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta})(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \sin n\omega \cdot \cos \omega \} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Für den besonderen Fall $\vartheta = 0$ erhält man:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{\vartheta=0} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_{\vartheta=0} = \frac{n}{4 \cdot \sin^2 \omega} \cdot \left((e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \right)_{\vartheta=0} \sin n\omega \cdot \sin \omega.$$

Da nun $\sin n\omega$ und $\sin \omega$ in entgegengesetzten Punkten a, a' auf $F'F'$ gleiche, aber entgegengesetzte Werthe hat, so haben eben dort die Producte

$$\sin^2 \omega \text{ und } \sin n\omega \cdot \sin \omega$$

gleiche Werthe mit gleichen Zeichen; also ist

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}\right)_{\vartheta=0}$$

eindeutig und stetig. Gleiches gilt von

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)_{\vartheta=0},$$

für welchen Fall beide Ableitungen verschwinden. Für Werthe $\vartheta > 0$ überzeugt man sich leicht von der Eindeutigkeit und Stetigkeit obiger Ableitungen. Daher das Ergebniss: *„Die Functionen φ, ψ, χ sind sammt ihren ersten Ableitungen auf der gegebenen Ellipsenfläche eindeutig und stetig."*

Es erübrigt endlich die Untersuchung der Ausdrücke:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$
$$\Delta\chi = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}.$$

Die wirkliche Ausführung der angedeuteten Differentiationen würde zu sehr ungeschickten und wenig übersichtlichen Ausdrücken führen. Es bietet sich nun hier ein sehr elegantes Verfahren, diese Untersuchung abzukürzen, in der Jacobi'schen Transformationsformel dar. Hat man nämlich an Stelle der ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2 \cdots x_n$ n neue Variabeln $y_1, y_2 \cdots y_n$ eingeführt mittels der n Substitutionsgleichungen:

$$x_1 = x_1(y_1, y_2 \cdots y_n),$$
$$x_2 = x_2(y_1, y_2 \cdots y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = x_n(y_1, y_2 \cdots y_n),$$

welche der Bedingung Genüge leisten:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_h}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial x_2}{\partial y_h}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial y_h}\cdot\frac{\partial x_n}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial x_k}{\partial y_h}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = 0,$$

so gilt die Relation:

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_h^2} = \frac{1}{y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_n}\cdot\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{y_1\cdot y_2\cdots y_n}{y_i^2}\cdot\frac{\partial V}{\partial y_i}\right),$$

worin

$$y_h = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial x_\lambda}{\partial y_h}\right)^2$$

bedeutet. In unserem Falle ist $n = 2$, ferner ist

$$x_1 = x = \frac{c}{2}\cdot(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})\cdot\cos\omega,$$
$$x_2 = y = \frac{c}{2}\cdot(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})\cdot\sin\omega,$$
$$y_1 = \vartheta\ ;\ y_2 = \omega,$$

weiter ist die Bedingungsgleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial x_k}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_i} = 0$$

erfüllt; denn indem man hat:

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} = \frac{c}{2}(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \cos\omega = \frac{\partial y}{\partial \omega},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{c}{2}(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \sin\omega = -\frac{\partial y}{\partial \vartheta},$$

folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \omega} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \omega} = 0.$$

Wir können demnach die Transformationsformel anwenden. Dazu müssen wir ferner bilden:

$$y_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta}\right)^2,$$

$$y_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2,$$

woraus also sich ergiebt:

$$y_1 = y_2.$$

Dadurch vereinfacht sich die Transformationsformel zu:

$$\Delta\psi = \frac{1}{y_1 \cdot y_2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2}\right),$$

$$\Delta\chi = \frac{1}{y_1 \cdot y_2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2}\right),$$

und hierin ist

$$y_1 = y_2 = \frac{c^2}{4} \cdot (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})^2 \cdot \cos^2\omega + \frac{c^2}{4} \cdot (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})^2 \sin^2\omega.$$

Da sich durch die Differentiation ergiebt:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2} = n^2 \cdot \frac{c}{2} \cdot (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega,$$

so ist $\Delta\psi = 0$.

Ebenso findet sich:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} = n^2 \cdot \frac{c}{2} \cdot (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \sin n\omega,$$

folglich ist auch $\Delta\chi = 0$.

So hat sich in der That die Erwartung bestätigt, dass die Functionen φ, ψ, χ, auf welche die dritte Methode uns in natürlichster Weise hinleitete, den Hauptbedingungen Genüge leisten.

§ 14.

Lösung des Problems mittels der ersten Methode.

Nachdem wir in solcher Weise passende Functionen ermittelt haben, können wir die Lösung des Problems nach der ersten Methode versuchen, wie dieselbe in § 1. angezeigt ist.

Es sei also eine Ellipsenfläche gegeben, begrenzt von der durch $(\theta, \bar{\omega})$ charakterisirten Ellipse ($\bar{\omega}$ seien die den einzelnen Punkten derselben zugehörigen Winkelwerthe genannt), (ϑ, ω) seien die Coordinaten eines beliebigen, inneren Punktes. Es soll die Function Φ ermittelt werden, welche auf der gegebenen Fläche den Hauptbedingungen genügt und gegebene Randwerthe $\bar{\Phi}$ besitzt. Letztere seien vermöge der Entwickelung gegeben:

$$\bar{\Phi} = f(\omega) = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\bar{\omega} + Q_n \sin n\bar{\omega}),$$

worin die P und Q gegebene Constanten vorstellen. Wir machen für die gesuchte Function Φ einen Ansatz, indem wir aus den Functionen φ, ψ, χ, nachdem wir sie mit vorläufig noch unbestimmten Coefficienten multiplicirt, folgendes Aggregat bilden:

$$\Phi = A_0 \cdot 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{c}{2} A_n (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega + \frac{c}{2} \cdot B_n (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \sin n\omega \right).$$

Bei Zugrundelegung dieses Werthes wird:

$$\bar{\Phi} = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{c}{2} A_n (e^{n\theta} + e^{-n\theta}) \cdot \cos n\bar{\omega} + \frac{c}{2} \cdot B_n (e^{n\theta} - e^{-n\theta}) \cdot \sin n\bar{\omega} \right\}.$$

Soll dieser Werth mit dem zuvor für $\bar{\Phi} = f(\bar{\omega})$ angenommenen identisch sein, so gelten die Bedingungsgleichungen:

$$A_0 = P_0,$$

$$\frac{c}{2} \cdot A_n \cdot (e^{n\theta} + e^{-n\theta}) = P_n,$$

$$\frac{c}{2} \cdot B_n \cdot (e^{n\theta} - e^{-n\theta}) = Q_n,$$

oder

$$A_0 = P_0,$$

$$A_n = \frac{P_n}{\frac{c}{2}(e^{n\theta} + e^{-n\theta})},$$

$$B_n = \frac{Q_n}{\frac{c}{2}(e^{n\theta} - e^{-n\theta})}.$$

Diese Werthe der A und B in Φ eingesetzt, lautet die definitive Lösung der gestellten Aufgabe:

$$(12) \quad \Phi = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{P_n}{e^{n\theta} + e^{-n\theta}} \cdot (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega + \frac{Q_n}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \cdot (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \sin n\omega \right).$$

Diese Lösung stimmt mit der § 12. Gleichung (11) gefundenen völlig überein, denn für den bestimmten Punkt p im Innern der Fläche ist $\vartheta = \vartheta_p$, $\omega = \omega_p$ zu setzen.

Zus. 1. Durch die Untersuchungen des § 13. und die Uebereinstimmung der jetzt und früher gefundenen Lösung ist dargethan, dass die in Gleichung (11) gefundene Function Φ_p allen gestellten Bedingungen gerecht wird.

Zus. 2. Soll eine Function ermittelt werden, welche wieder auf der gegebenen Fläche den Hauptbedingungen Genüge leistet, zugleich aber die Bedingung erfüllt:

$$\overline{\Phi} = \text{const.} = C,$$

so ist $\Phi = C$ selbst die gesuchte Lösung. Es gilt nämlich allgemein der Satz: *„Soll eine Function Φ sammt ihren ersten Ableitungen auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ eindeutig und stetig sein, soll sie ferner auf dieser Fläche durchaus der Gleichung $\Delta\Phi = 0$ genügen und soll sie endlich am Rande dieser Fläche überall denselben Werth $\overline{\Phi} =$ const. besitzen, so wird sie auch innerhalb $\mathfrak{A}$ überall gleich* const. *sein.“*

§ 15.

Die Green'sche Function der Ellipsenfläche.

Nunmehr können wir es auch noch unternehmen, die *„dem Centralpunkte p entsprechende“* Green'sche Function $G^{(p)}$ für die Ellipsenfläche zu bestimmen. Wie gleichfalls in der Einleitung (§ 1.) bemerkt wurde, ist die Green'sche Function $G^{(p)}$ durch folgende Eigenschaften charakterisirt: im Innern der gegebenen Fläche $\mathfrak{A}$ muss G, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ eindeutig und stetig sein, $\Delta G = 0$ werden und endlich müssen die Randwerthe G_s mit den Logarithmen der von dem inneren Punkte p aus nach den Randpunkten gezogenen Radiivectores gleichwerthig sein. — Wir wollen also mit Bezug auf einen beliebig gegebenen, inneren Punkt p (ϑ_p, ω_p) die Green'sche Function für die Ellipsenfläche berechnen. Die Coordinaten der Peripheriepunkte seien wie zuvor θ, $\overline{\omega}$, die eines beliebigen Punktes ϑ, ω. Eine Function, welche auf der Ellipsenfläche den Hauptbedingungen genügt, ist ein Aggregat der Functionen φ, ψ, χ. Daher können wir von vornherein für die gesuchte Function $G^{(p)}$ den Ansatz machen:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{c}{2} A_n (e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cos n\omega + \frac{c}{2} B_n (e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \sin n\omega \right).$$

Dieses den ersten beiden Bedingungen für G entsprechende Aggregat wird zur Green'schen Function $G^{(p)}$ selbst, wenn es noch gleichzeitig der Bedingung genügt:

$$G_s^{(p)} = L_{ps} = \log \frac{e^\Theta c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\Theta}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\bar{\omega} + \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\Theta}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega \right).$$

Das angenommene Aggregat wird aber für den Rand:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{c}{2} A_n (e^{n\Theta} + e^{-n\Theta}) \cos n\bar{\omega} + \frac{c}{2} B_n (e^{n\Theta} - e^{-n\Theta}) \sin n\bar{\omega} \right).$$

Soll dieser Werth mit dem von $L_{p\bar{s}}$ identisch sein, so müssen die Coefficienten A und B, über die wir verfügen können, so bestimmt werden, dass der Gleichung für $G_s^{(p)}$ oder L_{ps} durch die letzte Gleichung Genüge geleistet wird. So findet man:

$$A_0 = \log \frac{e^\Theta c}{2},$$

$$A_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\Theta} + e^{-n\Theta}} \cdot \frac{\cos n\omega_p}{\frac{c}{2} \cdot e^{n\Theta}},$$

$$B_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\Theta} - e^{-n\Theta}} \cdot \frac{\sin n\omega_p}{\frac{c}{2} \cdot e^{n\Theta}}.$$

Indem wir bei solcher Bestimmung der Coefficienten A und B der dritten Bedingung für G gerecht zu werden im Stande sind, erhalten wir durch Einsetzen der gefundenen Werthe der A und B in das Aggregat als Ausdruck der Green'schen Function bei der Ellipsenfläche den Werth:

$$G_{(\vartheta,\omega)}^{(p)} = \log \frac{e^\Theta c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\Theta} + e^{-n\Theta}} \cdot \frac{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}}{e^{n\Theta}} \cdot \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega$$
$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\Theta} - e^{-n\Theta}} \cdot \frac{e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}}{e^{n\Theta}} \cdot \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega,$$

wo ϑ_p, ω_p constante Parameter, ϑ, ω die Argumente der Function sind. Nennt man (ϑ_p, ω_p) den Centralpunkt, (ϑ, ω) den Argumentalpunkt, so sieht man, dass die gefundene Function in Bezug auf Argumental- und Centralpunkt völlig symmetrisch ist. Wie sich zeigen lässt, ist dieses eine allgemeine Eigenschaft der Green'schen Function.

§ 16.

Lösung nach der zweiten Methode.

Nachdem wir im vorstehenden § die Green'sche Function ermittelt, können wir nunmehr auch die zweite der in § 1. zur Lösung des

gestellten Problems angegebenen Methoden anwenden. Bei letzterer spielt der Ausdruck:

$$\frac{dG_s}{dn} - \frac{dL_{ps}}{dn} = \frac{dG^{(p)}_{(\vartheta,\bar\omega)}}{dn} - \frac{dL^{(p)}_{(\vartheta,\omega}}{dn}$$

eine wichtige Rolle. Um denselben zu bilden, bedenke man, dass, da das von uns benützte System krummliniger Coordinaten orthogonal ist, das Wachsthum der ϑ senkrecht auf der Richtung des Wachsthums der ω erfolgt. Hieraus erhellt sofort, wenn man sich des § 3. p. 322 über ϑ Gesagten erinnert, dass

$$\frac{d\,\cdot\cdot}{dn} = -\frac{d\,\cdot\cdot}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dn} = -\frac{d\,\cdot\cdot}{d\vartheta}\frac{d\omega}{ds},$$

indem n die innere Normale bedeutet.

Aus dem Werthe von $G^{(p)}_{(\vartheta,\omega)}$ folgt:

$$-\left(\frac{dG^{(p)}_{\vartheta,\omega}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\theta,\omega=\bar\omega} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{n\vartheta_p}+e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta}+e^{-n\theta}}\cdot\frac{e^{n\theta}-e^{-n\theta}}{e^{n\theta}}\cdot\cos n\omega_p\cdot\cos n\bar\omega$$
$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{n\vartheta_p}-e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta}-e^{-n\theta}}\cdot\frac{e^{n\theta}+e^{-n\theta}}{e^{n\theta}}\cdot\sin n\omega_p\cdot\sin n\bar\omega\,.$$

Ferner erhält man aus (VI) p. 327:

$$\left(\frac{dL^{(p)}_{\vartheta,\omega}}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\theta,\omega=\bar\omega} = 1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{e^{n\vartheta_p}+e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta}}\cos n\omega_p\cos n\bar\omega\right.$$
$$\left.+\frac{e^{n\vartheta_p}-e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta}}\sin n\omega_p\sin n\bar\omega\right\}.$$

Sonach ergiebt sich schliesslich:

$$-\left(\frac{\partial G^{(p)}_{\vartheta,\omega}}{\partial\vartheta}-\frac{\partial L^{(p)}_{\vartheta,\omega}}{\partial\vartheta}\right)_{\vartheta=\theta,\omega=\bar\omega} = 1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{e^{n\vartheta_p}+e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta}+e^{-n\theta}}\cdot\cos n\omega_p\cdot\cos n\bar\omega\right.$$
$$\left.+\frac{e^{n\vartheta_p}-e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta}-e^{-n\theta}}\cdot\sin n\omega_p\cdot\sin n\bar\omega\right\}.$$

Die weitere Durchführung der Rechnung führt zu der auf § 12. p. 341 für $\eta^{(p)}_s$ gefundenen Formel.

§ 17.

Methode des arithmetischen Mittels.

I. Berechnung des Winkelincrementes $d\varphi$.

Bei Anwendung dieser Methode kommt es zuvörderst darauf an, den Betrag des unendlich kleinen Winkels $d\varphi$ zu berechnen, welchen die von dem gegebenen inneren Punkte p (a, b rechtw. Coord.) nach den Endpunkten x, y; $x+dx$, $y+dy$ des Curvenelementes ds ge-

zogenen Radiivectores einschliessen. Um jede Zweideutigkeit von vornherein zu entfernen, setzen wir fest, $d\varphi$ besitze einen *positiven* Werth, wenn der von p nach x, y gezogene Radiusvector E bei der Beschreibung des Curvenelementes ds — bei welcher ja doch gleichzeitig jenes Winkelincrement $+ d\varphi$ erzeugt wird — eine *positive* Drehung ausführen muss.

Der Radiusvector E, für welchen

$$E^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

bilde mit der Abscissenachse den Winkel φ, so dass

$$\cos \varphi = \frac{x - a}{E},$$

$$\sin \varphi = \frac{y - b}{E}.$$

Um $d\varphi$ zu bilden, führen wir als neue independente Variable die Richtung μ ein und bilden den Richtungsdifferentialquotienten:

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\mu}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{y - b}{E^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x - a}{E^2},$$

ferner ist, wenn ν die zu μ senkrechte, mit der *äusseren* Normalen der Fläche übereinstimmende Richtung bezeichnet,

$$\frac{dx}{d\mu} = \cos(\mu, x) = - \cos(\nu, y) = - \frac{dy}{d\nu},$$

$$\frac{dy}{d\mu} = \cos(\mu, y) = \cos(\nu, x) = \frac{dx}{d\nu}.$$

Folglich ist:

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{x - a}{E^2} \cdot \frac{dx}{d\nu} + \frac{y - b}{E^2} \cdot \frac{dy}{d\nu},$$

oder

$$\frac{d\varphi}{d\mu} = \frac{d \cdot \log E}{d\nu}.$$

Nach obiger Bestimmung über ν müssen wir bei Einführung unseres Coordinatensystems dafür ϑ setzen, für μ aber ω. Daher ist endlich:

$$d\varphi = \frac{d \cdot \log E}{d\vartheta} \cdot d\omega = (ds)_p, \quad \text{s. § 1. p. 321.}$$

Sind die Coordinaten des inneren Punktes p: ϑ_p, ω_p, so ist:

$$\log E = \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta}} \cdot \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta}} \cdot \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega \right\},$$

$$\frac{d\cdot\log E}{d\vartheta} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{e^{n\vartheta_p}+e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta}}\cdot\cos n\omega_p\cdot\cos n\omega + \frac{e^{n\vartheta_p}-e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta}}\cdot\sin n\omega_p\cdot\sin n\omega\right\}.$$

wofür wir zuweilen kürzer schreiben:

$$\frac{d\cdot\log E}{d\vartheta} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\vartheta}\cdot(C_n\cos n\omega + D_n\sin n\omega),$$

indem wir setzen:

$$C_n = (e^{n\vartheta_p}+e^{-n\vartheta_p})\cdot\cos n\omega_p,$$
$$D_n = (e^{n\vartheta_p}-e^{-n\vartheta_p})\cdot\sin n\omega_p.$$

II. Berechnung der Functionen $u_p, u_p' \cdots v, v' \cdots$.

Wir haben nun laut § 1. p. 321 zu bilden:

$$u_p = \frac{1}{2\pi}\int f\cdot(ds)_p,$$
$$v = 2u_s - f,$$
$$u_p' = \frac{1}{2\pi}\int v\cdot(ds)_p,$$
$$v' = 2u_s' - v \quad \text{u. s f. u. s. f.},$$

worin f die vorgeschriebenen Randwerthe der gesuchten Functionen, $(ds)_p = d\varphi$ das in dem ersten Abschnitte dieses § berechnete Winkelincrement, endlich u_s der „Randwerth" von u_p.

Nehmen wir nun für die Randwerthe folgende Entwickelung:

$$f = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(P_n\cos n\omega + Q_n\sin n\omega)$$

an, so ist

$$u_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\cdot\frac{d\cdot\log E}{d\vartheta}\cdot d\omega,$$

d. i.

$$\text{(A)}\quad u_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_0+\sum_{n=1}^{n=\infty}(P_n\cos n\omega+Q_n\sin n\omega)\right\}\left\{1+\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-n\vartheta}(C_n\cos n\omega+D_n\sin n\omega)\right\}d\omega,$$

$$u_p = P_0+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-n\vartheta}\cdot\left\{P_n(e^{n\vartheta_p}+e^{-n\vartheta_p})\cos n\omega_p+Q_n(e^{n\vartheta_p}-e^{-n\vartheta_p})\sin n\omega_p\right\},$$

$$(B)\quad 2u_s = 2P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{P_n(1+e^{-2n\vartheta})\cos n\omega + Q_n(1-e^{-2n\vartheta})\sin n\omega\right\},$$

$$v = 2u_s - f = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}(P_n\cos n\omega - Q_n\sin n\omega)\cdot e^{-2n\vartheta},$$

$$(C)\quad u'_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-2n\vartheta}\cdot(P_n\cos n\omega - Q_n\sin n\omega)\right\}\left\{1 + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-n\vartheta}(C_n\cos n\omega + D_n\sin n\omega)\right\}d\omega,$$

$$u'_p = P_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-3n\vartheta}\left(P_n(e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p})\cos n\omega_p - Q_n(e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p})\sin n\omega_p\right),$$

$$(D)\quad 2u'_s = 2P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{P_n(e^{-2n\vartheta} + e^{-4n\vartheta})\cos n\omega - Q_n(e^{-2n\vartheta} - e^{-4n\vartheta})\sin n\omega\right\},$$

$$v' = 2u'_s - v = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-4n\vartheta}(P_n\cos n\omega + Q_n\sin n\omega)$$

u. s. f. u. s. f. Man übersieht aus den Gleichungen (A), (C) das Bildungsgesetz der Functionen u, aus (B), (D) das der v.

III. Lösung des Problems.

Die gesuchte Function Φ_p ist gegeben durch

$$\Phi_p = v^{(2n+1)} + 2\left\{u_p - u_p' + u_p'' - u_p''' + - \cdots - u_p^{(2n+1)}\right\},$$

wo $v^{(2n+1)}$ die Constante ist, gegen welche für $n=\infty$ $v^{(2n+1)}$ convergirt. Aus den Werthen der v ersieht man, dass für $n=\infty$ die Summen verschwinden, also ist

$$v^{(2n+1)} = P_0.$$

Ferner erhalten wir:

$$+2u_p = 2P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-n\vartheta}\cdot P_n(e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p})\cdot\cos n\omega_p + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-n\vartheta}\cdot Q_n(e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p})\cdot\sin n\omega_p,$$

$$-2u'_p = -2P_0 - \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-3n\vartheta}\cdot P_n(e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p})\cdot\cos n\omega_p + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-3n\vartheta}\cdot Q_n(e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p})\cdot\sin n\omega_p,$$

$$+2u''_p = +2P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-5n\vartheta}\cdot P_n(e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p})\cdot\cos n\omega_p + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-5n\vartheta}\cdot Q_n(e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p})\cdot\sin n\omega_p,$$

$$-2u'''_p = -2P_0 - \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-7n\vartheta}\cdot P_n(e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p})\cdot\cos n\omega_p + \sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-7n\vartheta}\cdot Q_n(e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p})\cdot\sin n\omega_p$$

etc. etc.

Bei der Addition verschwinden die Constanten; bei der Vereinigung der Summen beachte man, dass

$$e^{-n\vartheta}\{1 - e^{-2n\vartheta} + e^{-4n\vartheta} - e^{-6n\vartheta} + - \cdots\} = \frac{1}{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}},$$

$$e^{-n\vartheta}\{1 + e^{-2n\vartheta} + e^{-4n\vartheta} + e^{-6n\vartheta} + \quad \cdots\} = \frac{1}{e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}}.$$

Daher ist endlich

$$\Phi_p = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(P_n \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}} \cdot \cos n\omega_p + Q_n \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}} \cdot \sin n\omega_p\right)$$

die gesuchte Function, welche mit den früheren Lösungen auch formal völlig identisch wird, sobald der Parameter ϑ der begrenzenden Ellipse mit θ vertauscht wird.

§ 18.

Untersuchung gewisser sechs Functionen.

In § 13. wurde gezeigt, dass es drei Functionen giebt,

$$\varphi = 1,$$

$$\psi = \frac{c}{2}(e^{n\vartheta} + e^{-n\vartheta}) \cdot \cos n\omega,$$

$$\chi = \frac{c}{2}(e^{n\vartheta} - e^{-n\vartheta}) \cdot \sin n\omega,$$

welche selbst, wie ihre ersten Ableitungen $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ $\cdots$, auf einer Ellipsenfläche eindeutig und stetig sind, sowie der Gleichung $\Delta \cdots = 0$ genügen und welche daher nach der in § 1. angedeuteten ersten Methode zur Lösung der Hauptaufgabe verwendet werden konnten (cf. § 14.). — Es legen nun die Entwickelungen des § 5. über den log der Entfernung die Frage nahe, wie verhalten sich auf einer Ellipsenfläche folgende sechs Functionen:

$$\varphi_1 = 1, \qquad \varphi_2 = \log\frac{e^{\vartheta}c}{2},$$

$$\psi_1 = \frac{c}{2} \cdot e^{n\vartheta} \cdot \cos n\omega, \qquad \psi_2 = \frac{c}{2} \cdot e^{-n\vartheta} \cdot \cos n\omega,$$

$$\chi_1 = \frac{c}{2} \cdot e^{n\vartheta} \cdot \sin n\omega, \qquad \chi_2 = \frac{c}{2} \cdot e^{-n\vartheta} \cdot \sin n\omega,$$

Unter Rücksichtnahme auf die in § 13. niedergelegte Untersuchung über die Eindeutigkeit und Stetigkeit von $\cos n\omega$ und $\sin n\omega$ auf der Ellipsenfläche erhellt, dass

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \psi_1,\ \psi_2$$

selbst auf einer solchen Fläche eindeutig und stetig sind, während χ_1 und χ_2 für $\vartheta = 0$, d. i. die Verbindungslinie der Brennpunkte zweideutig und unstetig werden.

Es handelt sich zweitens um Beantwortung der gleichen Frage

betreffs der ersten Ableitungen obiger Functionen nach x und y. Für φ_1 bedarf es keiner weiteren Untersuchung. Für φ_2 findet man:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \cos\omega}{\frac{c}{2}\left\{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega\right\}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \sin\omega}{\frac{c}{2}\left\{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega\right\}},$$

Für $\vartheta = 0$ ist der erstere Ausdruck eindeutig und stetig, aber nicht ebenso $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Weiter ist:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{n \cdot e^{n\vartheta}}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega}\left\{(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \cos n\omega \cdot \cos\omega + (e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}) \cdot \sin n\omega \cdot \sin\omega\right\},$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{n \cdot e^{n\vartheta}}{e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega}\left\{(e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \cos n\omega \cdot \sin\omega - (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}) \cdot \sin n\omega \cdot \cos\omega\right\},$$

daher ist wegen des Productes $\sin n\omega \cdot \sin\omega$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)_{\vartheta=0}$$

eindeutig und stetig, hingegen

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)_{\vartheta=0}$$

zweideutig und unstetig.

Ebenso findet man, dass durchaus auf der Ellipsenfläche, d. h. auch für $\vartheta = 0$, eindeutig und stetig sind:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial y},$$

zweideutig und unstetig hingegen:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \chi_2}{\partial x}.$$

Endlich erübrigt die Untersuchung, ob unsere Functionen der Gleichung $\Delta \cdots = 0$ Genüge leisten. Hierbei erinnere man sich nun, dass bei Einführung der Coordinaten ϑ und ω an Stelle von x und y laut § 13. nach der Jacobi'schen Transformationsformel, falls man von einem gewissen Factor absieht, die Gleichung gilt:

$$\Delta_{x,y} \cdots = \Delta_{\vartheta,\omega} \cdots,$$

woraus $\Delta\varphi_1 = 0$, $\Delta\varphi_2 = 0$ u. s. f. folgt.

Sonach führt dies zu dem Ergebnisse: „*Die Functionen φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, χ_1, χ_2 genügen sämmtlich der Gleichung $\Delta_{x,y} \cdots = 0$; was aber ihre Eindeutigkeit und Stetigkeit auf der ganzen Ellipsenfläche, sowie dieselben Eigenschaften ihrer ersten Ableitungen betrifft, so sind für*

$\vartheta = 0$, *d. h. längs der Verbindungslinie der Brennpunkte* χ_1, χ_2, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial \chi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \chi_2}{\partial x}$ *zweideutig und unstetig.*"

Hieraus erhellt sofort, dass und warum man, um die Lösung des Wärmeproblems für die *volle* Ellipsenfläche zu finden, nicht etwa einzelne der Functionen ψ_1, ψ_2, χ_1, χ_2 benützen darf, sondern vielmehr ausser $\varphi = \varphi_1 = 1$ die Aggregate

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \chi = \chi_1 - \chi_2$$

in Anwendung bringen muss.

§ 19.

Lösung des Wärmeproblems für eine von 2 confocalen Ellipsen begrenzte Ringfläche.

Handelt es sich aber um die Aufgabe: „*Gegeben sei eine von den 2 confocalen Ellipsen* $\vartheta = \theta_1$ *und* $\vartheta = \theta_2$ *gebildete Ringfläche. Es soll eine Function* Φ *ermittelt werden, welche sammt ihren ersten Ableitungen auf der gegebenen Ringfläche eindeutig und stetig ist, für welche* $\Delta\Phi = 0$ *wird und welche an den Rändern vorgeschriebene Werthe besitzt,*" so wird man hier unter Anwendung der ersten Methode (§ 1.) alle sechs Functionen ohne Bedenken einzeln benützen dürfen.

Die vorgeschriebenen Randwerthe seien gegeben durch folgende allgemeine Entwickelungen, in denen θ_1, ω_1 die Coordinaten eines Punktes der inneren, θ_2, ω_2 eines Punktes der äusseren Peripherie bedeuten:

$$\bar{\Phi}_{\theta_1} = P_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (P_n \cos n\omega_1 + Q_n \sin n\omega_1),$$

$$\Phi_{\theta_2} = \mathfrak{P}_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\mathfrak{P}_n \cos n\omega_2 + \mathfrak{Q}_n \sin n\omega_2).$$

Wir können nun folgenden Ansatz für die gesuchte Function Φ machen, welcher ohne Weiteres auf der Ringfläche die Hauptbedingungen erfüllt:

$$\Phi = A_0 \cdot 1 + B_0 \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c}{2} \left[(A_n e^{n\vartheta} + B_n e^{-n\vartheta}) \cos n\omega + (C_n e^{n\vartheta} + D_n e^{-n\vartheta}) \sin n\omega \right].$$

Die unbestimmten Coefficienten lassen sich ermitteln, wenn wir die Randwerthe dieser Function Φ bilden. Offenbar ist:

$$\bar{\Phi}_{\theta_1} = A_0 + B_0 \log \frac{e^{\theta_1} c}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c}{2} \left[(A_n e^{n\theta_1} + B_n e^{-n\theta_1}) \cos n\bar{\omega}_1 + (C_n e^{n\theta_1} + D_n e^{-n\theta_1}) \sin n\bar{\omega}_1 \right],$$

$$\Phi_{\theta_2} = A_0 + B_0 \log \frac{e^{\theta_2} c}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c}{2} \left[(A_n e^{n\theta_2} + B_n e^{-n\theta_2}) \cos n\bar{\omega}_2 + (C_n e^{n\theta_2} + D_n e^{-n\theta_2}) \sin n\bar{\omega}_2 \right].$$

Aus der Vergleichung dieser und der obigen Ausdrücke fliessen folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} A_0 + B_0 \log \frac{e^{\theta_1} c}{2} = P_0, \\ A_0 + B_0 \log \frac{e^{\theta_2} c}{2} = \mathfrak{P}_0, \end{cases}$$

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} A_n e^{n\theta_1} + B_n e^{-n\theta_1} = P_n : \frac{c}{2}, \\ A_n e^{n\theta_2} + B_n e^{-n\theta_2} = \mathfrak{P}_n : \frac{c}{2}, \end{cases}$$

$$\text{(III.)} \quad \begin{cases} C_n e^{n\theta_1} + D_n e^{-n\theta_1} = Q_n : \frac{c}{2}, \\ C_n e^{n\theta_2} + D_n e^{-n\theta_2} = \mathfrak{Q}_n : \frac{c}{2}. \end{cases}$$

Berechnet man hieraus die A, B, C, D und setzt die gefundenen Werthe in die Formel für Φ ein, so erhält man die Lösung des Problems in der Gestalt:

$$\Phi = \frac{\mathfrak{P}_0 \cdot \left(\log \frac{e^{\vartheta} c}{2} - \log \frac{e^{\theta_1} c}{2} \right) + P_0 \left(\log \frac{e^{\theta_2} c}{2} - \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} \right)}{\log \frac{e^{\theta_2} c}{2} - \log \frac{e^{\theta_1} c}{2}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{P}_n \left(e^{n(\vartheta - \theta_1)} - e^{-n(\vartheta - \theta_1)} \right) + P_n \left(e^{n(\theta_2 - \vartheta)} - e^{-n(\theta_2 - \vartheta)} \right)}{e^{n(\theta_2 - \theta_1)} - e^{-n(\theta_2 - \theta_1)}} \cos n\omega$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{Q}_n \left(e^{n(\vartheta - \theta_1)} - e^{-n(\vartheta - \theta_1)} \right) + Q_n \left(e^{n(\theta_2 - \vartheta)} - e^{-n(\theta_2 - \vartheta)} \right)}{e^{n(\theta_2 - \theta_1)} - e^{-n(\theta_2 - \theta_1)}} \sin n\omega.$$

§ 20.

Die Green'sche Function der Ringfläche.

Soll mit Bezug auf den innerhalb der Ringfläche gelegenen festen Punkt ϑ_p, ω_p die Green'sche Function $G^{(p)}$ ermittelt werden, so tritt zu den „*Hauptbedingungen*“ die Bedingung $G_s^{(p)} = L_{p_s}$ für die Randwerthe hinzu (cf. § 15.). Man bildet daher wieder zunächst ein Aggregat der sechs Functionen:

$$G = A_0 + B_0 \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c}{2} \left[(A_n e^{n\vartheta} + B_n e^{-n\vartheta}) \cos n\omega + (C_n e^{n\vartheta} + D_n e^{-n\vartheta}) \sin n\omega \right]$$

und bestimmt die Coefficienten A, B, C, D mittels der Bedingungsgleichungen:

$$L_{p,\theta_1} = \log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\theta_1} + e^{-n\theta_1}}{e^{n\vartheta_p}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\bar{\omega}_1 + \frac{e^{n\theta_1} - e^{-n\theta_1}}{e^{n\vartheta_p}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega_1 \right\},$$

$$L_{p,\theta_2} = \log \frac{e^{\theta_2} c}{2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta_2}} \cos n\omega_p \cdot \cos n\bar{\omega}_2 + \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta_2}} \sin n\omega_p \cdot \sin n\bar{\omega}_2 \right\}$$

aus folgenden sich leicht ergebenden Ausdrücken:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} A_0 + B_0 \log \frac{e^{\theta_1} c}{2} = \log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2}, \\ A_0 + B_0 \log \frac{e^{\theta_2} c}{2} = \log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2}, \end{cases}$$

$$\text{(II.)} \quad \begin{cases} \frac{c}{2} (A_n e^{n\theta_2} + B_n e^{-n\theta_1}) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\theta_1} + e^{-n\theta_1}}{e^{n\vartheta_p}} \cdot \cos n\omega_p, \\ \frac{c}{2} (A_n e^{n\theta_2} + B_n e^{-n\theta_2}) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} + e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta_2}} \cdot \cos n\omega_p, \end{cases}$$

$$\text{(III.)} \quad \begin{cases} \frac{c}{2} (C_n e^{n\theta_1} + D_n e^{-n\theta_1}) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\theta_1} - e^{-n\theta_1}}{e^{n\vartheta_p}} \cdot \sin n\omega_p, \\ \frac{c}{2} (C_n e^{n\theta_2} + D_n e^{-n\theta_2}) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{n\vartheta_p} - e^{-n\vartheta_p}}{e^{n\theta_2}} \cdot \sin n\omega_p. \end{cases}$$

Die hieraus folgenden Werthe einsetzend, findet man:

$$G^{(p)}_{(\vartheta,\omega)} = \frac{\log \frac{e^{\theta_2} c}{2} \cdot \left(\log \frac{e^{\vartheta} c}{2} - \log \frac{e^{\theta_1} c}{2} \right) + \log \frac{e^{\vartheta_p} c}{2} \cdot \left(\log \frac{e^{\theta_2} c}{2} - \log \frac{e^{\vartheta} c}{2} \right)}{\log \frac{e^{\theta_2} c}{2} - \log \frac{e^{\theta_1} c}{2}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{2n\vartheta} \cdot (e^{2n\theta_1} - e^{2n\vartheta_p}) + e^{2n\theta_1} \cdot (e^{2n\vartheta_p} - e^{2n\theta_2}) - (e^{2n\theta_2} - e^{2n\theta_1})}{n \cdot e^{n(\vartheta+\vartheta_p)} \cdot (e^{2n\theta_2} - e^{2n\theta_1})} \cos n\omega_p \cdot \cos n\omega +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{2n\vartheta} \cdot (e^{2n\theta_1} - e^{2n\vartheta_p}) + e^{2n\theta_1} \cdot (e^{2n\vartheta_p} - e^{2n\theta_2}) + (e^{2n\theta_2} - e^{-2n\theta_1})}{n \cdot e^{n(\vartheta+\vartheta_p)} \cdot (e^{2n\theta_2} - e^{2n\theta_1})} \sin n\omega_p \cdot \sin n\omega.$$

On the group of Points G_4^1 on a sextic curve with five double points.

By A. Cayley.

The present note relates to a special group of points considered incidentally by M. M. Brill & Nöther in their paper "Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie" Annalen t. VII, pp. 268—310 (1874).

I recall some of the fundamental notions: we have a basis-curve which to fix the ideas may be taken to be of the order $n, = p + 1$, with $\frac{1}{2}p(p-3)$ dps, and therefore of the "Geschlecht" or deficiency p; any curve of the order $n-3, = p-2$ passing thro' the $\frac{1}{2}p(p-3)$ dps is said to be an adjoint curve. We may have on the basis-curve a special group G_Q^q of Q points ($Q \not> 2p-2$); viz. this is the case when the Q points are such that every adjoint curve thro' $Q-q$ of them (that is every curve of the order $p-2$ thro' $\frac{1}{2}p(p-3)$ dps and the $Q-q$ points) passes thro' the remaining q points of the group: the number q may be termed the "speciality" of the group: if $q = 0$ the group is an ordinary one.

It may be observed that a special group G_Q^q is chiefly noteworthy in the case where $Q-q$ is so small that the adjoint curve is not completely determined: thus if $p = 5$ (viz. if the basis-curve be a sextic with 5 dps), then we may have a special group G_6^2, but there is nothing remarkable in this; the 6 points are intersections with the sextic of an arbitrary cubic thro' the 5 dps (the cubic of course intersects the sextic in the 5 dps counting as 10 points, and in 8 other points) and such cubic is completely determined by means of the 5 dps and any 4 of the 6 points. But contrariwise there is some thing remarkable in the group G_4^1 about to be considered: viz. we have here on the sextic 4 points, such that every cubic thro' the 5 dps and thro' 3 of the 4 points (thro' 8 points in all) passes thro' the remaining one of the 4 points.

The whole number of intersections of the basis-curve with an adjoint, exclusive of the dps counting as $p(p-3)$ points, is of course $= 2p-2$: hence an adjoint thro' the Q points of a group G_Q^q besides meets the basis-curve in $R, = 2p-2-Q$ points; we have then the "Riemann-Roch" theorem that these R points form a special group G_R^r, where

$$Q + R = 2p - 2$$

(as just mentioned),

$$Q - R = 2q - 2r;$$

viz. dividing in any manner the $2p - 2$ intersections of the basis-curve by an adjoint into groups of Q and R points respectively, these will be special groups (or at least one of them will be a special group) G_Q^q, G_R^r, such that their specialities q, r are connected by the foregoing relation $Q - R = 2q - 2r$.

The Authors give p. 293 a Table showing for a given basis-curve (or given value of p) and for a given value of r the least value of R, and the corresponding values of q, Q: this table is conveniently expressed in the following form.

Least value of

$$R = p - \frac{p}{r+1} + r,$$

and then

$$q = \frac{p}{r+1} - 1,$$

$$Q = p + \frac{p}{r+1} - r - 2,$$

where $\frac{p}{r+1}$ denotes the integer equal to or next less than the fraction.

It is I think worth while to present the table in the more developed form:

			$r =$					
n	p	Dps	1	2	3	4	5	6
4	3	0	G_3^1	G_4^2	.	.	.	.
			G_1^0	G_0^0	.	.	.	.
5	4	2	G_3^1	G_5^2	G_6^3	.	.	.
			G_3^1	G_1^0	G_0^0	.	.	.
6	5	5	G_4^1	G_6^2	G_7^3	G_8^4	.	.
			G_4^1	G_2^0	G_1^0	G_0^0	.	.
7	6	9	G_4^1	G_6^2	G_8^3	G_9^4	G_{10}^5	.
			G_6^2	G_4^1	G_2^0	G_1^0	G_0^0	.
8	7	14	G_5^1	G_7^2	G_9^3	G_{10}^4	G_{11}^5	G_{12}^6
			G_7^2	G_5^1	G_3^0	G_2^0	G_1^0	G_0^0
⋮								

where the table shows for any given values of p, r the values of $\frac{G_R^r}{G_Q^q}$.

I recur to the case $p = 5$, the group G_4^1, which is the subject of the present note: viz. we have here a sextic curve with 5 dps, and on it a group of 4 points G_4^1, such that every cubic thro' the 5 dps and thro' 3 points of the group (in all 8 points) passes thro' the remaining 1 point.

M. M. Brill and Nöther show (by consideration of a rational transformation of the whole figure) that given 2 points of the group, it is possible, and that in 5 different ways, to determine the remaining 2 points of the group.

I remark that the 5 dps and the 4 points of the group form "an ennead" or system of the nine intersections of two cubic curves: and that the question is, given the 5 dps and 2 points on the sextic, to show how to determine on the sextic a pair of points forming with the 7 points an ennead: and to show that the number of solutions is $= 5$.

We have the following "Geiser-Cotterill" theorem:

If seven of the points of an ennead are fixed, and the eighth point describes a curve of the order n passing $a_1, a_2 \cdots a_7$ times thro' the seven points respectively, then will the ninth point describe a curve of the order ν passing $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_7$ times thro' the seven points respectively: where

$$\begin{aligned} \nu &= 8n - 3\Sigma a, \quad \text{and conversely } n = 8\nu - 3\Sigma\alpha, \\ \alpha_1 &= 3n - a_1 - \Sigma a, \qquad\qquad a_1 = 3\nu - \alpha_1 - \Sigma\alpha, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ \alpha_7 &= 3n - a_7 - \Sigma a, \qquad\qquad a_7 = 3\nu - \alpha_7 - \Sigma\alpha, \end{aligned}$$

(Geiser, Crelle-Borchardt t. 67 (1867) pp. 78–90; the complete form, as just stated, and which was obtained by Mr Cotterill, has not I believe been published): and also Geiser's theorem "the locus of the coincident eighth and ninth points is a sextic passing twice thro' each of the seven points."

The sextic and the curve n intersect in $6n$ points among which are included the seven points counting as $2\Sigma a$ points: the number of the remaining points is $= 6n - 2\Sigma a$. Similarly the sextic and the curve ν intersect in 6ν points among which are included the seven points counting as $2\Sigma\alpha$ points, the number of the remaining points is $6\nu - 2\Sigma\alpha$ $(= 6n - 2\Sigma a)$. The points in question are, it is clear, common intersections of the sextic, and the curves n, ν: viz. of the intersections of the curves n, ν, a number $6n - 2\Sigma a$, $= 6\nu - 2\Sigma\alpha$, $= 3n + 3\nu - \Sigma a - \Sigma\alpha$ lie on the sextic.

The curves n, ν intersect in $n\nu$ points, among which are included the seven points counting $\Sigma a\alpha$ times: the number of the remaining intersections is therefore $n\nu - \Sigma a\alpha$, but among these are included

the $3n + 3\nu - \Sigma a - \Sigma\alpha$ points on the sextic; omitting these there remain $n\nu - 3(n + \nu) - \Sigma a\alpha + \Sigma a + \Sigma\alpha$ points, or what is the same thing $(n - 3)(\nu - 3) - \Sigma(a - 1)(\alpha - 1) - 2$ points: it is clear that these must form pairs such that the eighth point being either point of a pair the ninth point will be the remaining point of the pair: the number of pairs is of course

$$\tfrac{1}{2}[(n - 3)(\nu - 3) - \Sigma(a - 1)(\alpha - 1) - 2],$$

and we have thus the solution of the question, given the seven points to determine the number of pairs of points on the curve n (or on the curve ν) such that each pair may form with the seven points an ennead.

In particular if $n = 6$; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 = 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ respectively, viz. if the curve be a sextic having 5 of the points for dps, and the remaining two for simple points, then we find $\nu = 12$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 = 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5$ respectively, and the number of pairs is

$$= \tfrac{1}{2}[3 \cdot 9 - 5(2 - 1)(4 - 1) - 2], \quad = \tfrac{1}{2}(27 - 15 - 2), \quad = 5,$$

viz. starting with the 5 dps and any 2 points of the group G_4^1 we can in 5 different ways determine the remaining 2 points of the group.

In reference to the number $3p - 3$ of parameters in the curves belonging to a given value of p, it may be remarked as follows: such a curve is rationally transformable into a curve of the order $p + 1$ with $\frac{1}{2}p(p - 3)$ dps, and therefore containing $\frac{1}{2}(p + 1)(p + 4)$, $- \frac{1}{2}p(p - 3)$, $= 4p + 2$ parameters. Employing an arbitrary homographic transformation to establish any assumed relations between the parameters, the number is diminished to $4p + 2 - 8$, $= 4p - 6$; and again employing a rational transformation by means of adjoint curves of the order $p - 2$ drawn thro' the dps and $p - 3$ points of the curve — thereby transforming the curve into one of the same order $p + 1$ and deficiency p — then assuming that the $p - 3$ parameters (or constants on which depend the positions of the $p - 3$ points) can be disposed of so as to establish $p - 3$ relations between the parameters and so further diminish the number by $p - 3$, the required number of parameters will finally be $4p - 6 - (p - 3) = 3p - 3$.

Cambridge 26th October 1874.

Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Ich habe mich entschlossen, diese Fortsetzung meiner Untersuchungen über das Unendlichwerden der Functionen*) in *deutscher* Sprache zu veröffentlichen, nachdem ich meine Scheu überwunden, das Wort „unendlich", wie die Franzosen ihr infini, substantivisch zu gebrauchen**). Ich schmeichle mir sogar, durch dieses „Unendlich" unseren mathematischen Wortschatz in dankenswerther Weise zu bereichern.

In den erwähnten Untersuchungen habe ich die verschiedenen Unendlich der Functionen nach ihrer Grösse unterschieden, so dass sie ein Grössengebiet (das infinitäre) bilden, mit der Festsetzung, dass das Unendlich von $\varphi(x)$ grösser als das von $\psi(x)$ oder ihm gleich angesehen wird (in Zeichen: $\varphi(x) \succ \psi(x)$, $\varphi(x) \backsim \psi(x)$, Relationen, die ich infinitäre Ungleich- oder Gleichheiten nenne), je nachdem der Quotient $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ unendlich oder endlich ist. Es tritt also im infinitären Grössengebiet der Quotient an die Stelle der Differenz im gemeinen Zahlengebiet. Zwischen beiden Gebieten besteht, wie ich in der ersten cit. Abhandlung ausgeführt habe, manche Analogie. Ich kann noch hinzufügen, dass zwischen Null- und Unendlichwerden die vollständigste Symmetrie herrscht, dergestalt, dass überall dem Unendlichwerden der Functionen die positiven Zahlen, dem Nullwerden die negativen Zahlen, dem Endlichbleiben die Null in schlagendster Weise entsprechen. Statt der Zahlen als fester Merkzeichen im Zahlengebiet hat man im infinitären Grössengebiet eine unbegrenzte Anzahl einfacher Functionen: die Exponentialfunctionen, die Potenzen, die logarithmischen

*) Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, Annali di Matematica, Tome IV (Serie II^a) pag. 338, und Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées (Borch. Journ. Bd. 74, pag. 294).

**) Das Unendlich lässt nicht wohl einen declinirten Plural zu, und wird deshalb als undeclinirbares Substantiv, wie „das Wesen" gebraucht werden müssen.

Functionen, die ebenfalls feste Vergleichungspunkte bilden, und zwischen deren beliebig nahem Unendlich noch eine unermessliche Anzahl von einander verschiedener Unendlich sich einschalten lässt.

Diese als Zahlen dienenden Functionen erstrecken sich, dem heutigen Stande der Analysis entsprechend, von beliebig hoch gethürmten Exponentialfunctionen:

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}$$

bis hinunter zum Unendlich beliebig oft wiederholter Logarithmen

$$\log(\log(\cdots\log x)\cdots) = ll\cdots x\,.$$

Die sich hier erhebende Frage, ob man mit diesem Unendlichkeitsintervall wirklich das ganze Unendlichkeitsgebiet umfasst, dergestalt, dass man jedes gegebene Unendlich zwischen zwei Unendlich von Functionen jenes Intervalls einschliessen kann, wie dies für jede gegebene Zahl bei der Zahlenreihe möglich ist: Diese Frage habe ich schon der Hauptsache nach und zwar verneinend beantwortet*), indem ich zeigte, dass es Abnahmen giebt von einer Langsamkeit, die hinter der beliebig oft wiederholter Logarithmen zurückbleibt, woraus wir, da aus $y = ll\cdots lx$ folgt $e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^y}}}}$, schliessen, dass es Zunahmen giebt, mit denen keine noch so hoch gethürmte Exponentialfunction Schritt hält.

Ich muss aber sofort bemerken, dass man irren würde, wollte man hierin eine wirkliche Unvollkommenheit aller solcher Theorien erblicken, die sich im Wesentlichen auf das von den Logarithmen und den Exponentialfunctionen begrenzte Unendlichkeitsgebiet beschränken, und dass man fälschlich meinen würde, die Function $\lambda(x)$ sei noch zu finden, die geignet sei, eine Form $\lambda\big(\lambda(\lambda\cdots\lambda(x))\big)$ zu liefern, mit der man jedes noch so kleine oder grosse Unendlich übertreffen könnte. Nimmermehr. Eine solche Function, die in der Grössenfolge des Unendlich die Rolle der Zahl in der gemeinen Grössenfolge spielen würde, ist *unmöglich*. Eine ganz ähnliche Construction, wie die im cit. Anhang auf den Logarithmus $l_r p$ angewandte, überzeugt von der Unmöglichkeit einer so beschaffenen Functionenfolge

$$\lambda(x)\,,\quad \lambda_1(x)\,,\quad \lambda_2(x)\,,\cdots,$$

dass man nicht eine Function Λ sich zu denken im Stande wäre, die z. B. ein kleineres Unendlich hat, als irgend eine der in dieser Reihe

*) Eine neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen etc. Anhang, Borch. Journ. Bd. 76.

(für endliche Indices) enthaltenen Functionen*). Durch diese Bemerkung ist die Theorie der infinitären Eigenschaften der Functionen wesentlich an die zu jeder Zeit gerade bekannten analytischen Abhängigkeiten geknüpft, und sie begründet den fundamentalen Unterschied zwischen dem infinitären und dem gemeinen Grössengebiet.

Ueber den Inhalt der vorliegenden Abhandlung erlaube ich mir folgende Angaben zu machen.

Nachdem in den Eingangs erwähnten zwei Untersuchungen ich mich zuerst mit der Beziehung zwischen dem Unendlich einer Function

*) Es ist also zu beweisen, dass, wenn eine unbegrenzte Schaar von fort und fort langsamer zunehmenden Functionen:

$$\lambda_1(x)\,,\quad \lambda_2(x)\,,\quad \lambda_3(x)\,,\ \cdots$$

vorliegt, die für jedes r die Bedingung:

$$\lim \frac{\lambda_r(x)}{\lambda_{r+1}(x)} = \infty$$

erfüllen, man immer eine Function $\psi(x)$ angeben kann, die mit x unendlich wird, aber langsamer als irgend eine Function jener Schaar.

Unsere Voraussetzungen sind erstens, dass die Functionen von einem Werthe von x zu wachsen anfangen, der < 1 ist, zweitens, dass, unter $x_1, x_2, x_3, \cdots$ Werthe verstanden, für die

$$\lambda_1(x) = 1\,,\quad \lambda_2(x_2) = 2\,,\quad \lambda_3(x_3) = 3\,,\ \cdots$$

die Function $\lambda_1(x)$ von x_1 an, $\lambda_2(x)$ von x_2 an u. s. f. nicht mehr convex gegen die Abscissenaxe werden, in welchen Voraussetzungen keine Beschränkung unseres Satzes liegt, da man sie direct erfüllen kann, wie folgt: Man ersetzt einfach jede Curve $y = \lambda_r(x)$ in der Richtung der abnehmenden x, von dem Punkte an, von dem an sie in der Richtung der zunehmenden x nicht mehr convex gegen die Abscissenaxe wird, durch die bis zur Abscissenaxe verlängerte Tangente.

Dies bemerkt, construiren wir die Curve $\psi(x)$ so, dass sie für $x = x_1, x_2, x_3, \cdots$ die Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ annimmt. Sie bleibt dann

$$\begin{gathered}\text{von } x_1 \text{ an} < \lambda_1(x)\,,\\ \text{von } x_2 \text{ an} < \lambda_2(x)\\ \text{u. s. f.}\end{gathered}$$

Denn für x_2 ist $\psi(x_2) = \lambda_2(x_2) < \lambda_1(x_2)$. Wenn also $\lambda_1(x)$ von x_1 bis x_2 nicht convex gegen die Abscissenaxe ist, so braucht man für $\psi(x)$ nur die geradlinige Verbindung von $\lambda_1(x_1)$ und $\lambda_2(x_2)$ zu nehmen, und so in allen ferneren Intervallen. Es wird aber $\psi(x)$ schliesslich unendlich, da seine successiven Werthe die unbegrenzte Zahlenreihe 1, 2, 3, $\cdots$ bilden. Ausserdem wird das Verhältniss

$$\frac{\lambda_r(x)}{\psi(x)}\,,$$

wie gross r auch sein mag, einmal unendlich, da $\psi(x)$ einmal, und zwar von x_{r+1} an kleiner als $\lambda_{r+1}(x)$ wird und bleibt und

$$\frac{\lambda_r(x)}{\lambda_{r+1}(x)}$$

unendlich wird. Q. e. d.

und dem ihrer Ableitung beschäftigt, dann, mit Hülfe des Satzes von der Differenzirbarkeit der infinitären Gleich- und Ungleichheiten*), die Unendlich der Ableitungen verschiedener Ordnung einer Function verglichen habe**), schien es mir von naheliegendem Interesse, Ausdrücke wie: $f(x+a)-f(x)$, $\frac{f(x+a)}{f(x)}$, und ähnliche, x unendlich werdend und a endlich bleibend oder schwächer als x unendlich werdend gedacht, auf ihre Unendlich zu untersuchen, weil hierbei erst die Analogie zu den Voraussetzungen der Differentialrechnung eingehalten wird, indem z. B. dem unendlichkleinen a und endlichen x im Differential $f(x+a)-f(x)$ das endliche a und unendlichgrosse x im Unendlich von $f(x+a)-f(x)$ entspricht. Die hieraus sich ergebenden Formeln (Cap. I., wo nur endliche Grenzwerthe zusammengestellt sind, und Cap. III.) erweisen sich als sehr nützlich für die erfolgreiche Inangriffnahme dessen, was man das praktische Problem der ganzen Theorie nennen kann, *der Bestimmung des Unendlich nicht explicite gegebener Functionen.* Es sei $f(x, y)$ eine aus Logarithmen, Potenzen, Exponentialfunction zusammengesetzte Function, die, gleich Null gesetzt, eine unauflösbare transcendente Gleichung für y bildet.

Für viele Untersuchungen wird es ausreichend sein, von y nur das Unendlich zu kennen. Diese noch zu allgemeine Aufgabe gestattet Specialisirungen, die der Analyse zugänglich sind und noch immer umfassend genug erscheinen. Freilich machte ich bald die Wahrnehmung, dass meine Methoden (welche hauptsächlich in verschiedenartiger Anwendung der Lagrange'schen Restformel bestehen) häufig nur unvollkommenere infinitäre Aufschlüsse über die gesuchten Functionen, als ihr Unendlich, geben. Aber gerade dieser Mangel gewährte wieder den Vortheil, auf die Frage hinzuweisen, was man sich, analog der näherungsweisen numerischen Bestimmung der Wurzeln einer Gleichung, unter infinitärer Approximation zu denken habe, mit andern Worten, wie man die Annäherung, mit welcher eine gefundene Function das Unendlich der gesuchten ausdrückt, zu beurtheilen habe (Cap. IV.).

Solcher infinitären Lösungen von Gleichungen theile ich in den Capp. V. und VI. mehrere mit, eine Auswahl unter einer grösseren Anzahl ihres Gleichen, die ich aufgesucht habe. Man darf hier noch

*) Der Beweis dieses Satzes ist in seinem ersten Theile zu lang und durch einen Druckfehler entstellt. In der Anmerkung zu Art. 5. gebe ich diesem Theile des Beweises eine kürzere und übersichtlichere Form.

**) Der Satz, der diese Beziehungen ausspricht (Borch. Journ. Bd. 74, p. 300), lässt in seinem zweiten Theile eine bedeutende Vereinfachung zu, wie ich seitdem bemerkt habe. Sie findet sich mitgetheilt und entwickelt in der zweiten Hälfte der Anmerkung zu Art. 5.

keine allgemeine Theorie solcher Auflösungen erwarten, sondern jede einzelne Aufgabe verlangt, wie die Dinge stehen, ihre besonderen Kunstgriffe, etwa wie dies von den zahlentheoretischen Problemen besonders im vorigen Jahrhundert galt. Doch liegt gerade hierin für den Forscher viel Anziehendes.

Die vorliegende Untersuchung ist fast in allen ihren Theilen aus dem Bedürfniss entsprungen, gewisse Sätze über Convergenz und Divergenz von Fourier'schen Reihen *allgemein und unter genauer Feststellung ihres Gültigkeitsbereiches zu beweisen.* Wenn dies nun mit Hülfe der hier mitgetheilten Sätze und Methoden in der That geglückt ist, so habe ich dabei die Ueberzeugung gewonnen, dass es auf anderem Wege kaum möglich gewesen wäre, so dass Jeder, der sich dasselbe Ziel gesteckt hätte, es auch nur auf ungefähr demselben Wege hätte erreichen können. So glaube ich zuversichtlich, dass die so schwierige und wichtige Theorie der Convergenz der Integrale, an welche bei weiterer Entwickelung der Analysis immer höhere Anforderungen gestellt werden dürften, nur durch ähnliche Untersuchungen gefördert werden kann, und hierin liegt ihr praktischer Werth. Aber abgesehen davon wird es von Interesse sein, zu sehen, mit welcher Leichtigkeit und Sicherheit es sich mit den infinitären Eigenschaften der Functionen rechnen lässt, und zu finden, dass es fast mühelos gelingt, bei transcendenten Gleichungen, vor deren Behandlung mit den gewöhnlichen Kunstgriffen Jedermann zurückschrecken würde, in sehr allgemeinen Fällen das Unendlich ihrer Wurzeln, ja noch nähere Bestimmungen festzustellen.

Tübingen, Juli 1874.

I. Formeln für endliche asymptotische Werthe.

1. Die einfachen Grunformeln für asymptotische Werthe.

Aus der Lagrange'schen Restformel:

$$f(x+a)=f(x)+af'(x)+\frac{a^2}{1\cdot 2}f''(x)+\cdots+\frac{a^n}{n!}f^{(n)}(x+\alpha),\quad 0\leq\alpha\leq a,$$

folgt zunächst für $n=1$ und $x=\infty$, falls $\lim_{x=\infty} f'(x)$ endlich und bestimmt ist:

$$\lim\{f(x+a)-f(x)\}=a\lim f'(x), \tag{I.}$$

$$\lim\frac{f(x)}{x}=\lim f'(x). \tag{II.}$$

Man erhält die erste dieser Formeln direct, die zweite aus der Umformung:

$$f'(x+\alpha) = \left(1+\frac{x}{a}\right)\left\{\frac{f(x+a)}{x+a} - \frac{f(x)}{x+a}\right\},$$

indem man darin erst a, dann x unendlich setzt.

Allgemein ist:

$$(\mathrm{I}^n)\quad \lim\left\{f(x+a) - f(x) - af'(x) - \cdots - \frac{a^{n-1}}{n-1!}f^{(n-1)}(x)\right\} = \frac{1}{n!}\lim f^{(n)}(x),$$

$$(\mathrm{II}^n)\quad \lim\frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{n!}\lim f^{(n)}(x),$$

falls $f^n(\infty)$ endlich und bestimmt ist. Die zweite Formel folgt wie oben aus:

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\alpha) = \left(1+\frac{x}{a}\right)^n\left\{\frac{f(x+a)}{(x+a)^n} - \frac{f(x) + af'(x) + \cdots + \frac{a^{n-1}}{n-1!}f^{(n-1)}(x)}{(x+a)^n}\right\}.$$

Setzen wir weiter in:

$$f'(x+\alpha) = \left(1+\frac{x}{a}\right)\left\{\frac{f(x+a)}{x+a} - \frac{f(x)}{a}\right\}$$

erst x, dann a gleich Null, so folgt, dass

$$(\mathrm{II}_{(0)})\quad \lim_{x=0}\frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

ist, falls $f(0) = 0$ ist. Allgemein hat man:

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

falls $f(0), f'(0), \cdots f^{(n-1)}(0)$ verschwinden.

2. Daraus entspringende Grenzwerthformeln.

Aus den Formeln des vorigen Artikels kann eine Schaar von Grenzwerthformeln abgeleitet werden, von denen ich die naheliegendsten hier anführen will.

Setzt man in den drei Formeln (I), (II), $(\mathrm{II}_{(0)})$ $lf(x)$ statt $f(x)$ ein, so werden sie:

$$(\mathrm{I}_a)\quad \lim\frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a\lim\frac{f'(x)}{f(x)}},$$

$$(\mathrm{II}_a)\quad \lim f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\frac{f'(x)}{f(x)}},$$

$$(\mathrm{II}_{a(0)})\quad \lim_{x=0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{f'(0)}{f(0)}},$$

von denen die letztere Formel $f(0) = 1$ verlangt, was z. B. bei $f(x) = 1 + x$ zutrifft.

Schreibt man ferner in (I) lx, la stat x, a und dann $f(x)$ statt flx, so ergiebt sich:

$$(\mathrm{I}')\quad \lim\left\{f(ax) - f(x)\right\} = la\lim xf'(x),$$

und setzt man noch einmal lx statt x, $f(x)$ statt flx, so folgt:

(I'') $$\lim \{f(x^a) - f(x)\} = la \lim xlxf'(x).$$

Die nämlichen Umformungen, auf (I_a) angewandt, ergeben:

(I'_a) $$\lim \frac{f(ax)}{f(x)} = a^{\lim x \frac{f'(x)}{f(x)}},$$

(I''_a) $$\lim \frac{f(x^a)}{f(x)} = a^{\lim xlx \frac{f'(x)}{f(x)}},$$

während aus (II) und (II_a) auf dieselbe Weise folgt:

($II^{(n)}$) $$\lim \frac{f(x)}{l_n x} = \lim xlx \cdot\cdot l_{n-1}xf'(x),$$

($II_a^{(n)}$) $$\lim f(x)^{\frac{1}{l_n x}} = e^{\lim xlx \ldots l_{n-1}x \frac{f'(x)}{f(x)}},$$

Durch Vergleichung von (I), (I'), (I'') mit ($II^{(n)}$) und von (I_a), (I'_a), (I''_a) mit ($II_a^{(n)}$) erhält man die sechs Formeln:

(III) $$\lim \{f(x+a) - f(x)\} = a \lim \frac{f(x)}{x},$$

(III') $$\lim \{f(ax) - f(x)\} = la \lim \frac{f(x)}{lx},$$

(III'') $$\lim \{f(x^a) - f(x)\} = la \lim \frac{f(x)}{llx},$$

(III_a) $$\lim \frac{f(x+a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{a}{x}},$$

(III'_a) $$\lim \frac{f(ax)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{la}{lx}},$$

(III''_a) $$\lim \frac{f(x^a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{la}{llx}},$$

deren erste und vierte für $a = 1$ schon von Cauchy abgeleitet worden sind*).

Da alle diese Formeln mit Ausnahme von ($II_{(0)}$) und ($II_{a(0)}$) für den Limes $x = \infty$ gebildet sind, so kann es noch nützlich erscheinen, sie so umzuformen, dass sie für den Limes $x = 0$ gelten. Es ist dies möglich bei den aus (II) abgeleiteten und denen, die statt $x + a$ die Grössen ax und x^a enthalten. Setzt man in diesen Formeln $\frac{1}{x}$ statt x, wo erforderlich $\frac{1}{a}$ statt a, dann $f(x)$ statt $f\frac{1}{x}$, so ergiebt sich die für den Limes $x = 0$ gültige Formelschaar:

($I'^{(0)}$) $$\lim \{f(ax) - f(x)\} = la \lim xf'(x),$$

($I''^{(0)}$) $$\lim \{f(x^a) - f(x)\} = -la \lim xl\tfrac{1}{x} f'(x),$$

*) Cours d'Analyse algébrique.

$$(\mathrm{I}'^{(0)}_a) \qquad \lim \frac{f(ax)}{f(x)} = a^{\lim x \frac{f'(x)}{f(x)}},$$

$$(\mathrm{I}''^{(0)}_a) \qquad \lim \frac{f(x^a)}{f(x)} = a^{-\lim x\, l\frac{1}{x}\frac{f'(x)}{f(x)}},$$

$$(\mathrm{II}^{(n)(0)}) \qquad \lim \frac{f(x)}{l_n \frac{1}{x}} = -\lim x\, l\frac{1}{x} \cdots l_{n-1}\frac{1}{x} \cdot f'(x),$$

$$(\mathrm{II}'^{(0)}) \qquad \lim f(x)^x = \lim e^{-x^x \frac{f'(x)}{f(x)}},$$

$$(\mathrm{II}^{(n)(0)}) \qquad \lim f(x)^{\frac{1}{l_n \frac{1}{x}}} = \lim e^{-x l\frac{1}{x} \cdots l_{n-1}\frac{1}{x}\frac{f'(x)}{f(x)}},$$

und durch Vergleichung:

$$(\mathrm{III}'^{(0)}) \qquad \lim \{f(ax) - f(x)\} = -la \lim \frac{f(x)}{l\frac{1}{x}},$$

$$(\mathrm{III}''^{(0)}) \qquad \lim \{f(x^a) - f(x)\} = la \cdot \lim \frac{f(x)}{ll\frac{1}{x}},$$

$$(\mathrm{III}'^{(0)}_a) \qquad \lim \frac{f(ax)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{la}{l\frac{1}{x}}},$$

$$(\mathrm{III}''^{(0)}_a) \qquad \lim \frac{f(x^a)}{f(x)} = \lim f(x)^{\frac{la}{ll\frac{1}{x}}}.$$

3. Gültigkeitsbereich der obigen Grenzwerthformeln.

Es bleibt noch übrig, den Gültigkeitsbereich aller dieser Formeln anzugeben.

Bei den Formeln, deren Nummer den Index a nicht führt, ist der Gültigkeitsbereich aus der Vergleichung von (I) und (II) ohne Weiteres zu ersehen. Diese beiden Formeln gelten, $f(x) \succ 1$ gedacht, wegen (II) für $f(x) \gtrsim x$. Ebenso gilt allgemein (I^n) und (II^n) für $f(x) \gtrsim x^n$. Daraus folgt, dass (I') für $f(x) \gtrsim lx$, (II'') für $f(x) \gtrsim llx$ gelten.

Was ferner die Formeln betrifft, deren Nummern mit dem Index a behaftet sind, so ist ihre Tragweite ebenso leicht anzugeben. Erstens (I_a) gilt für $lf \gtrsim x$, d. i.

$$e^{Mx} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-Mx} *),$$

*) Aus der Bedingung $lf \sim x$ folgt, wie man leicht sieht, dass f eine der Bedingungen:

$$x^M \gtrsim f(x) \gtrsim x^\mu, \quad x^{-\mu} \gtrsim f(x) \gtrsim x^{-M},$$

M beliebig gross, μ beliebig klein, erfüllen muss, und aus der Bedingung $lf \prec x$ folgt, dass f ein kleineres Unendlich oder eine grössere Null als eine Potenz

M beliebig gross. Mithin gelten (I'_a) und (I''_a) resp. in den Bereichen:

$$x^M \gtrsim f(x) \gtrsim x^{-M},$$
$$lx^M \gtrsim f(x) \gtrsim lx^{-M}.$$

Die nämlichen drei Gültigkeitsbereiche kommen den Formeln (II_a), (II'_a), (II''_a) zu. Die Formeln (III), (III'), (III''); (III_a), (III'_a), (III''_a), haben resp. dieselben Gültigkeitsgrenzen wie (I), (I'), (I''); (I_a), (I'_a), (I''_a).

Die Gültigkeitsbereiche der Formeln, deren Nummer eine Null oben führt, erhält man aus den bisherigen, indem man in den Gültigkeitsbestimmungen $\frac{1}{x}$ statt x schreibt.

Hinzuzufügen ist noch die nähere Bedeutung des doppelten Zeichens $\gtrsim$ oder $\lesssim$ in den vorstehenden Gültigkeitsbestimmungen. Erstens bei den Formeln mit Nummern ohne Index a werden, falls die Function in den Bedingungen $f(x) \gtrsim x$, $f(x) \gtrsim x^n$, $f(x) \gtrsim lx$ u. s. f. das untere Zeichen verificirt, beide Seiten der Gleichungen Null. Die Formelreihe anlangend, deren Nummern den Index a führen, so werden ihre beiden Seiten 1 für:

$$l^{\mu x} \succ f(x) \succ l^{-\mu x},$$
$$x^{\mu} \succ f(x) \succ x^{-\mu},$$
$$lx^{\mu} \succ f(x) \succ lx^{-\mu},$$

μ beliebig klein gedacht. Denn durch Logarithmiren geben diese Bedingungen die andern $lf(x) \prec x$ etc. zurück.

Endlich die Formeln (II_0) und ($II_{a(0)}$) gelten die erste für $f(x) \gtrsim x$, x Null werdend gedacht, die zweite ebenso für $lf(x) \gtrsim x$. Setzt man hierin $f(x) = 1 + \varphi(x)$, wo $\lim \varphi(x) = 0$, so kann man schreiben: $lf(x) = \nu\varphi(x)$, wo $\lim \nu = 1$, und man findet also: $\varphi(x) \gtrsim x$. Mithin wird die Bedingung für $f(x)$ in ($II_{a(0)}$): $f(x) - 1 \gtrsim x$. Im Falle des unteren Zeichens $\prec$ werden in (II_0) und ($II_{a(0)}$) beide Seiten Null resp. Eins.

Wenn in den Bedingungen für die Formeln, deren Nummern ohne Index a sind, und in der für ($II_{a(0)}$) das Zeichen $\gtrsim$ mit $\succ$ vertauscht wird, werden beide Seiten unendlich. Dasselbe findet statt, wenn in den Formeln, deren Nummern den Index a führen, $f(x)$ ausserhalb der Intervalle $e^{Mx} \ldots e^{-Mx}$ etc. liegt.

Hiermit ist die Theorie dieser Grenzwerthe, so weit sie endlich sind, völlig erledigt. Es knüpfen sich aber an die bisher betrachteten

---

von x haben muss, was man so zu schreiben hat: $x^{\mu} \succ f(x) \succ x^{-\mu}$, μ beliebig klein, woraus für $lf \gtrsim x$ die andere Schreibart

$$x^M \gtrsim f(x) \gtrsim x^{-M}$$

folgt.

Ausdrücke Fragen von weitergehendem Interesse. Es handelt sich besonders um das Unendlich von Grössen wie $\frac{f(x+a)}{f(x)}$, $f(x+a)-f(x)$ u. s. w., falls sie keine endlichen Grenzwerthe haben und falls a nicht, wie bisher vorausgesetzt wurde, eine Constante ist, sondern auch eine unendlich oder Null werdende Function von x. Diese Untersuchungen setzen aber Einiges aus der Theorie der Infinitärtypen voraus, was ich voranschicken will.

II. Ueber Infinitärtypen und infinitäre Gleichheiten.

4. Ueber Infinitärtypen.

Infinitär-Typus einer Function $f(x)$ habe ich eine solche Function $t = t(x)$ genannt, welche die Gleichheit:

$$tf'(x) \sim f(x)$$

befriedigt. Man wird unter allen solchen Functionen die einfachste zum Typus wählen. Z. B. wird $\frac{1}{lx}$ der Typus von $(ax)^{bx}$ sein. Solcher Typus hat dann die Eigenschaft, dass, wenn

$$t = \frac{1}{\frac{dlv}{dx}}$$

oder $lv \sim \int \frac{dx}{t}$ gesetzt wird, stets

$$f(x) = v^m \varphi(x)$$

ist, wo $\varphi(x)^{+1} \prec v^{\mu}$, μ beliebig klein. Doch ist als *Function v einer gegebenen Function $f(x)$* stets die einfachste zu wählen, die der Gleichheit $lv \sim \int \frac{dx}{t}$ genügt. Im Falle $f(x) = (ax)^{bx}$ ist $lv \sim xlx - x$. Es ist also $v = x^x$, $m = b$, $\varphi(x) = a^{bx}$. Sucht man nun den Typus t_1 von $\varphi(x)$ und bildet

$$lv_1 \sim \int \frac{dx}{t_1},$$

so kann man $f(x) = v^m v_1^{m_1} \varphi_1(x)$ setzen u. s. f., bis man zu der Form:

$$f(x) = v^m v_1^{m_1} \cdots v_r^{m_r} \varphi_r(x)$$

gelangt, wo $\varphi_r(x) \sim 1$. So findet man z. B.

$$f(x) = (ax)^{bx} = (x^x)^b \cdot (e^x)^{bla}.$$

Jede beliebige unendlich werdende Function von der hier betrachteten Art kann in dieser Weise in Factoren zerlegt werden, deren es weniger giebt als unendlich werdender Functionen (Ann. di Mat. Bd. IV, *p. 349*). Denn jede Function von einer gewissen Grösse des Unendlich

abwärts kann Typus sein, da aber alle Potenzen einer Function v denselben Typus ergeben, so ist für die Zerlegung einer Function in Factoren v der Inbegriff aller Functionen, die auf die Form $v^m \psi(x)$ $(\psi(x)^{\pm 1} \prec v^\mu$, μ beliebig klein) gebracht werden können, als nur *eine* Grösse v aufzufassen, für die man, wie gesagt, die einfachste Form, also jedenfalls deren erste Potenz wählen wird.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass der „infinitären Primfactoren" v^m, in die eine Function zerfällt, unendlich viele sein können. Es kann z. B. jede Function der Form e^{x^m} ein Factor v sein, d. i. sie giebt für jeden verschiedenen Werth von m einen Typus mit einem verschiedenen Unendlich. Bilden wir nun die Function:

$$f(x) = \prod_{p=1}^{p=\infty} e^{m_p \frac{x^{\frac{1}{p}}}{p^2}},$$

so ist die Reihe $\sum m_p \frac{x^{\frac{1}{p}}}{p^2}$, die m_p endlich vorausgesetzt, für jeden Werth von x convergent, und $f(x)$ besteht also aus unendlich vielen Factoren v^m.

5. Integrirbarkeit infinitärer Gleich- und Ungleichheiten.

Borchardt's Journ. Bd. 74, p. 297 habe ich gezeigt, *dass jede infinitäre Ungleichheit oder Gleichheit differentiirt werden kann, wenn erstens die Functionen und (so weit man sie vergleichen will) ihre Ableitungen nicht unendlich viele Maxima haben, zweitens keine der durch die Zeichen* $\succ$, $\prec$, $\sim$ *getrennten Functionen einen endlichen von Null verschiedenen Limes hat.* Ich füge hinzu, dass auch die Ungleichheit $f(x) \succ \varphi(x)$ differentiirt werden darf, falls $\varphi(x) \sim 1$, da man alsdann $\varphi(x) = c + \varphi_1(x)$, wo $\varphi_1(x) \prec 1$, setzen darf und aus $f(x) \succ \varphi_1(x)$, $f'(x) \succ \varphi_1'(x)$ folgt *).

*) Was den Beweis dieses Satzes anlangt, so kann der die Ungleichheit $f(x) \succ \varphi(x)$ betreffende Theil, der sich auf den Fall $f(x) \prec 1$, $\varphi(x) \prec 1$ bezieht, erheblich gekürzt werden. Da man nämlich dann statt $f(x) \succ \varphi(x)$ schreiben kann:

$$\int_x^\infty f'(x)\,dx \succ \int_x^\infty \varphi'(x)\,dx,$$

so ergiebt sich, $f'(x) = \varphi'(x)\,\lambda(x)$ gesetzt, $\lambda(x) \succ 1$. Ist $f(x) \succ 1$, $\varphi(x) \prec 1$, so braucht man statt $f(x) \succ \varphi(x)$ nur zu schreiben:

$$\int_0^x f'(x)\,dx \succ \int_x^\infty \varphi'(x)\,dx,$$

und dann $\varphi'(x) = \lambda(x) f'(x)$ zu setzen, um sofort zu sehen, dass $\lambda(x) \prec 1$.

Was die Ausnahme von der Differentiirbarkeit der infinitären Gleich- und

Es ist festzustellen, wann die infinitären Gleich- oder Ungleichheiten integrirt werden dürfen.

Ungleichheiten betrifft, die eintreten kann, wenn in $f(x) \gtrless \varphi(x)$ eine der beiden Seiten einen endlichen Limes hat, so beurtheilt man die Sache am leichtesten, wenn man im Falle eines endlichen Limes $f(x) = f_1(x) + f(\infty)$, $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi(\infty)$ setzt, wo $f_1(x)$ und $\varphi_1(x) \prec 1$ sind. Die Fälle, die vorkommen können, lauten:

$$f_1(x) + f(\infty) \sim \varphi_1(x) + \varphi(\infty),$$
$$f_1(x) + f(\infty) \succ \varphi(x), \text{ also } \varphi(x) \prec 1,$$
$$f_1(x) + f(\infty) \prec \varphi(x), \text{ also } \varphi(x) \succ 1.$$

Man sieht sofort: die beiden ersten Gleich- und Ungleichheiten werden differentiirt falsche Resultate geben können, weil aus ihnen nicht auch folgt $f_1(x) \sim \varphi_1(x)$ und $f_1(x) \succ \varphi(x)$, während die letzte, statt deren allerdings $f_1(x) \prec \varphi(x)$ geschrieben werden kann, differentiirbar ist.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich mir noch erlauben einen Punkt nachzutragen, der die Differentialquotienten der Functionen mit Typen $\gtrless x$ betrifft. *Wenn $f(x)$ einen solchen Typus hat, ist x der Typus aller Ableitungen von $f(x)$.* Denn es sei:

$$x\varphi(x)f'(x) \sim f(x),$$

wo $1 \prec \varphi(x) \prec x^{\mu}$, μ beliebig klein. Hieraus folgt:

$$f'(x) \sim \frac{f(x)}{x\varphi(x)}$$

und

$$f''(x) \sim \frac{d}{dx}\,\frac{f(x)}{x\varphi(x)},$$

so dass also die Gleichheit:

$$x\,\frac{d}{dx}\,\frac{f(x)}{x\varphi(x)} \sim \frac{f(x)}{x\varphi(x)}$$

zu beweisen ist. Die linke Seite

$$x \cdot \frac{(\varphi(x) + x\varphi'(x))\,f(x) - x\varphi(x)f'(x)}{x^2\varphi(x)^2}$$

reducirt sich in der infinitären Gleichheit dadurch, dass im Zähler des Bruches Alles gegen $\varphi(x)f(x)$ vernachlässigt werden darf, weil der Typus von $\varphi(x) \succ x$ ist, und $x\varphi(x)f'(x) \sim f(x)$ ist, so dass allerdings $xf''(x) \sim f'(x)$. Weiter hat man also:

$$f'''(x) \sim \frac{f(x)}{x^2\varphi(x)},$$

woraus ganz auf die nämliche Weise $xf'''(x) \sim f''(x)$ folgt etc.

Hierdurch vereinfacht sich der zweite Theil des Theorems (Borch. Journ. Bd. 74, p. 300) etwas. Für $t \succ x$ ist:

$$f(x) \sim tf'(x) \sim txf''(x) \sim tx^2f'''(x) \sim \cdots$$

und für $f(x) = x^m f_1(x)$, falls m eine ganze Zahl, $f_1(x)^{\pm 1} \prec x^{\mu}$, μ beliebig klein, und t_1 der Typus von $f_1(x)$ ist:

$$f(x) \sim xf'(x) \sim x^2f''(x) \sim \cdots x^m f^{(m)}(x) \sim x^m t_1 f^{(m+1)}(x) \sim x^{m+1} t_1 f^{(m+2)}(x) \sim \cdots.$$

Setzen wir in:

$$f(x) \sim \varphi(x) \gtrless 1$$

$\lambda(x)\,\varphi(x)$ statt $f(x)$, wo $\lambda(x) \sim 1$, so folgt durch Anwendung des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes:

$$\int f(x)\,dx \sim \int \varphi(x)\,dx\,.$$

Handelt es sich um Integration der Ungleichheit $f(x) \succ \varphi(x)$, so könnte, wenn beide Integralfunctionen unendlich werden, der Differentiationssatz nicht richtig sein, sobald nicht $\int f(x)\,dx \succ \int \varphi(x)\,dx$ wäre. Wenn aber $\int\limits^{\infty} f(x)\,dx$ endlich ist, so ist es auch $\int\limits^{\infty} \varphi(x)\,dx$, und wenn das letztere Integral endlich ist, so kann es auch das erste sein. Es ergiebt sich also:

Die Gleichheit

$$f(x) \sim \varphi(x)$$

kann stets integrirt werden. Die Ungleichheit

$$f(x) \succ \varphi(x)$$

kann es auch, falls beide Integralfunctionen unendlich werden. Wird $\int\limits^{\infty} f(x)\,dx$ *nicht unendlich, so folgt:*

$$\int f(x)\,dx \sim \int \varphi(x)\,dx,$$

und wird $\int \varphi(x)\,dx$ *nicht unendlich, so folgt:*

$$\int f(x)\,dx \gtrless \int \varphi(x)\,dx.$$

III. Sätze über das Unendlich von Ausdrücken wie $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ etc.

6. Allgemeiner Satz über eine asymptotische Form für $\frac{f(x+a)}{f(x)}$.

Wir wenden uns nun zur genaueren Untersuchung des infinitären Verhaltens der Ausdrücke $\frac{f(x+a)}{f(x)}$, $f(x+a) - f(x)$, wobei wir mit $A \overline{\infty} B$ ausdrücken wollen: $\lim A = \lim B$. An die Spitze ist der Satz zu stellen:

Wenn $f(x) \sim f_1(x)$, *so ist für jede Grösse des Unendlich von a (a gedacht als Function von x):*

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} \gtrless \frac{f_1(x+a)}{f_1(x)}\,. \tag{IV}$$

Denn aus

$$\frac{f(x+a)}{f_1(x+a)} \overline{\overline{\infty}} \frac{f(x)}{f_1(x)}$$

folgt:

$$\frac{f_1(x+a)}{f(x)} \cdot \frac{f(x+a)}{f_1(x+a)} \gtrless \frac{f_1(x+a)}{f(x)}\,\frac{f(x)}{f_1(x)}\,,$$

woraus die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

Dies vorausgeschickt, haben wir den allgemeinen Satz: *Es ist:*

$$(V) \qquad \frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{u\frac{f'(x)}{f(x)}}, \quad u \sim 1,$$

wenn $a \sim 1$ *und*

$$(V_1) \qquad e^{e^{Mx}} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-e^{Mx}}, \quad M \text{ beliebig gross.}$$

Zweitens ist

$$(V') \qquad \frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a\frac{f'(x)}{f(x)}u}, \quad u \infty 1,$$

auch für $a \sim 1$ *und*

$$e^{e^{\mu x}} \succ f(x) \succ e^{-e^{\mu x}}, \ \mu \text{ beliebig klein.}$$

Wenn drittens $1 \prec a \prec x$, *so gilt die nämliche Gleichung unter der Bedingung*

$$(V_1') \qquad e^{x^M} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-x^M}, \ M \text{ beliebig gross.}$$

Beweis. Es sei t der Typus von $f(x)$. Alsdann folgt aus

$$lf(x+a) - lf(x) = a\frac{dlf(x+\alpha)}{d(x+\alpha)}, \quad 0 \leq \alpha \leq a,$$

diese Beziehung:

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a\frac{f'(x+\alpha)}{f(x+\alpha)}} \sim e^{\frac{a}{T(x)}\cdot\frac{T(x)}{T(x+\alpha)}},$$

wo $T(x) \sim t(x)$. Nun ist aber auch:

$$\frac{T(x+\alpha)}{T(x)} = e^{\alpha\frac{T'(x+\alpha_1)}{T(x+\alpha_1)}}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha.$$

Für ein endliches α ist diese Grösse ~ 1, oder $\infty 1$, sobald $T \gtrsim T'$. Dies giebt entweder

$$t \sim T \sim e^{+mx}, \ m \text{ beliebig,}$$

wo das untere Zeichen genommen werden muss, weil es keinen Typus e^{+mx} Null oder unendlich werdender Functionen giebt, oder:

$$t \sim T \prec e^{-\mu x}, \ \mu \text{ beliebig klein.}$$

Es ist aber $t \sim e^{-mx}$ für Functionen, die den Intervallen

$$e^{e^{Mx}} \ldots\ldots e^{e^{\mu x}}, \quad e^{-e^{\mu x}} \ldots\ldots e^{-e^{Mx}}$$

angehören. Während für alle Functionen des Intervalls

$$e^{e^{\mu x}} \ldots\ldots e^{-e^{\mu x}}, \ \mu \text{ beliebig klein,}$$

$t \succ e^{-\mu x}$ ist.

Wird zweitens a unendlich, so sei $a \prec x$, und dies gilt dann auch von α und α_1. Die Grösse:

$$e^{\alpha \cdot \frac{T'(x+\alpha_1)}{T(x+\alpha_1)}}$$

hat den Limes 1, falls $\frac{t'(x)}{t(x)} \gtrsim \frac{1}{x}$, d. i. falls t dem Intervall

$$x^M \gtrsim t \gtrsim x^{-M}, \quad M \text{ beliebig gross},$$

angehört. Die Typen unendlich oder Null werdender Functionen werden nie so stark wie eine höhere als die erste Potenz von x unendlich (Borchardt's Journ. Bd. 74, p. 296), wodurch von selbst ein Theil dieses Intervalls in Wegfall kommt. Der Rest entspricht dem Intervalle für $f(x)$:

$$e^{x^M} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-x^M},$$

wie dies im Satze behauptet ist.

7. Einige Folgerungen aus dem Satze des Art. 6.

Aus diesem allgemeinen Satze ergeben sich die Folgerungen:
Im Fall a endlich bleibt, ist

(VI)
$$\begin{cases} \frac{f(x+a)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}} 1 \text{ für } t \succ 1, \text{ d. i. für:} \\ e^{\mu x} \succ f(x) \succ e^{-\mu x}, \ \mu \text{ beliebig klein.} \end{cases}$$

(VII)
$$\begin{cases} \frac{f(x+a)}{f(x)} \sim 1 \text{ für } t \gtrsim 1, \text{ d. i. für:} \\ e^{Mx} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-Mx}, \ M \text{ beliebig gross.} \end{cases}$$

Falls $1 \prec a \prec x$, hat man:

(VIII)
$$\begin{cases} \frac{f(x+a)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}} \frac{f'(x+a)}{f'(x)} \overline{\overline{\infty}} \text{ etc. } \overline{\overline{\infty}} 1 \text{ für } t \gtrsim x, \text{ d. i. für:} \\ x^M \gtrsim f(x) \gtrsim x^{-M}. \end{cases}$$

Dass die Verhältnisse $\frac{f'(x+a)}{f'(x)}$ unter diesen Bedingungen auch den Limes 1 haben, folgt aus dem zweiten Theile der Anmerkung zum Art. 5.

Die infinitäre Bedeutung der allgemeinen Formel

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot u}$$

ist die, dass sie Typus und Function v des Ausdrucks $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ liefert. Denn es bleibe z. B. a endlich, so kann man (V', Art. 6) wegen $u = 1 + \varrho$, wo $\lim \varrho = 0$ vorstehendem Ausdruck die Form

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = v^a \varphi(x), \quad v = e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

geben, wo $\varphi(x)^{\pm 1} \prec v^{\mu}$, μ beliebig klein. Alsdann ist:

$$\frac{1}{\frac{dlv}{dx}} = \frac{1}{\frac{d^2lf}{dx^2}}$$

der Typus von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$, so dass also:

(IX) $$\frac{d}{dx}\,\frac{f(x+a)}{f(x)} \asymp \frac{d^2lf}{dx^2}\,\frac{f(x+a)}{f(x)}\,.$$

Um an einem Beispiele diese merkwürdige Formel zu bestätigen, sei

$$f(x) = e^{x^3}, \quad \frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{3ax^2+3a^2x+a^3},$$

$$\frac{df(x+a)}{dx\;d(x)} = (6ax + 3a^2)\,e^{3ax^2+3a^2x+a^3}, \quad \frac{d^2lf}{dx^2} = 6(x+a)\,.$$

Es ist auch in der That:

$$(6ax + 3a^2)\,e^{3ax^2+3a^2x+a^3} \asymp 6(x+a)\,e^{3ax^2+3a^2x+a^3}.$$

Indessen liefert die allgemeine Formel (V) noch nicht das Unendlich von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$, sondern eben nur den Typus. Um das Unendlich zu finden, könnte man die im Exponenten stehende Function u näher zu bestimmen suchen. Man gelangt aber durch directe Betrachtungen rascher zum Ziele.

8. Ueber das Unendlich von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$.

Es ist allgemein:

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a\frac{dlf}{dx} + \frac{a^2}{2}\frac{d^2lf}{dx^2} + \cdots \frac{a^n}{n!}\frac{d^n lf(x+\alpha)}{d^n(x+\alpha)}}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq a\,.$$

Es sei zuerst a endlich. Nimmt man an, dass der r^{te} Differentialquotient von lf für $x = \infty$ endlich bleibt, so folgt aus

$$\frac{d^r lf}{dx^r} \gtrsim 1$$

durch Integration:

$$lf \gtrsim x^r$$

oder

(X)
$$\bullet\; e^{Mx^r} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-Mx^r}\,.$$

Für dieses Intervall ist also:

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} \asymp e^{a\frac{dlf}{dx} + \frac{a^2}{2}\frac{d^2lf}{dx^2} + \cdots \frac{a^{r-1}}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}lf}{dx^{r-1}}}.$$

Ist $a > 1$, so muss die Bedingung

$$\frac{d^r lf}{dx^r} \gtrsim a^{-r}$$

für irgend ein r erfüllbar sein, falls durch vorstehende Formel das

Unendlich von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ ausdrückbar sein soll. Dies braucht aber keineswegs immer der Fall zu sein, denn nehmen wir nur an $1 \prec a \prec x$, so folgt aus

$$\frac{d^r lf}{dx^r} \gtrsim x^{-r}$$

dies Intervall:

$$x^M \gtrsim f(x) \gtrsim x^{-M},$$

in welchem Falle nach (VIII) $\frac{f(x+a)}{f(x)} \overline{\overline{\sim}} 1$ ist, so dass die Form (X) nicht vermag, allgemein ein Unendlich von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ auszudrücken, wenn a nur der Einschränkung $1 \prec a \prec x$ unterworfen ist.

Um die Ergebnisse dieses Artikels an einem Beispiele zu bestätigen, sei $f(x) = x^x$ und zuerst $a \sim 1$. Da $e^x \succ x^x$, so muss man hier:

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} \sim e^{a \frac{dxlx}{dx}} = x^a e^a$$

haben, was auch der Fall ist, da in $\frac{(x+a)^{x+a}}{x^x} = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \left(1+\frac{a}{x}\right)^a x^a$ $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \overline{\sim} e^a$ ist. Nehmen wir aber $a \succ 1$ an, z. B. $\gtrsim \sqrt{x}$, so muss sein:

$$\frac{d^r xlx}{dx^r} \gtrsim \frac{1}{x^{\frac{r}{2}}}:$$

Dies ist schon für $r = 2$ der Fall, so dass man unter dieser Voraussetzung über a auch hat:

$$\frac{(x+a)^{x+a}}{x^x} \sim x^a e^a.$$

Auch dies Resultat lässt sich leicht verificiren. Denn in $\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ $\left(1+\frac{a}{x}\right)^a$ ist der erste Factor $\sim e^a$, und der zweite $\overline{\overline{\sim}} 1$, e, ∞, jenachdem $a \lesssim \sqrt{x}$, wie dies für $v \succ 1$ aus $\left(1+\frac{1}{u}\right)^v \infty$ 1, $e^{\lim \frac{v}{u}}$, ∞ je nachdem $u \gtrless v$, folgt.

Nachdem wir im Obigen, so weit die von uns in Anspruch genommenen Hülfsmittel reichen und die Formeln nicht zu complicirt werden, das Unendlich von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ untersucht haben, wollen wir im folgenden Artikel feststellen, wie a sich im Unendlichen verhalten muss, damit $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ endlich bleibe.

9. Ueber die Bedingung für a, unter welcher $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ endlich bleibt.

Es sei t der Typus von $f(x)$ und $\tau \sim t$, so ist

$$\frac{f(x+\tau)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}}\ e^{\tau \frac{f'(x)}{f(x)}} \tag{XI}$$

für alle ausserhalb des Intervalls $x^M \cdots x^{-M}$, M beliebig gross, liegenden Functionen $f(x)$. Für alle übrigen ist $\lim \frac{f(x+\tau)}{f(x)}$ allerdings auch endlich, darunter aber Eins für $t \succ x$, während in den übrigen Fällen der Limes direct zu berechnen ist.

Setzt man $\frac{f(x)}{f'(x)} = T(x)$, so hat man:

$$\frac{f(x+\tau)}{f(x)} = e^{\frac{\tau(x)}{T(x)} \cdot \frac{T(x)}{T(x+\alpha)}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \tau(x),$$

und wegen:

$$\frac{T(x)}{T(x+\alpha)} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{T(x)} T'(x+\alpha_1)}, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha,$$

wo $\frac{\alpha}{T(x)}$ jedenfalls nicht $\succ 1$ ist, hat man $\frac{T(x)}{T(x+\alpha)} \overline{\overline{\infty}}\ 1$ im Fall $T'(x) \prec 1$, ~ 1 im Fall $T'(x) \sim 1$, $\prec 1$ im Fall $T'(x) \succ 1$, woraus der Satz leicht folgt.

Corollar. Falls $a \succ x$, $t \precsim x$, ist stets

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}}\ \frac{f(a)}{f(x)},$$

denn man kann dem Ausdrucke links die Form geben:

$$\frac{f(x+a)}{f(a)} \cdot \frac{f(a)}{f(x)} = \frac{f(a)}{f(x)} e^{x \frac{f'(x_1+a)}{f(x_1+a)}}, \quad 0 \leq x_1 \leq x.$$

Beispiele. Es sei zunächst $f(x) = x^x$, so muss also sein:

$$\frac{\left(x + \frac{1}{lx}\right)^{x+\frac{1}{lx}}}{x^x} \overline{\overline{\infty}}\ e^{\frac{1}{lx} \frac{x^x(lx+1)}{x^x}} \overline{\overline{\infty}}\ e.$$

Zur Prüfung setze man die linke Seite gleich:

$$\left(1 + \frac{1}{x lx}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x lx}\right)^{\frac{1}{lx}} \cdot x^{\frac{1}{lx}}.$$

Die beiden ersten Factoren sind $\overline{\overline{\infty}}\ 1$, der letzte ist $= e$.

Es sei zweitens $f(x) = \Gamma(x)$. Um den Typus von $\Gamma(x)$ zu finden, setzen wir in

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = x + 1$$

nach Formel (V') die linke Seite gleich $e^{u \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}}$. Es folgt also

$$u\,\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = l(x+1),$$

oder $\frac{1}{lx}$ ist der Typus von $\Gamma(x)$, und daraus ergiebt sich:

$$\lim \frac{\Gamma\left(x+\frac{a}{lx}\right)}{\Gamma(x)} = \lim e^{\frac{a}{lx}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}} = e^{a}.$$

Dieses Resultat kann direct durch die Entwickelung für $\log\Gamma(\mu+\frac{1}{2})$ (Gauss gesammelte Werke Bd. III, p. 152, Formel 59) bestätigt werden.

Man kann, beiläufig bemerkt, diese Sätze manchmal gebrauchen, um das Unendlich complicirter Functionen zu finden. Es sei z. B. die Grösse der Null für $x=\infty$ oder für $y=\infty$ des Euler'schen Integrals erster Art:

$$\int_0^1 (1-\alpha)^{x-1}\,\alpha^{y-1}\,d\alpha = (x\,|\,y)$$

festzustellen. Man hat:

$$(x\,|\,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Nach Formel (X) ist wegen $\Gamma(x) \prec e^{x^2}$:

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \sim e^{y\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}} \sim e^{y\,lx}.$$

Daraus folgt:

$$(x\,|\,y) \sim x^{-y} \text{ für } x=\infty,$$
$$(x\,|\,y) \sim y^{-x} \text{ für } y=\infty.$$

Hierher gehört noch folgende in den Anwendungen nützliche Formel. *Es sei* $\lambda(\alpha) \succ 1$ *für* $\alpha = 0$, $u \gtrsim 1$, *so ist stets*

$$(\mathrm{XI_b}) \qquad \lim_{\alpha=0} \frac{\lambda\left(\alpha+\frac{u\alpha}{\lambda(\alpha)}\right)}{\lambda(\alpha)} = 1.$$

Beweis. Wir setzen $\alpha x = 1$, $\lambda(\alpha) = f(x)$, so wird vorstehender Ausdruck:

$$\frac{f(xv)}{f(x)}, \quad v = \frac{1}{1+\frac{u}{f(x)}},$$

und für $f(x) = \varphi(lx)$ wird dies:

$$\frac{\varphi(lx+lv)}{\varphi(lx)} = \frac{\varphi(x+w)}{\varphi(x)}, \quad w = -l\left(1+\frac{u}{f(x)}\right) = -\frac{U}{\varphi(x)}, \quad \lim U = u.$$

Es handelt sich also um den Limes von

$$\frac{\varphi\left(x-\frac{U}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)} = e^{\frac{U}{\varphi(x)}\frac{\varphi'(x-\alpha)}{\varphi(x-\alpha)}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{U}{\varphi(x)}.$$

Ist der Typus t von $\varphi(x) \gtrsim 1$, so folgt hieraus der zu beweisende

Limes 1. Für $t \prec 1$ folgt der Limes 1 ebenso wie beim Beweis der Formel (XI) dieses Art., da $\frac{1}{\varphi(x)} \prec t(x)$ ist. Denn in

$$\frac{\varphi\left(x - \frac{U}{\varphi(x)}\right)}{\varphi(x)} = e^{\frac{U}{\varphi(x)}\,t(x)\cdot\frac{t(x)}{t(x-\alpha)}}$$

wird

$$\frac{t(x)}{t(x-\alpha)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{t(x)}\,t'(x-\alpha_1)}, \quad 0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha,$$

da $\alpha \leqq \frac{U}{\varphi(x)}$ und daher $\frac{\alpha}{t(x)}$ stets $\prec 1$ ist, ferner mit t auch $t' \prec 1$ ist, stets den Limes 1 haben.

Man sieht auf die nämliche Weise allgemein, *dass*

$$(\mathrm{XI_a}) \qquad \frac{f(x+\gamma\tau)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}}\, 1$$

ist für jede Function $f(x)$, falls $\tau \sim$ dem Typus $f(x)$ und $\gamma \prec 1$.

10. Ueber die infinitären Eigenschaften von $\frac{f(ax)}{f(x)}$.

Wie bei den Grenzwerthen im Art. 1. kann man aus den obigen Formeln neue finden. Setzen wir z. B. in:

$$\frac{f(x \pm a)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}}\, 1, \quad x^M \succsim f(x) \succsim x^{-M}, \quad 1 \prec a \prec x,$$

la statt a, lx statt x, $f(x)$ statt $f(lx)$, so folgt:

$$(\mathrm{XII}) \qquad \frac{f(x a^{\pm 1})}{f(x)} \overline{\overline{\infty}}\, 1, \quad lx^M \succsim f(x) \succsim lx^{-M},$$

worin aber $a^{\pm 1} \prec x^{\mu}$, μ beliebig klein, sein muss, da sonst, $lx \pm la$ statt $x \pm a$ gesetzt, la nicht $\prec lx$ wäre.

Wir hatten oben (Art. 8.) gesehen, dass, wenn nur die Bedingung $1 \prec a \prec x$ gegeben ist, die Exponentialausdrücke, deren wir uns hier bedienen, nicht ausreichen, im Allgemeinen das Unendlich von $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ wiederzugeben, dass vielmehr über das Unendlich von a engere Bestimmungen getroffen werden müssen. Wir wollen jetzt einen derartigen Fall, der Interesse zu bieten scheint, etwas genauer untersuchen. Es handele sich um das Unendlich von

$$\frac{f(x f(x)^{\pm 1})}{f(x)},$$

wo $f(x)$ ein kleineres Unendlich als eine Potenz von x hat.

Wir setzen $f(x) = \varphi(lx)$ und erhalten:

$$\frac{\varphi(lx \pm lf)}{\varphi lx} = e^{lf \frac{\varphi'(lx \pm lf_1)}{\varphi(lx \pm lf_1)}}, \quad 1 \leq f_1 \leq f.$$

Der Exponent ist zu schreiben:

$$l[\varphi(lx \pm lf_1)] \cdot \frac{\varphi'(lx \pm lf_1)}{\varphi(lx \pm lf_1)} \cdot \frac{l\varphi lx}{l\varphi(lx \pm lf_1)}.$$

Der dritte Factor, der

$$\frac{lf(x)}{lf(xf_1(x))}$$

lautet, hat wegen der ersten Bemerkung dieses Artikels den Limes 1, da $lf_1(x) \prec lx$, weil $f(x)^{\pm 1} \prec x^{\mu}$, μ beliebig klein. Setzen wir im Rest des Exponenten $lx \pm lf_1 = v$, um φ so zu bestimmen, dass

$$l\varphi(v) \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)} \gtrsim 1$$

sei. Man findet:

$$\varphi(v) \gtrsim e^{M\sqrt{v}}, \quad M \text{ beliebig gross,}$$

oder

$$f(x) \gtrsim e^{M\sqrt{lx}}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst:

Wenn

$$e^{M\sqrt{lx}} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-M\sqrt{lx}}, \quad M \text{ beliebig gross,}$$

so ist

$$\text{(XIII)} \qquad \frac{f(xf(x)^{\pm 1})}{f(x)} \overline{\infty} e^{lf(x) \cdot x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

Setzen wir weiter:

$$\frac{\varphi(lx \pm lf)}{\varphi(lx)} = e^{lf \frac{\varphi'(lx)}{\varphi(lx)} + \frac{(lf)^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2 l\varphi(lx \pm lf_1)}{d(lx \pm lf_1)}},$$

so folgt aus der ganz wie oben herzuleitenden Bedingung;

$$(l\varphi(v))^2 \frac{d^2 l\varphi(v)}{dv^2} \gtrsim 1,$$

dass

$$l\varphi \sim v^{\frac{2}{3}}$$

sein muss, wie leicht zu verificiren, also, *dass für*

$$e^{Mlx^{\frac{2}{3}}} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{2}{3}}},$$

$$\text{(XIII}_1\text{)} \qquad \frac{f(xf(x)^{\pm 1})}{f(x)} \sim e^{lf \cdot x \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

ist. Weiter würde man finden: ***Für:***

$$e^{Mlx^{\frac{3}{4}}} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{3}{4}}}$$

ist:

$$\text{(XIII}_2\text{)} \qquad \frac{f(xf(x)^{\pm 1})}{f(x)} \sim e^{lfx \frac{f'(x)}{f(x)} + lf^2 x^2 \frac{d^2 lf}{dx^2}}$$

u. s. f. Es ist übrigens wohl kaum nöthig zu bemerken, dass man sich mit der Form $e^{Mlx^{1-\nu}}$ dem Unendlich kleinst denkbarer Potenzen von x nicht unbegrenzt nähern kann, denn wie klein ν und wie gross M auch sei, ist z. B. immer $e^{\mu lx} \succ e^{\frac{lx}{llx}} \succ e^{Mlx^{1-\nu}}$, μ beliebig klein.

Beispiel. Es sei $f(x) = e^{lx^{\frac{1}{2}}}$, so ergiebt sich direct:

$$\frac{f(xf(x)^{\pm 1})}{f(x)} = e^{l\left(xe^{\pm lx^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} - lx^{\frac{1}{2}}},$$

und dies soll ~ 1 sein. Und es ist auch:

$$l\left(xe^{\pm lx^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} - lx^{\frac{1}{2}} = lx^{\frac{1}{2}}\left[\left(1 \pm \frac{1}{lx^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right],$$

wodurch der Satz bestätigt wird.

11. Ueber diese Formeln, wenn das Argument verschwindet.

Der in den Formeln (VIII) enthaltene Satz kann in folgenden übergeführt werden.

Falls $\alpha \prec 1$, $\varrho \prec \alpha$ *und*

$$\alpha^M \precsim f(\alpha) \precsim \alpha^{-M}$$

hat man stets

(XIV) $$\frac{f(\alpha+\varrho)}{f(\alpha)} \infty 1 .$$

In der That, schreibt man:

$$x = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha+\varrho} = x - a, \quad a = \frac{\varrho}{\alpha(\alpha+\varrho)},$$

so hat man, wie $\varrho \prec \alpha$ aus $\frac{1}{1+\frac{\varrho}{\alpha}} = \alpha(x-a) = 1 - \frac{a}{x}$ folgt, wenn $a \succ x$ vorausgesetzt ist, auch:

$$a = \frac{\varrho}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+\frac{\varrho}{\alpha}} \prec x = \frac{1}{\alpha},$$

wenn $\varrho \prec \alpha$ vorausgesetzt ist. Setzen wir nun $f(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, so ist:

$$\frac{f(x-a)}{f(x)} = \frac{\varphi(\alpha+\varrho)}{\varphi(\alpha)},$$

und aus $x^M \precsim f(x) \precsim x^{-M}$ folgt durch Substitution:

$$\alpha^{-M} \precsim \varphi(\alpha) \precsim \alpha^M.$$

Schreibt man f statt φ, so folgt der Satz.

12. Ueber den Limes $f(x+a)-f(x)$.

Man hat:

$$f(x+a)-f(x) \sim af'(x) \tag{XV}$$

für ein endliches a, und wenn:

$$e^{Mx} \gtrsim f(x) \gtrsim e^{-Mx},\ M \text{ beliebig gross},$$

ferner für $1 \prec a \prec x$, falls:

$$x^M \gtrsim f(x) \gtrsim x^{-M}.$$

Der Beweis folgt aus:

$$f(x+a)-f(x) = af'(x)\frac{f'(x+\alpha)}{f'(x)},\quad 0 \leqq \alpha \leqq a,$$

und den Formeln (VII) und (VIII).

Beispiel. Für $f(x)=x^x=e^{x\,lx}$ stimmt der Satz dieses Artikels nicht. Man hat nämlich $(x+a)^{x+a}-x^x \sim x^{a+x}$ und nicht $\sim lx\,x^x$. Dagegen ist für $f(x)=e^{x+\sqrt{x}}$ allerdings:

$$e^{x+a+\sqrt{x+a}}-e^{x+\sqrt{x}} \sim \frac{e^{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},$$

wie durch Entwickelung erst des Exponenten, dann der Exponentialfunction im zweiten Factor rechts von:

$$e^{x+a+\sqrt{x+a}}-e^{x+\sqrt{x}} \sim e^{x+\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\tfrac{a}{x}}-1\right)$$

leicht zu constatiren.

IV. Ueber infinitäre Approximationen.

13. Ueber asymptotische Functionen und infinitäre Approximationen.

Unter asymptotischem Ausdruck einer Function y von x versteht man einen analytischen Ausdruck, der y gleich ist, aber Functionen enthält, die bis auf gewisse Eigenschaften für unendliche Werthe des Arguments, auf die es Einem aber gerade ankommt, unbekannt sind. So kann man, um eines der bekanntesten Beispiele anzuführen, der Bessel'schen Function $J^{(0)}(x)$, und anderen ähnlichen die Form ertheilen: $u \sin x + v \cos x$, wo u und v Functionen ohne Maxima sind, die für $x=\infty$ verschwinden, und schon die Kenntniss dieser Form ist für manche Untersuchungen nützlich. Nähere Bestimmungen beziehen sich dann auf die Grösse der Null von u und v u. s. f.

Dieser Begriff der asymptotischen Function ist indessen bei seiner Allgemeinheit ziemlich nichtssagend, und ich bin allmählig dazu gelangt, daraus einen enger umgrenzten Begriff herauszuheben, den Begriff „der infinitären Approximationen", mit dessen Erklärung ich mich im Folgenden beschäftigen werde.

Wir beginnen wieder damit, alle Functionen, die selbst oder deren Differentialquotienten unendlich viele Maxima haben, von der Betrachtung auszuschliessen, und es wird sich darum handeln, ein Kennzeichen dafür zu finden, dass ein bis auf gewisse Functionen u (von denen nur einzelne Eigenschaften bekannt sind) bekannter Ausdruck $\psi(x, u, u_1, \cdot\cdot)$, den man für eine gesuchte Function y dargestellt hat, annähernd das Unendlich dieser Function ausdrückt, und ein scharfes Maass an die Grösse dieser Annäherung anzulegen.

Wenn man darauf ausgeht, Approximationen im infinitären Grössengebiet zu definiren, so wird man zunächst zu der Analogie mit dem gemeinen Zahlengebiet seine Zuflucht nehmen. Hier unterscheidet man die absolute und die relative Annäherung einer Zahl b an eine Zahl a, die man resp. durch den absoluten Betrag von $a - b$, $\frac{a-b}{a}$ misst. Dem entsprechend würde im infinitären Grössengebiet die Annäherung des Unendlich von η an das von y gemessen werden durch das Unendlich von $\frac{y}{\eta}$, resp. $\left(\frac{y}{\eta}\right)^y$. Doch findet man bald, dass man in dem ersten Ausdrucke den Einfluss der unbekannten Functionen nicht genügend beurtheilen kann, und dass der zweite obendrein viel zu complicirt ist. Folgende Bemerkung brachte mich auf die richtige Spur. Es giebt noch einen dritten, allerdings wesentlich absoluten Maassstab für die Annäherung einer Zahl b an eine Zahl a. Es wird b um so näher an a sein, je grösser der Werth von n, für welchen die Differenz $a^n - b^n$ eine gewisse Grenze nicht übersteigt, und wenn dies für keinen Werth von n stattfindet, so sind a und b gleich.

Begriff und Maass der infinitären Approximation, wie sie sich an diesen Gedanken anlehnen, sind, wie mir scheint, von befriedigender Allgemeinheit und Schärfe, und dienen nicht allein, um sich mit Genauigkeit über den Grad einer Approximation ausdrücken zu können, sondern führen schon an sich zu neuen und interessanten Beziehungen.

13. Begriff der infinitären Approximation und deren Grad.

Wie ich alsbald des Ausführlicheren begründen werde, nenne ich *infinitäre Approximation an eine Function y oder infinitäre Lösung nach y einer Gleichung $f(x, y) = 0$ jede Function*

$$y = \psi(x, u, u_1, \cdot\cdot\cdot),$$

die durch Elimination der bis auf gewisse infinitäre Eigenschaften unbekannten Functionen $u, u_1, \cdot\cdot$ zu einer Gleichheit

$$F(y) \sim F(\eta)$$

führt, in der η vollständig bekannt ist und $F(x) \succ 1$

Die Formel, welche eine solche Elimination oder Transformation schliesslich ermöglicht, ist stets $f(x) \sim \lambda(x) f(x) + \mu(x)$, $\lambda(x) \sim 1$, $\mu(x) \prec f(x)$, in der also links die beiden Functionen $\lambda(x)$, $\mu(x)$ fehlen.

Z. B. ist hiernach in:

$$\text{(V)} \qquad \frac{f(x+a)}{f(x)} = e^{a\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot u}, \quad u \sim 1,$$

die rechte Seite eine infinitäre Approximation der linken, weil man hat

$$l\frac{f(x+a)}{f(x)} \sim l\left(e^{\frac{f'(x)}{f(x)}}\right),$$

wo rechts alles bekannt ist.

Weiter werde ich *die am stärksten unendlich werdende Function* $F(x)$, *für deren Potenzen die Gleichheit:*

$$F(y) \sim F(\eta)$$

noch stattfindet, den Grad der infinitären Approximation nennen.

Im vorigen Beispiele ist lx der Grad der Annäherung. Denn nimmt man in

$$\left(l\frac{f(x+a)}{f(x)}\right)^M \sim \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^M,$$

M nicht beliebig gross, sondern $\succ 1$ an, und setzt links aus (V) für $\frac{f(x+a)}{f(x)}$ seinen Werth, so erhält man:

$$(au)^M \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^M \sim \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^M,$$

eine Gleichheit, die im Allgemeinen nicht besteht, sondern $\lim au = 1$ voraussetzt, und ein solches Unendlich von M, dass $(au)^M \sim 1$. Also darf im Allgemeinen M nicht unendlich werden, und lx ist in der That in allen Fällen, in denen M nicht unendlich werden darf, der Grad der Approximation.

15. Durchführung dieser Begriffe an Beispielen der Exponential- und logarithmischen Functionen.

Es sei zunächst, wenn y wieder die darzustellende Function ist, η bekannt und so beschaffen, dass:

$$y \sim \eta.$$

Indem wir der Einfachheit halber annehmen $\lim \frac{y}{\eta} = 1$, folgt hieraus:

$$y = \eta + u,$$

wo u nur der Bedingung $u \prec \eta$ unterworfen ist. Es ist klar, dass η sich um so weniger von y unterscheiden wird, je kleiner für $u \succ 1$ das Unendlich von u, und für $u \prec 1$ die Null von u. Es involvirt also $y \sim \eta$ schon sehr verschiedene Grade der Annäherung von η an y, die wir etwas classificiren wollen. Nach der Annäherung $u \prec \eta$ wird

eine nächst stärkere sein, wenn u nicht unendlich wird, so dass nicht allein $y \sim \eta$, sondern auch

$$e^y \sim e^\eta.$$

Dies führt darauf, es als fernere Annäherung zu betrachten, wenn die Bedingung

$$e^{e^y} \sim e^{e^\eta}$$

erfüllt ist. Um festzustellen, was hieraus für u in $y = \eta + u$ folgt, setzen wir darin $y - u$ statt η und finden:

$$e^{e^y(1-e^{-u})} \sim 1$$

oder

$$e^y(1 - e^{-u}) \gtrsim 1$$

und durch Reihenentwickelung von e^{-u} in:

$$1 - e^{-u} \gtrsim e^{-y}$$

ergiebt sich:

$$u \gtrsim e^{-y}.$$

Ebenso folgt ferner aus $\eta = y - u$ und

$$e^{e^{e^y}} \sim e^{e^{e^\eta}}$$

für u die Bestimmung:

$$u \gtrsim e^{-(y+e^y)}.$$

Denn aus der Gleichheit

$$e^{e^{e^y} - e^{e^y - u}} \sim 1$$

ergiebt sich zunächst:

$$e^{e^y} - e^{e^y - u} \gtrsim 1,$$

woraus dann weiter folgt:

$$1 - e^{e^y(e^{-u}-1)} \gtrsim e^{-e^y}$$

und durch Entwickelung der Exponentialgrösse links:

$$e^{-u} - 1 \gtrsim e^{-y} e^{-e^y},$$

und daraus abermals durch Entwickelung:

$$u \gtrsim e^{-(y+e^y)}.$$

So sieht man leicht allgemein, dass wenn in

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^y}}}} \sim e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^\eta}}}}$$

y und η im n^{ten} Exponenten stehen sollen, man haben muss:

$$y - \eta \gtrsim e^{-\left(y + e^y + \cdots e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^y}}}}\right)},$$

wo der Exponent y im Exponenten der $(n-1)^{\text{ste}}$ ist. Wenn nun auch die Null von $y-\eta$ durch Thürmen der Exponentialfunctionen kleiner und kleiner gemacht werden kann, so kann sie doch, laut dem in der Einleitung Gesagten, nicht unter jede Grenze sinken.

Betrachten wir jetzt geringere Grade der Annäherung, als der durch $y \sim \eta$ gekennzeichnete ist, wo also $\frac{y}{\eta} \cdot \gtrless 1$.

Es sei zuerst:

$$ly \sim l\eta,$$

so folgt daraus:

$$y = u\eta^m,$$

wo $u^{\pm 1} \prec \eta^\mu$ oder auch $\prec y$. D. h. η ist die dem Typus von y entsprechende Function v (Art. 4.). Setzt man $\eta = e^\sigma$, so folgt aus $ly \sim l\eta$:

$$y = e^{u_1 \sigma},$$

wo $u_1 \sim 1$.

Nehmen wir weiter

$$lly \sim ll\eta$$

als gegeben an, so ist die Approximation noch viel geringer. Man erfährt aus dieser Gleichung nicht einmal den Typus von y, sondern nur den von ly. Es folgt zunächst $ly = u(l\eta)^m$, oder:

$$y = e^{u(l\eta)^m}, \quad u^{\pm 1} \prec l\eta^\mu,$$

und setzt man $\eta = e^{e^\sigma}$, so ergiebt sich:

$$y = e^{e^{u_1 \sigma}}, \quad u_1 \sim 1.$$

In dieser Weise wird die Annäherung bei $llly \sim lll\eta$ etc. fort und fort kleiner. Man kann sich von dieser fortschreitend geringeren Annäherung von η an y auch folgende Vorstellung bilden. Aus $ly \sim l\eta$ folgt, y und $\eta \succ 1$ angenommen, dass η dem Intervall:

$$y^M \cdot \cdot \cdot \cdot y^\mu,$$

M beliebig gross, μ beliebig klein, angehört. Aus $lly \sim ll\eta$ folgt dann, dass $l\eta$ dem Intervall angehört $ly^M \cdot \cdot \cdot ly^\mu$, oder η diesem:

$$e^{ly^M} \cdot \cdot \cdot \cdot e^{ly^\mu}.$$

Aus $llly \sim lll\eta$ folgt ebenso, dass η dem Intervall:

$$e^{e^{lly^M}} \cdot \cdot \cdot \cdot e^{e^{lly^\mu}}$$

angehört u. s. f. Das Intervall dehnt sich nach seinen beiden Grenzen immer mehr aus, da für $M \succ 1$, $\mu \prec 1$

$$y^M \prec e^{ly^M} \prec e^{e^{lly^M}} \cdot \cdot \cdot \cdot, \quad y^\mu \succ e^{ly^\mu} \succ e^{e^{lly^\mu}} \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

die obere Grenze erreicht aber nicht e^y, die untere nicht ly.

Nachdem wir diese Verhältnisse an der exponentialen und logarithmischen Functionenreihe verfolgt haben, wollen wir die dabei zu Tage tretenden allgemeinen Beziehungen in Sätzen aussprechen und beweisen.

16. Die allgemeinen Sätze, welche bei diesen Verhältnissen hervortreten.

I. Satz. Wenn $F(x) \succ 1$ *und für zwei Functionen* y *und* η *von* x *findet die Gleichheit*

$$F(y) \sim F(\eta)$$

statt, so ist sie auch richtig für jede Function $F_1(x)$, *die der Bedingung* $1 \gtrsim F_1(x) \prec F(x)$ *genügt.*

Beweis. Wenn $y > \eta$, $F(x) \succ F_1(x)$, so ist auch

$$\frac{F(y)}{F(\eta)} \geq \frac{F_1(y)}{F_1(\eta)}.$$

Denn setzt man $F(x) = \varphi(x) F_1(x)$, wo $\varphi(x) \succ 1$, so ist offenbar:

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi(\eta)} \geq 1.$$

Wenn also $\frac{F(y)}{F(\eta)} \sim 1$, so kann $\frac{F_1(y)}{F_1(\eta)}$ jedenfalls nicht $\succ 1$ sein, aber es kann auch, eben wegen $F_1(x) \succ 1$, $y > \eta$ nicht $F_1(y) < F_1(\eta)$ sein, also etc. Q. e. d.

II. Satz. Wenn die Gleichheit

$$F(y) \sim F(\eta)$$

für jede beliebige Grösse des Unendlich von $F(x)$ *und ein unveränderliches Unendlich von* y *und* η *stattfinden soll, so muss von irgend einem endlichen Werthe von* x *an* $y = \eta$ *sein.*

Beweis. Wir nehmen $\eta < y$ an und setzen:

$$F(y) = F(\eta) + (y - \eta) F'(\eta + \varepsilon (y - \eta)), \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Hieraus folgt wegen $F(y) \sim F(\eta)$ zunächst:

$$F(\eta) + (y - \eta) F'(\eta + \varepsilon (y - \eta)) \sim F(\eta),$$

und dann:

$$(y - \eta) \frac{F'(\eta + \varepsilon (y - \eta))}{F(\eta)} \gtrsim 1.$$

Nun sei T der Typus von F. Vorstehende Relation wird dann:

$$\frac{y - \eta}{T(\eta + \varepsilon (y - \eta))} \cdot \frac{F(\eta + \varepsilon (y - \eta))}{F(\eta)} \gtrsim 1.$$

Erstens ist der zweite Factor linker Hand nicht kleiner als Eins. Was den ersten Factor betrifft, so ist $\frac{1}{T(x)}$ von einer gewissen Grösse des

Unendlich von $F(x)$ an $\succ 1$ und es ist leicht zu zeigen, dass das Unendlich von $\frac{1}{T(x)}$ sowohl als das von $\frac{1}{T(\eta)}$ durch geeignete Annahmen über $F(x)$ beliebig vergrössert werden kann.

Zunächst ist klar, dass das Unendlich von $\frac{1}{T(\eta)}$ im Verhältniss zu dem von η beliebig vergrössert werden kann. Denn da:

$$F(\eta) \sim e^{u\int \frac{d\eta}{T(\eta)}}, \quad u \sim 1,$$

ist, so müsste, wenn das Unendlich von T^{-1} nicht über jede Grenze hinaus vergrössert werden könnte, Gleiches von dem der Function F gelten, was absurd ist. Wenn aber, $\eta = \varphi(x)$ gesetzt, das Unendlich von $\frac{1}{T(\eta)} = \chi(x)$ im Verhältniss zum Unendlich von η beliebig vergrössert werden kann, so gilt dasselbe vom Unendlich von $\chi(x)$ im Verhältniss zu dem von x. Mit anderen Worten, wenn w eine beliebig schwach unendlich werdende Function von x ist, so kann Φ immer so bestimmt werden, dass $\Phi(u) = \Psi(x)$ beliebig stark im Verhältniss zu x unendlich wird. Denn es sei $u = \varphi(x)$, $x = \psi(u)$, so setze man zunächst $\Phi(x) = \Phi_1(\psi(x))$, so dass $\Phi(u) = \Phi_1(x)$, alsdann liegt für das Unendlich von Φ_1 gar keine Beschränkung vor.

Hiernach würde, wenn $y - \eta$ nicht von einem endlichen Werthe von x an Null ist,

$$\frac{1}{T(\eta + \varepsilon(y-\eta))} \cdot \frac{F(\eta + \varepsilon(y-\eta))}{F(\eta)} \succ \frac{1}{y-\eta}$$

gemacht werden können, was mit den aus den Voraussetzungen des Satzes folgenden obigen Relationen im Widerspruche steht. Q. e. d.

III. Satz. Es sei das Unendlich von η beliebig viel grösser oder kleiner als das von y, so giebt es immer eine Function F der Art, dass $F \succ 1$ und

$$F(y) \sim F(\eta).$$

Beweis. Wir denken uns $\eta \succ y$, setzen $\eta = \varrho(y)$, und notiren auf einer Abscissenaxe eine Folge von Punkten $y_1, y_2, \cdots$, die wir so bestimmen: y sei beliebig gewählt. Dann aber sei:

$$\begin{aligned} y_1 &= \eta \;\; = \varrho(y), \\ y_2 &= \eta_1 = \varrho(y_1), \\ y_3 &= \eta_2 = \varrho(y_2), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Auf den Punkten $y, y_1, y_2 \cdots$ errichten wir die Ordinaten

$$h, hc, hc^2, \cdots,$$

wo $c > 1$, und verbinden deren Endpunkte, was für unseren Beweis ausreicht, zu je zwei benachbarten durch geradlinige Strecken, die

dann eine ins Unbegrenzte sich erstreckende polygonale Linie bilden. Diese stellt, wie wir gleich sehen werden, eine Function dar, wie deren Existenz bewiesen werden soll. Da der Punkte $y, y_1, y_2, \cdots$ unendlich viele sind, so wird erstens $F(x)$ unendlich, weil die Ordinaten hc^n mit n unendlich werden. Zweitens kann $\frac{F(y)}{F(\eta)}$ nie unendlich werden. Denn es sei

$$y_n + \Delta = y'_n$$

ein zwischen y_n und y_{n+1} gelegener Werth und ebenso

$$y'_{n+1} = \varrho\,(y_n + \Delta)$$

ein dazu gehöriger Werth zwischen y_{n+1} und y_{n+2}. Wir nehmen noch an, dass die Grösse $\varrho\,(y) - y$ nirgends abnehmend unendlich wird, und finden zunächst mit leichter Mühe:

$$\frac{F(y'_{n+1})}{F(y'_n)} = \frac{1}{c}\,\frac{1 + (c-1)\dfrac{\Delta}{y_{n+1} - y_n}}{1 + (c-1)\dfrac{y'_{n+1} - y_{n+1}}{y_{n+2} - y_{n+1}}}.$$

Der Zähler rechts reducirt sich im Unendlichen auf Eins, und der Nenner ist ~ 1, da $y'_{n+1} - y_{n+1} < y_{n+2} - y_{n+1}$. Q. e. d.

17. Uebersicht des Ganzen der infinitären Approximation.

Aus diesen allgemeinen Sätzen und den vorangeschickten Beispielen ergiebt sich folgende Uebersicht.

I. Für zwei Functionen y und η existirt immer eine dritte Function f, welche der Gleichheit

$$f(y) \sim f(\eta)$$

genügt. Dann giebt es aber stets eine solche Function $F \gtrsim f$, dass die Gleichheit

$$F(y) \sim F(\eta)$$

noch stattfindet, und zwar stattfindet für alle Functionen $f \gtrsim F$ und für keine Function $f_1 \succ F$. Für diese letztere ist dann immer

$$f_1(y) \gtrless f_1(\eta),$$

je nachdem $y \gtrless \eta$ ist. Denn wenn bei steigendem Unendlich von f die Relation $f(y) \sim f(\eta)$ nicht einmal in diese: $f(y) \gtrless f(\eta)$ überspränge, so müsste nach dem zweiten Satze $y = \eta$ sein.

II. Die Function F, welche die Grenze bildet zwischen den Relationen $f(y) \sim f(\eta)$ und $f(y) \gtrless f(\eta)$, bestimmt aber den Grad der infinitären Annäherung von η an y, und dies ist nun etwas genauer zu prüfen.

Wenn die Gleichheit

$$F(y) \sim F(\eta),$$

wo $F(x) \succ 1$, angesetzt ist, so wird sie richtig sein innerhalb eines gewissen Intervalls des Unendlich von η, welches wir durch

$$O_F(y) \gtrsim \eta \gtrsim U_F(y)$$

oder kürzer durch $O_F \cdots U_F$ bezeichnen wollen. Dass ein solches begrenztes Intervall allemal existirt, wenn nicht $F \sim 1$, ist leicht nachzuweisen, denn setzt man $F(y) = u$, woraus $y = \Phi(u)$ folge, so braucht man η nur gleich $\Phi(\varrho(u))$ anzunehmen, um aus $F(y) \sim F(\eta)$ die bei der Willkührlichkeit von $\varrho(u)$ absurde Relation $u \sim \varrho(u)$ zu erhalten. Es giebt also ein Unendlich von η, für welches nicht mehr $F(y) \sim F(\eta)$ sein kann.

Nun denke man sich in $F(y) \sim F(\eta)$ $F(x)$ alle Grössen des Unendlich durchlaufend von der untersten Grenze an, wo $F(x) \sim 1$ ist (was man ein Unendlich von der Grösse Null nennen kann) bis zu „unendlich grossem Unendlich", so wird das Intervall

$$O_F \cdots U_F$$

zuerst (für $F(x) \sim 1$) unbegrenzt sein, da es dann gleichgültig ist, wie y und η unendlich werden, und man immer hat:

$$F(y) \overline{\infty} F(\eta).$$

Die Grenzen werden sich nun bei steigendem Unendlich von $F(x)$ allmählig zusammenziehen, bis bei unbegrenzt grossem Unendlich von F das Intervall von η Null wird, d. i. $y = \eta$ ist, und $F(x)$ *ist allemal der Grad der Approximation von* O_F *zu* U_F *und umgekehrt.*

Verfolgen wir noch etwas genauer die Beziehung von F zu O_F und U_F. Es ist klar, dass O_F und U_F sich nicht verändern, wenn F zu irgend einer Potenz erhoben wird, oder mit einer Function von kleinerem Unendlich multiplicirt wird, wegen Satz I. D. h. also: O_F und U_F *verändern sich nicht, so lange der Typus von* F *sich nicht verändert.* Was nun umgekehrt zu erweisen wäre, dass nämlich O_F und U_F sich verändern, sobald der Typus von F sich verändert, ist mir leider noch nicht in befriedigender Weise ausser Zweifel zu setzen geglückt.

Zum Schlusse dieser Betrachtung kann ich nicht unterlassen darauf aufmerksam zu machen, wie merkwürdige Verhältnisse die behandelte Frage an den Tag treten lässt und noch zu enthüllen verspricht. Die Functionen $F(x)$ mit kleinstem Unendlich, die wir bis jetzt kennen, die wiederholten Logarithmen, geben ein Intervall $O_F \cdots U_F$, das kleiner ist als dieses: $e^y \cdots \log y$ (Art. 15). Fragen wir nun nach der Function, welche die Gleichheit

$$F(y) \sim F(e^y)$$

zur Wahrheit macht, so existirt sie noch nicht in der heutigen Analysis.

Gleichwohl ist festgestellt, dass sie allerdings vorhanden ist, und so führt diese Theorie darauf, ganz neue Abhängigkeiten aufzusuchen. Die Function, nach welcher eben die Frage gestellt wurde, müsste auch diese Gleichheit erfüllen:

$$F(y) \sim F\left(e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^y}}}}\right),$$

die aus der obigen eo ipso folgt, und in der rechts y beliebig hoch im Exponenten stehen kann.

Ich gehe nun dazu über, die infinitären Lösungen einiger Gleichungen wirklich aufzustellen und auf Grund der eben dargelegten Principien ihren Annäherungsgrad zu bestimmen, wo dies nützlich erscheint.

V. Ueber infinitäre Auflösung von Gleichungen.

I. Die Gleichung $x = \varphi(y)$.

18. Die Gleichung $x = \varphi(y)$. Hülfssätze.

Als einfachsten allgemeinen Fall der infinitär aufzulösenden Gleichung $0 = f(x, y)$ kann man diesen

$$x = \varphi(y) \tag{1}$$

ansehen, mit dem wir uns zunächst beschäftigen wollen. Wir specialisiren noch das Problem, indem wir für $\varphi(y)$ die Form $y\varkappa(y)$ annehmen, wo $\varkappa(y)^{\pm 1} \prec y^{\mu}$, μ beliebig klein.

Es sei also die Gleichung

$$x = y\varkappa(y) \tag{2}$$

infinitär aufzulösen. Es wird sich zeigen, dass sie eine Schaar von recurrenten Lösungen für eine Schaar stets erweiterter Unendlichkeitsintervalle von $\varkappa(y)$ besitzt, die indessen nicht das ganze Unendlichkeitsgebiet von $\varkappa(y)$:

$$y^{\mu} \succ \varkappa(y) \succ y^{-\mu}$$

umfassen. Für die übrigen Functionen $\varkappa(y)$ liefern die hier zu entwickelnden Methoden keine Lösungen.

Wir brauchen zwei Hülfssätze.

1. *Es ist allgemein,* $f(x) = \varphi(lx) = \varphi l$ *gesetzt,*

$$\frac{f(xa)}{f(x)} = e^{la\frac{d\,l\varphi l}{dl} + \frac{1}{2}(la)^2\frac{d^2 l\varphi l}{dl^2} + \cdots \frac{1}{n!}(la)^n \frac{d^n \varphi l\,(x\alpha)}{d^n l\,(x\alpha)}}, \tag{3}$$

wo α *numerisch zwischen* 1 *und* a *liegt.* Für $n = 1$ ist insbesondere

$$\frac{f(xa)}{f(x)} = e^{la \,.\, x a \frac{f'(x\alpha)}{f(x\alpha)}}, \tag{4}$$

ferner ist

$$\frac{d^2 l\varphi l}{dl^2} = x\frac{f'(x)}{f(x)} + x^2\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{f(x)} \text{ u. s. f.}$$

2. *Wenn* $a^{\pm 1} \prec x^\mu$, μ *beliebig klein, so ist*

$$xa\,\frac{\varkappa'(xa)}{\varkappa(xa)} = x\,\frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}\,U, \quad U \overline{\infty} 1. \tag{5}$$

Da $\varkappa(x)^{\pm 1} \prec x^\mu$, μ beliebig klein, so hat der Typus τ von $\varkappa(x)$ die Form $x\tau_1(x)$, wo $\tau_1(x) \succ 1$. Aber das Unendlich von $\tau_1(x)$ kann nicht so gross sein wie eine höhere als die erste Potenz von lx, da der Typus unendlich oder Null werdender Functionen nicht so rasch unendlich werden kann wie $xlx^{1+\mu}$, $\mu > 0$.

Es ist also

$$xa\,\frac{\varkappa'(xa)}{\varkappa(xa)} = \frac{1}{\tau_1(xa)} = \frac{1}{\tau_1(x)}\cdot\frac{\tau_1(x)}{\tau_1(xa)}.$$

Nach Formel (XII) (Art. 10.) ist der zweite Factor rechts $\overline{\infty} 1$, da $a^{\pm 1} \prec x^\mu$, μ beliebig klein, und jedenfalls $lx^M \precsim \tau_1(x) \precsim lx^{-M}$ reichlich erfüllt ist, indem M jede beliebige Grösse haben darf. Setzt man nun $U = \frac{\tau_1(x)}{\tau_1(xa)}$, $\frac{1}{\tau_1(x)} = x\frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}$, so folgt die Umformung (5).

19. Die Auflösung von $x = y\varkappa(y)$ für ein erstes Intervall von $\varkappa(y)$.

Um nun die Gleichung $y\varkappa(y)$ infinitär aufzulösen, setzen wir zuerst

$$\xi = \frac{x}{\varkappa(x)}, \quad y = u\xi \tag{6}$$

und versuchen, ob und zwischen welchen Grenzen u einen endlichen Limes hat. Durch Substitution von $y = u\xi$ in $x = y\varkappa(y)$ findet man:

$$1 = u\,\frac{\varkappa\left(x\,\frac{u}{\varkappa(x)}\right)}{\varkappa(x)}, \tag{7}$$

und wegen Formel (4):

$$1 = e^{lu + l\frac{u}{\varkappa(x)}\cdot xu_1\frac{\varkappa'(xu_1)}{\varkappa(xu_1)}}, \quad 1 \lesssim u_1 \lesssim \frac{u}{\varkappa(x)},$$

woraus zunächst:

$$0 = lu + (lu - l\varkappa)\cdot xu_1\,\frac{\varkappa'(xu_1)}{\varkappa(xu_1)} \tag{8}$$

sich ergiebt. Hieraus können wir eine Eigenschaft von u nachweisen, die für jede Function $\varkappa$ gilt. Durch Einführung des Typus $x\tau_1(x)$ von $\varkappa(x)$, wie im zweiten Hülfssatze des vorigen Art. erhalten wir:

$$0 = lu + \frac{(lu - l\varkappa)}{\tau_1(xu_1)}. \tag{9}$$

Multiplicirt man aber $1 \lesssim u_1 \lesssim \frac{u}{\varkappa(x)}$ mit x, so wird daraus:

$$x \lesseqgtr x u_1 \lesseqgtr y \,. \tag{10}$$

Da nun x und y beide unendlich werden, so ist auch $x u_1 \succ 1$. Man findet aus der vorigen Gleichung:

$$u = \varkappa(x)^{\frac{1}{1+\tau_1(x u_1)}},$$

weil nun auch $\tau_1(x) \succ 1$, so ergiebt sich hieraus:

$$u = \varkappa(x)^{\nu}, \quad \nu \prec 1 \,, \tag{11}$$

in Worten: *u wird langsamer Null oder unendlich wie eine Potenz von* $\varkappa(x)$. Also wird jedenfalls u_1 langsamer Null oder unendlich als eine Potenz von x, und auf Grund des zweiten Hülfssatzes werden wir (8) schreiben dürfen:

$$0 = lu + (lu - l\varkappa)\, x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} U \,, \quad U \overline{\overline{\infty}}\, 1. \tag{12}$$

Da $lu \prec l\varkappa$, so wird man haben $lu \lesseqgtr 1$, je nachdem

$$l\varkappa x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} \lesseqgtr 1 \,.$$

Schreibt man diese Relation so:

$$\frac{d(l\varkappa)^2}{dx} \lesseqgtr \frac{1}{x} \,, \tag{13}$$

so entspricht ihr das Intervall:

$$e^{Mlx^{\frac{1}{2}}} \lesseqgtr \varkappa(x) \lesseqgtr e^{-Mlx^{\frac{1}{2}}}. \tag{14}$$

Wenn für irgend einen Werth von M das obere Zeichen eintrifft, so ist in $y = u \frac{x}{\varkappa(x)} : u \sim 1$, wenn für jeden Werth von M nur das untere gilt, so ist $u \overline{\overline{\infty}}\, 1$.

20. Die Auflösung von $x = y\varkappa(y)$ für ein weiteres Intervall.

Um für ein weiteres Intervall von $\varkappa(x)$ die infinitäre Lösung zu finden, setzen wir:

$$\xi = \frac{x}{\varkappa(x)} \,, \quad \xi_1 = \frac{x}{\varkappa(\xi)} \,, \quad y = u' \xi_1 \,. \tag{15}$$

Dies in $x = y\varkappa(y)$ eingeführt, folgt:

$$1 = u' \frac{\varkappa\left(x \frac{u'}{\varkappa(\xi)}\right)}{\varkappa(\xi)} = u' \frac{\varkappa\left(\xi \cdot \frac{x}{\xi} \cdot \frac{u'}{\varkappa(\xi)}\right)}{\varkappa(\xi)} = u' \frac{\varkappa\left(\xi \cdot \frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)} u'\right)}{\varkappa(\xi)} \,, \tag{16}$$

woraus sich durch Hülfssatz 1, Art. 18 ergiebt:

$$1 = e^{lu' + l\left(\frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)} u'\right) \xi u_1' \frac{\varkappa'(\xi u_1')}{\varkappa(\xi u_1')}} \,, \tag{17}$$

wo

$$1 \leqslant u_1' \leqslant u' \frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)} .$$

Multiplicirt man diese Ungleichheit mit ξ, so folgt:

$$\xi \leqslant \xi u_1' \leqslant y . \tag{18}$$

Wegen $\xi = \frac{x}{\varkappa(x)}$ wird ξ jedenfalls mit x und y zugleich unendlich, also ist $\xi u_1' \succ 1$. Aus (17) ergiebt sich aber, ebenso wie oben (9) erhalten wurde:

$$0 = lu' + \frac{\left(lu' - l\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(x)}\right)}{\tau_1(\xi u_1')}, \tag{19}$$

woraus, ganz wie oben (11), hier

$$u' = \frac{\varkappa(\xi)^{\nu'}}{\varkappa(x)}, \quad \nu' \prec 1 \tag{20}$$

folgt. Nun ist $\xi u_1' = x \cdot \frac{u_1'}{\varkappa(x)}$, und der zweite Factor kann wegen $1 \leqslant u_1' \leqslant u' \frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)} = \frac{\varkappa(\xi)^{1-\nu}}{\varkappa(x)}$ nicht so stark wie eine Potenz von x unendlich werden. Also folgt aus (17) auch, wie oben (12) aus (8), hier:

$$0 = lu' + \left(lu' - l\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(x)}\right) x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} U', \quad U' \overline{\overline{\infty}} 1 , \tag{21}$$

und man hat wieder $lu' \gtrsim 1$, je nachdem:

$$l\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(x)} x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} \gtrsim 1. \tag{22}$$

Nun ist

$$\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(x)} = \frac{\varkappa\left(x\frac{1}{\varkappa(x)}\right)}{\varkappa(x)} = e^{l\frac{1}{\varkappa(x)} x^{\nu} \frac{\varkappa'(x^{\nu})}{\varkappa(x^{\nu})}}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \frac{1}{\varkappa(x)} ,$$

folglich

$$l\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(x)} = -l\varkappa(x) \cdot x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} U_1 , \quad U_1 \overline{\overline{\infty}} 1 . \tag{23}$$

Dies in die vorstehende Bedingung eingeführt, giebt erst:

$$l\varkappa(x) \left(x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}\right)^2 \gtrsim 1 ,$$

und dann:

$$\frac{d(l\varkappa(x))^{\frac{1}{2}}}{dx} \gtrsim \frac{1}{x} ,$$

schliesslich aber das Intervall:

$$e^{Mlx^{\frac{1}{2}}} \gtrsim \varkappa(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{1}{2}}}. \tag{24}$$

21. Schluss der Auflösung von $x = y\varkappa(y)$ nach der ersten Methode.

Ein noch weiteres Intervall findet man, indem man setzt:

$$(25) \qquad \xi = \frac{x}{\varkappa(x)}\,, \quad \xi_1 = \frac{x}{\varkappa(\xi)}\,, \quad \xi_2 = \frac{x}{\varkappa(\xi_1)}\,, \quad y = u''\xi_2\,.$$

Es ist hier nicht mehr nöthig, die vorigen Betrachtungen im Einzelnen zu wiederholen. Man findet, ganz wie im vorigen Artikel, durch Einsetzen von $y = u''\xi_2$ in $x = y\varkappa(y)$:

$$(26) \qquad 1 = u'' \frac{\varkappa\left(x\frac{u''}{\varkappa(\xi_1)}\right)}{\varkappa(\xi_1)} = u'' \frac{\varkappa\left(\xi_1 \frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(\xi_1)} u''\right)}{\varkappa(\xi_1)},$$

und setzt man:

$$1 = e^{lu'' + l\left(\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(\xi_1)}u''\right)\xi_1 u_1'' \frac{\varkappa'(\xi_1 u_1'')}{\varkappa(\xi_1 u_1'')}},$$

so folgt aus

$$1 \lesssim u_1'' \lesssim u'' \frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(\xi_1)}\,:$$

$$\xi_1 \lesssim \xi_1 u_1'' \lesssim y\,,$$

und weiter ergiebt sich:

$$u'' = \frac{\varkappa(\xi_1)^{\nu''}}{\varkappa(\xi)}\,, \quad \nu'' \prec 1\,.$$

Nun ist wieder $\xi_1 u_1'' = x \cdot \frac{u_1''}{\varkappa(\xi_1)}$, wovon der zweite Factor nicht so stark wie eine Potenz von x unendlich wird, also folgt aus:

$$0 = lu'' + \left(lu'' - l\frac{\varkappa(\xi_1)}{\varkappa(\xi)}\right) x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} U'', \quad U'' \overline{\overline{\infty}}\, 1\,:$$

$$l\frac{\varkappa(\xi_1)}{\varkappa(\xi)} \cdot x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} \gtrsim 1$$

als Bedingung dafür, dass $lu'' \gtrsim 1$ sei. Man hat:

$$\frac{\varkappa(\xi_1)}{\varkappa(\xi)} = \frac{\varkappa\left(\xi \cdot \frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)}\right)}{\varkappa(\xi)} = e^{l\left(\frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)}\right) \cdot \xi^{\nu} \frac{\varkappa'(\xi^{\nu})}{\varkappa(\xi^{\nu})}}, \quad 1 \lesssim \nu \lesssim \frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)}\,,$$

oder

$$\frac{\varkappa(\xi_1)}{\varkappa(\xi)} = e^{l\frac{\varkappa(x)}{\varkappa(\xi)} x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} U_2}, \quad U_2 \overline{\overline{\infty}}\, 1\,.$$

Ausserdem hat man:

$$l\frac{\varkappa(\xi)}{\varkappa(x)} = -l\varkappa(x) \cdot x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} U_1, \quad U_1 \overline{\overline{\infty}}\, 1\,,$$

wegen (23) des vorigen Artikels. Also wird die Bedingung für $\varkappa(x)$

$$l\varkappa(x) \cdot \left(x \frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}\right)^3 \gtrsim 1\,,$$

die

$$\frac{d(l\varkappa(x))^{\frac{1}{3}}}{dx} \gtrsim \frac{1}{x}$$

geschrieben werden kann und aus der das Intervall:

$$e^{Mlx^{\frac{3}{4}}} \gtrsim \varkappa(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{3}{4}}}$$

folgt.

22. Zusammenfassung der obigen Resultate.

Wir finden also allgemein, dass, *wenn:*

$$\xi_0 = \frac{x}{\varkappa(x)}, \quad \xi_1 = \frac{x}{\varkappa(\xi_0)}, \quad \xi_2 = \frac{x}{\varkappa(\xi_1)} \cdots \xi_{n-1} = \frac{x}{\varkappa(\xi_{n-2})}$$

gesetzt wird, die Gleichung $x = y\varkappa(y)$ eine Schaar infinitärer Lösungen hat der Form:

$$y = u\xi_{n-1}.$$

In dem Intervall

$$e^{Mlx^{\frac{n}{n+1}}} \gtrsim \varkappa(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{n}{n+1}}}$$

genügt nämlich die Lösung $y = u\xi_{n-1}$ der Gleichung $x = y\varkappa(y)$ in der Weise, dass, falls für einen Werth von M das obere Zeichen richtig ist, u nicht unendlich wird. Im Falle nur das untere Zeichen gilt, ist $u \overline{\infty} 1$.

23. Ueber einige andere Formen der infinitären Lösung von $x = y\varkappa(y)$.

Aus

$$1 = u \frac{\varkappa\left(x \frac{u}{\varkappa(x)}\right)}{\varkappa(x)} \tag{7}$$

und aus (3) folgt:

$$lu + l\frac{u}{\varkappa(x)} \frac{dlkl}{dl} + \tfrac{1}{2}\left(l\frac{u}{\varkappa(x)}\right)^2 \frac{d^2lkl}{dl^2} + \cdots \frac{1}{n!}\left(l\frac{u}{\varkappa(x)}\right)^n \frac{d^nlklxu_1}{d^nlxu_1} = 0, \tag{27}$$

wo $k(lx) = \varkappa(x)$, und u_1 zwischen 1 und $\frac{u}{\varkappa(x)}$ liegt. Ihr letzter Term kann so umgeformt werden:

$$\frac{d^nlklxu_1}{d^nlxu_1} = \frac{d^nlklx}{d^nlx} U, \quad U \overline{\infty} 1,$$

was schon evident ist, wenn es für $n = 2$ gezeigt wird. Für $n = 2$ hat man:

$$\frac{d^2lklxu_1}{d^2lxu_1} = xu_1 \frac{\varkappa'(xu_1)}{\varkappa(xu_1)} + x^2u_1^2 \frac{\varkappa''(xu_1)\varkappa(xu_1) - \varkappa'(xu_1)^2}{\varkappa(xu_1)^2}.$$

Nun folgt aus dem zweiten Theile der Anm. zu Art. 5.

$$\varkappa(x) \sim \tau\varkappa'(x) \sim x\tau\varkappa''(x),$$

wenn τ der Typus von $\varkappa(x)$, und $\tau = x\tau_1$ gesetzt, können wir schreiben:

$$\frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)} = \frac{1}{x\tau_1(x)}, \quad \frac{\varkappa''(x)}{\varkappa(x)} = \frac{1}{x^2\tau_2(x)}, \quad \tau_2(x) \sim \tau_1(x).$$

Dies giebt:

$$\frac{d^2lklxu_1}{d^2lxu_1} = \frac{1}{\tau(xu_1)} + \frac{1}{\tau_1(xu_1)} - \frac{1}{\tau_1^2(xu_1)} = \vartheta(xu_1),$$

und $\vartheta(xu_1)$ kann jetzt wie im Hülfssatze (2) $xa\frac{\varkappa'(xa)}{\varkappa(xa)}$ transformirt werden und zwar in $\vartheta(x)\cdot U$, $U \overline{\overline{\infty}} 1$.

Das letzte Glied in (27), welches man so in der Form erhält:

$$\frac{1}{n}(lu - lx)^n \frac{d^n lkl}{dl^n} U,$$

wird $\gtrsim 1$ sein, je nachdem:

$$lx^n \frac{d^n lkl}{dl^n} \gtrsim 1.$$

Wegen $x = kl$ sieht man leicht, dass dieser Relation genügt wird durch:

$$e^{Mlx^{\frac{n}{n+1}}} \gtrsim \varkappa(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{n}{n+1}}}.$$

Wenn also $\varkappa(x)$ der vorstehenden Bedingung genügt, so genügt u einer Gleichung der Form:

$$(29)\quad lu + (lu - lx)\frac{dlkl}{dl} + \cdots \frac{1}{(n-1)!}(lu-lx)^{n-1}\frac{d^{n-1}lkl}{dl^{n-1}} = V,$$

wo im Falle des oberen Zeichens in der Intervallbestimmung für x: $V \sim 1$, im Falle des unteren Zeichens $V \overline{\overline{\infty}} 1$ ist.

Ich werde nur den Fall $n = 2$ dieser allgemeinen Gleichung ins Auge fassen. Aus:

$$lu + (lu - lx)\frac{dlkl}{dl} = V$$

findet man

$$u = e^V \varkappa(x)^{\frac{x\frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}}{1+x\frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}}}$$

und

$$(30)\qquad y = u' x\varkappa(x)^{-\frac{1}{1+x\frac{\varkappa'(x)}{\varkappa(x)}}}$$

eine infinitäre Lösung in der $u' \sim 1$ oder $\overline{\overline{\infty}} 1$, je nachdem:

$$e^{Mlx^{\frac{2}{3}}} \gtrsim \varkappa(x) \gtrsim e^{-Mlx^{\frac{2}{3}}}.$$

Aehnlich wie diese Lösung aus (7) folgt, können aus (16) und (26) u. s. w. Lösungen abgeleitet werden, in denen die $\frac{2}{3}$ Potenz durch die $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ u. s. w. ersetzt werden, und bei denen immer der Exponent die Stelle einer Einschachtelung der Lösungsform der vor. Art. vertritt.

24. Einige Bemerkungen über die Lösungen der Gleichung $x = yx(y)$.

Wenn in dem Intervall

$$e^{Mlx^m} \ldots\ldots e^{-Mlx^m}$$

$m = 1$ Eins gesetzt wird, so würde man schon über das $x(x)$ gestattete Intervall hinausgehen, und doch beherrschen die vorigen Lösungen, in denen $m = \frac{n}{n+1}$, und n beliebig gross ist, keineswegs das ganze Intervall von x, sondern es bleiben viele Fälle ausgeschlossen, z. B. dieser: $x(x) = e^{\frac{lx}{llx}}$, wie schon Art. 10. bemerkt wurde. Dies auf die Form $e^{\frac{n}{lx^{n+1}}}$ gebracht, ist nämlich $n = \frac{llx}{lllx} - 1$, also > 1 und nicht beliebig gross.

Was den Grad der Approximation obiger Lösung anlangt, so ist im Intervall von $x(x)$, in welchem u endlich ist, $y = u\xi_{n-1}$ eine Lösung vom Grade x, wegen $y \sim \xi_{n-1}$. Ausserhalb dieses Intervalles ist sie eine Lösung vom Grade lx, was aber schon von $y = x$ gilt, da $lx \sim ly$.

25. Die Lösung der allgemeinen Gleichung $x = \varphi(y)$.

Handelt es sich nun um die infinitäre Auflösung von $x = \varphi(y)$ im Allgemeinen, so sei zuerst:

$$x = y^m x(y)\,,$$

wo $x(y)^{+1} \prec y^\mu$, μ beliebig klein. Diese Aufgabe läuft auf die vorige hinaus, wenn beide Seiten der Gleichung zur $\frac{1}{m}$ Potenz erhoben werden. Nun sei allgemein

$$x = v^m k(y) = \varphi(y)$$

unter $\frac{1}{\frac{dlv}{dy}}$ den Typus von $\varphi(y)$ verstanden und k^{+1} sei $\prec v^\mu$, μ beliebig klein. Alsdann möge aus $v = r(y)$ $y = \varrho(v)$ gefunden werden, und es kommt

$$x = v^m k(\varrho(v))$$

auf den vorigen Fall zurück. Man denke sich $v = u\xi_{n-1}$ hieraus dargestellt, und man bilde:

$$\varrho(v) = y = \varrho(u\xi_{n-1})\,. \tag{31}$$

Da nun $r(\varrho(u\xi_{n-1})) = u\xi_{n-1} \sim \xi_{n-1} = r(\varrho(\xi_{n-1}))$ ist, so folgt aus $y = \varrho(u\xi_{n-1})$:

$$r(y) \sim r[\varrho(\xi_{n-1})]\,,$$

aus welcher Relation u entfernt ist. Mithin ist r der Grad der Approximation der Lösung:

$$y = \varrho(u\xi_{n-1})$$

und wir haben folgendes Resultat:

Ein je grösseres Unendlich $\varphi(y)$ in $x = \varphi(y)$ hat, desto höher ist der Grad der Approximation der durch die obigen Methoden zu findenden Lösungen. Ist $\varphi(y) \sim y^m$, so kann man schon das Unendlich von y finden. Falls $\varphi(y) \sim e^{my}$, kann man y auf die Form $\eta + u$ bringen, in der u nicht unendlich wird, sondern nur y etc. Falls dagegen $\varphi(y) \prec x^\mu$, μ beliebig klein, so kann man nicht mehr das Unendlich von y finden, sondern zuerst nur den Typus, bei kleinerem Unendlich von $\varphi(y)$ auch nicht einmal mehr diesen u. s. f.

26. Beispiele für die obigen Lösungen.

Hier sind einige Beispiele für die infinitäre Auflösung nach der vorgetragenen Methode.

Es sei erstens:

$$x = y^m \, ly^{m_1} \, l_2 y^{m_2} \cdots l_r y^{m_r}, \quad (l_2 y = lly \text{ etc.}),$$

so ergiebt sich nach Art. 19. auf der Stelle:

$$y = \frac{u m^{\frac{m_1}{m}} x^{\frac{1}{m}}}{lx^{\frac{m_1}{m}} \, l_2 x^{\frac{m_2}{m}} \cdots l_r x^{\frac{m_r}{m}}}, \quad u \overline{\overline{\infty}} \, 1 \cdot$$

Im Nenner stehen nämlich eigentlich Logarithmen der Form $\left(l_p x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{m_p}{m}}$, die sich vereinfachen lassen wie folgt. Es sei $p = 2$, so hat man:

$$lx^{\frac{1}{m}} = l\left(\tfrac{1}{m} lx\right) = llx \left(1 + \frac{l\frac{1}{m}}{llx}\right),$$

wovon u den zweiten Factor aufnimmt, u. s. f. für $p = 3, \cdots$.

Zweitens sei

$$x = e^{y^2} \log y$$

aufzulösen. Wir setzen $v = e^{y^2}$, $y = \sqrt{lv}$ und $ly = \frac{1}{2} llv$. Aus $x = \frac{1}{2} v llv$ findet man

$$v = \frac{2ux}{llx}, \quad u \overline{\overline{\infty}} \, 1 .$$

Um zunächst diese Lösung zu verificiren, schliessen wir aus

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2ux}{llx} \, ll \frac{2ux}{llx}$$

erst

$$1 = \frac{u}{llx} l \, [lx + l2u - lllx]$$

und dann

$$1 = \frac{u}{llx} \left[llx + l\left(1 + \frac{l2u - lllx}{lx}\right)\right],$$

woraus in der That $u \overline{\overline{\infty}} \, 1$ folgt.

Weiter finden wir:

$$y = \sqrt{l\frac{2ux}{llx}} = \sqrt{lx - lllx - l2u}.$$

Die Lösung ist offenbar vom Grade e^{y^2}, denn wir haben

$$e^{y^2} = e^{\sqrt{lx - lllx - l2u}^2} \sim e^{\sqrt{lx - lllx}^2},$$

und setzen wir

$$y = \sqrt{lx - lllx} + v,$$

so ist $v \prec 1$. Setzen wir jedoch $y = \sqrt{lx - lllx - l2} + v_1$, so ist, $lx - lllx = \lambda$ gesetzt:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{l2u}{\lambda}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{l2u}{\lambda}} - \sqrt{1 - \frac{l2}{\lambda}}},$$

und man hat $v_1 \prec v$. Dies sind Unterschiede der Approximation, die innerhalb eines Grades vorkommen.

Drittens sei

$$x = e^{ly^{m_1} + lly^{m_2}}, \quad m_1 \succ 1,$$

Setzt man $v = e^{ly^{m_1}}$, $y = e^{(lv)^{\frac{1}{m_1}}}$, so hat man:

$$x = ve^{\left(\frac{1}{m_1} llv\right)^{m_2}}$$

und

$$v = uxe^{-\left(\frac{1}{m_1} llx\right)^{m_2}},$$

woraus

$$y = e^{\left\{lu + lx - \left(\frac{1}{m_1} llx\right)^{m_2}\right\}^{\frac{1}{m_1}}}$$

folgt. Man kann diese Lösung auf die Form bringen:

$$y = u' e^{\left\{lx - \left(\frac{1}{m_1} llx\right)^{m_2}\right\}^{\frac{1}{m_1}}},$$

wo $u' \overline{\infty} 1$, giebt man ihr aber die Form $\eta + v$, wo η bekannt sei, so ist $v \succ 1$, weil der Grad der Lösung noch nicht e^x ist.

Würde man viertens die Gleichung

$$x = ye^{ly^{\frac{5}{3}}}$$

aufzulösen haben, so müsste man von der Lösung des Art. 20. Gebrauch machen, die $y = u'\xi_1$ lautet, wo $\xi = \frac{x}{u(x)}$, $\xi_1 = \frac{x}{u(\xi)}$ ist. D. i. man findet:

$$y = u' xe^{-lx^{\frac{5}{8}}\left\{1 - lx^{-\frac{3}{8}}\right\}^{\frac{5}{3}}}, \quad u' \overline{\infty} 1.$$

Für die Gleichung $x = ye^{y^{\frac{3}{5}}}$ reicht aber die kürzere Lösungsform des Art. 19. aus und giebt:

$$y = uxe^{-ix^{\frac{3}{5}}}, \quad u \overline{\infty} 1 .$$

Würde man nun diese Gleichung durch die Form des Art. 20. auflösen, so erhielte man:

$$y = uxe^{-ix^{\frac{3}{5}}\left\{1-ix^{-\frac{5}{3}}\right\}^{\frac{3}{5}}},$$

aber durch Entwickelung der Klammer im Exponenten reducirt sich diese Form auf die vorige, während die Auflösung von $x = ye^{y^{\frac{5}{3}}}$ sich nicht auf $y = uxe^{-ix^{\frac{5}{3}}}$, $u \overline{\infty} 1$, reduciren lässt.

VI. Auflösung der Gleichungen $\varphi(x+a) - \varphi(x) = C$ und $\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = C$, etc.

27. Einleitende Bemerkungen.

Man kann den Gegenstand der eben abgeschlossenen Betrachtung bezeichnen als ersten Schritt zu einer infinitären Theorie der in x lineären Gleichung:

$$x\Phi(y) + \Phi_1(y) = 0 ,$$

auf die sich manche andere Gleichungen $f(x, y) = 0$ reduciren lassen. Die nächst complicirtere Aufgabe möchte die Behandlung der Gleichung:

$$\varphi(x)\Phi(y) + x\Phi_1(y) + \Phi_2(y) = 0$$

sein, ihre Reduction auf die frühere Form als undurchführbar vorausgesetzt.

Ich verfolge diese Richtung aber nicht weiter, sondern will mich mit der Auflösung einer anderen Art Gleichungen beschäftigen, die in den Anwendungen bisweilen auftreten. Betrachten wir die Taylor'sche Reihe:

$$f(x+a) - f(x) - af'(x) - \cdots \frac{a^n}{n!} f^{(n)}(x) = R_n ,$$

so hat man das Problem: *Wenn $f(x)$ eine mit x ohne Maxima unendlich werdende Function ist, und x wird in vorstehender Gleichung unendlich, für welche infinitäre Werthe von a bleibt R_n endlich?* Von dieser allgemeinen Aufgabe werde ich indessen nur die speciellen Fälle $n = 0$ und $n = 1$ behandeln und dabei die Aufgabe so stellen: *Es wird die infinitäre Auflösung nach a der Gleichheiten:*

$$f(x+a) - f(x) \sim 1 ,$$
$$f(x+a) - f(x) - af'(x) \sim 1$$

gesucht, welches auch das Unendlich von $f(x)$ sei. Auch werde ich,

eben gewisser Anwendungen wegen, die zweite Gleichheit für das *Nullwerden* von x untersuchen.

28. Auflösung der Gleichung $\varphi(x+a) - \varphi(x) = C$.

Es sei nach a infinitär aufzulösen die Gleichung:

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) = C, \quad C \overline{\overline{\infty}}\, c. \tag{32}$$

Wir können hier mit Hülfe des Art. 9. sogleich eine Lösung finden. Hiernach ist:

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} \overline{\overline{\infty}}\, e^{a\frac{f'(x)}{f(x)}},$$

wo $a \sim t$, t der Typus von $f(x)$ und $f(x)$ ausserhalb des Intervalles $x^M \ldots x^{-M}$ liegt. Setzen wir $lf(x) = \varphi(x)$, so folgt hieraus:

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) \overline{\infty}\, a\varphi'(x),$$

falls $\varphi(x) \succ lx$. Da nun $a\varphi'(x) \overline{\overline{\infty}}\, c$, mithin $a = \frac{cu}{\varphi'(x)}$, $u \overline{\overline{\infty}}\, 1$, sein soll, so hat man den Satz:

Falls $\varphi(x) \succ lx$, *genügt*

$$a = \frac{cu}{\varphi'(x)}, \quad u \overline{\overline{\infty}}\, 1, \tag{33}$$

der Gleichung

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) = C, \quad C \overline{\overline{\infty}}\, c.$$

Es sei zweitens $\varphi(x) \sim lx$, oder:

$$\varphi(x) = lx\varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad \varphi_1 \sim 1, \quad \varphi_2 \prec lx.$$

Zunächst hat man:

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) = l\left(1+\frac{a}{x}\right)\varphi_1(x+a) + lx\{\varphi_1(x+a) - \varphi_1(x)\} + \varphi_2(x+a) - \varphi_2(x).$$

Wir setzen hierin $a = \alpha x$ und

$$\varphi_1(x+a) - \varphi_1(x) = \alpha x \varphi_1'[x(1+\alpha\Theta)], \quad 0 < \Theta < 1.$$

Falls $\varphi_1(x) \sim 1$, ist $\varphi_1' \prec \frac{1}{xlx}$ (wie durch Integration leicht zu verificiren), woraus für $\alpha \sim 1$ folgt:

$$lx\{\varphi_1(x+a) - \varphi_1(x)\} \overline{\overline{\infty}}\, 0.$$

Desgleichen finden wir, wegen:

$$\varphi_2(x+a) - \varphi_2(x) = \alpha x \varphi_2'[x(1+\alpha\Theta_1)], \quad 0 < \Theta_1 < 1,$$

und, weil aus $\varphi_2(x) \prec lx$ $\varphi_2'(x) \prec \frac{1}{x}$ folgt, auch:

$$\varphi_2(x+a) - \varphi_2(x) \overline{\overline{\infty}}\, 0.$$

Also geht (32) über in:

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) \overline{\overline{\infty}}\, l(1+\alpha)\varphi_1(\infty) \overline{\overline{\infty}}\, c,$$

woraus der Satz folgt:

Für $\varphi(x) \sim lx$ genügt:

$$(34) \qquad a = u\left(e^{\frac{c}{\varphi_1}} - 1\right)x, \quad u \overline{\overline{\infty}}\, 1, \quad \varphi_1 \overline{\infty}\, \frac{\varphi(x)}{lx}, \quad C \overline{\infty}\, c,$$

der Gleichung:

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) = C.$$

Auf die vorstehenden zwei Sätze lässt sich die Auflösung der Gleichung $\varphi(x+a) - \varphi(x) = C$ stets zurückführen, wenn das Unendlich von $\varphi(x)$ nicht kleiner als das wiederholter Logarithmen wird. Es sei $lx \succ \varphi(x) \succ llx$. Wir setzen:

$$x + a = xv, \quad \varphi(x) = \psi(lx),$$
$$lx = \varkappa, \qquad lv = \gamma$$

und erhalten statt der aufzulösenden Gleichung diese:

$$\psi(\varkappa + \gamma) - \psi(\varkappa) = C,$$

welche nach (30) und (31) für $\psi(\varkappa) \succ l\varkappa$ die Lösung:

$$\gamma = \frac{cu}{\psi'(\varkappa)}$$

und für $\psi(\varkappa) \sim l(\varkappa)$ diese:

$$\gamma = u\left(e^{\frac{c}{\psi_1}} - 1\right)\varkappa$$

hat, wo $\psi_1 \overline{\infty}\, \frac{\psi(\varkappa)}{l\varkappa}$ ist. Setzt man für die neu eingeführten Buchstaben die alten zurück, so findet man $a = x(v-1)$, $v = e^{\gamma}$, also:

Für $lx \succ \varphi(x) \succ llx$ hat $\varphi(x+a) - \varphi(x) = C$ die Lösung:

$$a = xe^{\frac{cu}{x\varphi'(x)}}, \quad u \overline{\overline{\infty}}\, 1,$$

und für $\varphi(x) \sim llx$ diese:

$$a = x\left\{e^{u\left(e^{\frac{c}{\varphi_1}}-1\right)lx} - 1\right\}, \quad \varphi_1 \overline{\overline{\infty}}\, \frac{\varphi(x)}{llx}.$$

Ich werde noch kurz angeben, wie für das folgende Intervall $llx \succ \varphi(x) \gtrsim lllx$ die Lösungen gefunden werden. Man nimmt die vorher gefundene Gleichung

$$\psi(\varkappa + \gamma) - \psi(\varkappa) = C$$

wieder auf, setzt:

$$\varkappa + \gamma = \varkappa v_1, \quad \psi(\varkappa) = \psi_1(l\varkappa),$$
$$l\varkappa = \varkappa_1, \quad lv_1 = \gamma,$$

wodurch man erhält:

$$\psi_1(\varkappa_1 + \gamma_1) - \psi_1(\varkappa_1) = C$$

mit den Lösungen:

$$\gamma_1 = \frac{cu}{\psi_1'(\varkappa_1)} \text{ und } \gamma_1 = u\left(e^{\frac{c}{\psi_1}} - 1\right)\varkappa_1, \quad \psi_1' \overline{\overline{\infty}}\, \frac{\psi_1(\varkappa_1)}{l(\varkappa_1)}.$$

Hieraus folgen für $llx \succ \varphi(x) \precsim lllx$ die Lösungen:

$$a = x\left\{c^{lx\left(e^{\frac{cu}{x\varphi'(x)}}-1\right)_{-1}}\right\}, \quad a = x\left\{e^{lx\left(e^{u\left(\frac{c}{e^{\varphi_1}}-1\right)_{llx}-1}\right)_{-1}}\right\},$$

u. s. f.

Im Allgemeinen sieht man, dass $\varphi(x+a) - \varphi(x) = C$ nach a eine Schaar von Lösungen hat, welche das Gebiet $\precsim l_r x$ *) beherrschen, wo r beliebig gross. Von diesen Lösungen sind die zum Gebiete $\succsim lx$ gehörigen vom Grade x. Die zum Gebiete $lx \succ \varphi(x) \precsim llx$ gehörigen Lösungen erfreuen sich nur der Approximation lx, im weiteren Gebiete $llx \succ \varphi(x) \precsim lllx$ findet nur die Approximation llx statt, u. s. f.

29. Auflösung der Gleichung $\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = C$**).

Zum Zweiten wollen wir also die Aufgabe lösen, aus der Gleichung

$$\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = C \tag{35}$$

den infinitären Werth von δ zu bestimmen, falls α Null werdend gedacht ist, für $\alpha = 0$ $\psi(\alpha) \succ 1$, und $\psi(\alpha)$ und C positiv sind.

Wir nehmen zuerst an:

$$\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}.$$

Es lässt sich (35) dann schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\psi''(\alpha+\delta_1) = C, \quad 0 < \delta_1 < \delta. \tag{36}$$

Aus $\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}$ folgt $\psi''(\alpha) \succ \frac{1}{\alpha^2}$. Nehmen wir nun $\delta \precsim \alpha$ an, so wäre wegen $\alpha + \delta_1 \precsim \delta$ die Gleichheit $\delta^2\psi''(\alpha+\delta_1) \sim 1$ unmöglich. Also folgt:

$$\delta \prec \alpha.$$

Nun bringen wir (35) auf die Form:

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\psi''(\alpha) + \tfrac{1}{6}\delta^3\psi'''(\alpha+\delta_2) = C, \quad 0 < \delta_2 < \delta, \tag{37}$$

und wollen die Hypothese

$$\delta \sim \frac{1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}$$

prüfen. Aus ihr folgt:

$$\delta^3\psi'''(\alpha+\delta_2) \sim \frac{\psi'''(\alpha+\delta_2)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

---

*) $l_0 x = x$, $l_1 x = \log x$, $l_2 x = \log\log x$ u. s. f.

**) Wir werden im Folgenden, um nicht unnöthig neue Bezeichnungen einzuführen, auch die Gleichung $\lim A = \lim B$ für $\alpha = 0$ kurz $A \overline{\overline{\infty}} B$ schreiben. Wobei man übrigens an den Limes $\alpha^{-1} = \infty$ statt an den Limes $\alpha = 0$ denken kann.

von welcher Grösse wir leicht zeigen können, dass sie mit α verschwindet. Wir setzen:

$$\frac{\psi'''(\alpha+\delta_2)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\psi'''(\alpha+\delta_2)}{\psi''(\alpha+\delta_2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{\psi''(\alpha+\delta_2)^{\frac{1}{2}}}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right)^3 .$$

Wir beweisen zuerst vom ersten Factor rechts, dass er mit α verschwindet. Setzen wir, da aus $\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}$ durch zweimalige Differentiation folgt $\psi''(\alpha) \succ \frac{1}{\alpha^2}$:

$$\psi''(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2}, \quad \mu(\alpha) \succ 1,$$

$$\psi'''(\alpha) = \frac{\alpha\mu'(\alpha) - 2\mu(\alpha)}{\alpha^3},$$

so findet man:

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \alpha \frac{\mu'(\alpha)}{\mu(\alpha)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\mu(\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Könnte nun $\alpha \frac{\mu'(\alpha)}{\mu(\alpha)^{\frac{3}{2}}} \gtrsim 1$ sein, so folgte durch Integration:

$$\frac{1}{\mu(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \gtrsim l\frac{1}{\alpha},$$

was gegen die Voraussetzung $\mu(\alpha) \succ 1$ verstösst. Also ist $\alpha \frac{\mu'(\alpha)}{\mu(\alpha)^{\frac{3}{2}}} \prec 1$, ebenso $\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}}$, und auch schliesslich, wie zu beweisen war:

$$\frac{\psi'''(\alpha+\delta_2)}{\psi''(\alpha+\delta_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Was den zweiten Factor anlangt, so schreiben wir seine dritte Wurzel:

$$\frac{\psi''(\alpha+\delta_2)^{\frac{1}{2}}}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu\left(\alpha + \frac{\nu\alpha}{\mu(\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\mu(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \frac{\nu\alpha}{\mu(\alpha)^{\frac{1}{2}}}}, \quad \nu \gtrsim 1,$$

weil nämlich $\delta_2 < \delta$ und $\delta \sim \frac{1}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}$ ist. Nach Satz (XI_b) des Art. 9. nähert sich der erste Factor rechts der Eins und der zweite thut es offenbar auch.

Da nun, $\delta = \frac{U}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}}$ gesetzt, aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\delta^2\psi''(\alpha) + \tfrac{1}{6}\delta^3\psi'''(\alpha+\delta_2) = C$$

für $\alpha = 0$ folgt: $\frac{1}{2}U^2 = C$, *so wird für* $\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}$ *die vorgelegte Gleichung*

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)-\delta\psi'(\alpha)=C$$

befriedigt durch

$$\delta = u\sqrt{\frac{2C}{\psi''(\alpha)}},\quad u \overline{\infty} 1\,.$$

31. Fortsetzung. $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$.

Weiter sei $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$, woraus folgt:

$$\psi'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha\,\lambda(\alpha)},\quad \lambda(\alpha) \gtrsim 1\,.$$

Alsdann kann zunächst nachgewiesen werden, dass die Ungleichheit

$$\delta \prec \frac{1}{\psi'(\alpha)}$$

unmöglich ist. Denn man würde haben $\delta\psi'(\alpha) \prec 1$. Aber es würde auch sein:

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha) \prec 1\,,$$

weil wegen $\psi'(\alpha+\delta_1) \leq \psi'(\alpha)$, $0 < \delta_1 < \delta$, auch $\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha) = \delta\psi'(\alpha+\delta_1) \prec 1$ sein würde.

Es ist also nothwendigerweise:

$$\delta \gtrsim \frac{1}{\psi'(\alpha)}.$$

Wir können daher setzen:

$$\delta = -\frac{v}{\psi'(\alpha)},\quad v \gtrsim 1\,,$$

und haben

(40) $$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)+v=C$$

zu untersuchen.

Wir formen diese Gleichung um, indem wir für $\alpha+\delta$ einführen $\alpha\varrho = \alpha\left(1+\frac{\delta}{\alpha}\right)$, und ferner setzen:

$$\psi(x) = \chi\left(l\frac{1}{x}\right),$$

wodurch

$$\psi(\alpha\varrho) = \chi\left(l\frac{1}{\alpha}+l\frac{1}{\varrho}\right)$$

wird, und es ist $l\varrho = l\left(1+\frac{\delta}{\alpha}\right) \prec l\frac{1}{\alpha}$, wegen $\frac{\delta}{\alpha} \prec \frac{1}{\alpha}$ oder $\delta \prec 1$, natürlich $\frac{\delta}{\alpha} \succ 1$ vorausgesetzt, da sonst gewiss $l\varrho \prec l\frac{1}{\alpha}$ ist. Nun ist

$$\chi(y+a)-\chi(y) \sim a\chi'(y),$$

falls $a \prec y$ und

$$y^M \gtrsim \chi(y) \gtrsim y^{-M}$$

nach XV. (Art. 12.). Setzen wir $y = l\frac{1}{x}$, so kommt die Bedingung für ψ heraus:

$$\left(l\tfrac{1}{x}\right)^M \gtrsim \psi(x) \gtrsim \left(l\tfrac{1}{x}\right)^{-M},$$

die erfüllt ist. Also dürfen wir, $y = l\frac{1}{\alpha}$, $a = l\frac{1}{\varrho}$ gesetzt, schreiben:

$$\chi\left(l\tfrac{1}{\alpha} + l\tfrac{1}{\varrho}\right) - \chi\left(l\tfrac{1}{\alpha}\right) = -\,l\tfrac{1}{\varrho}\cdot\alpha\psi'(\alpha)\cdot\gamma(\alpha),\ \text{wo}\ \gamma(\alpha)\sim 1.$$

Hierdurch wird die Gleichung (40):

$$\gamma(\alpha)\cdot l\left(1+\tfrac{\delta}{\alpha}\right)\cdot\alpha\psi'(\alpha) + v = C,$$

oder

$$\gamma(\alpha)\left\{l\tfrac{\delta}{\alpha} + l\left(1+\tfrac{\alpha}{\delta}\right)\right\}\alpha\psi'(\alpha) + v = C.$$

Für $\psi'(\alpha)$ können wir wegen $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$ setzen:

$$\psi'(\alpha) = -\,\frac{1}{\alpha\lambda(\alpha)},\quad \lambda(\alpha) \gtrsim 1,$$

so dass:

$$\delta = -\,\frac{v}{\psi'(\alpha)} = v\alpha\lambda(\alpha)$$

wird. Somit erhalten wir:

$$\gamma(\alpha)\left\{\frac{l(v\lambda(\alpha))}{\lambda(\alpha)} + \frac{l\left(1+\frac{1}{v\lambda(\alpha)}\right)}{\lambda(\alpha)}\right\} + v = C,$$

oder endlich:

$$\gamma(\alpha)\left\{\frac{lv}{\lambda(\alpha)} + \frac{l\lambda(\alpha)}{\lambda(\alpha)} + \frac{l\left(1+\frac{1}{v\lambda(\alpha)}\right)}{\lambda(\alpha)}\right\} + v = C, \tag{41}$$

welches die Form ist, auf welche wir unsere Schlüsse gründen wollen.

Falls $v \sim 1$ ist, verschwindet die Klammer für $\alpha = 0$, wenn $\lambda(\alpha) \succ 1$. Ist $v \succ 1$, so wird die Klammer, wenn sie unendlich wird, $\prec v$ unendlich, so dass die ganze linke Seite unendlich wird. Also darf v nicht unendlich werden, und die Auflösung der Gleichung ist $v = uC$, $u \overline{\overline{\infty}}\, 1$. Es war aber $\delta\psi'(\alpha) = -v$. Also haben wir im Ganzen die Auflösung unserer Gleichung für $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$ gefunden.

32. Fortsetzung. $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$.

Bleibt noch der Fall $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ oder $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}\cdot\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha)$, wo $\varphi_1(\alpha) \sim 1$, $\varphi_2(\alpha) \prec l\frac{1}{\alpha}$. Unsere Gleichung wird:

$$\varphi_1(\alpha+\delta)\cdot l\frac{1}{1+\frac{\delta}{\alpha}} - l\tfrac{1}{\alpha}\left\{\varphi_1(\alpha+\delta) - \varphi_1(\alpha)\right\} + \varphi_2(\alpha+\delta) - \varphi_2(\alpha)$$
$$- \delta\left\{l\tfrac{1}{\alpha}\varphi_1'(\alpha) + \varphi_2'(\alpha) - \tfrac{1}{\alpha}\varphi_1(\alpha)\right\} = C.$$

Man setze $\delta = p\alpha$. Alsdann wird die Gleichung für $\alpha = 0$:

$$\varphi_1 \left\{ l\frac{1}{1+p_1} + p_1 \right\} = C, \quad p \overline{\overline{\infty}}\, p_1, \tag{42}$$

wo $\varphi_1 \overline{\overline{\infty}} \frac{\psi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}}$. Denn aus $\varphi_1 \prec l_2 \frac{1}{\alpha}$ (man hat ja $\varphi_1 \sim 1$) folgt: $\varphi_1' \prec \frac{1}{\alpha l\frac{1}{\alpha}} = \frac{v}{\alpha l\frac{1}{\alpha}}$, $v \prec 1$; ferner aus $\varphi_2 \prec l\frac{1}{\alpha}$ folgt $\varphi_2' = \frac{v_1}{\alpha}$, $v_1 \prec 1$, und dies reicht aus, da $\varphi_{1,2}(\alpha+\delta) - \varphi_{1,2}(\alpha) = \delta\,\varphi_{1,2}'(\alpha+\delta_1)$, $0 < \delta_1 < \delta$. Falls $\frac{C}{\varphi_1}$ positiv ist, kann p_1 der obigen Gleichung genügend und reell bestimmt werden, da, während p_1 von $-1+\nu$ (ν äusserst klein) bis $+\infty$ geht, $l\frac{1}{1+p_1} + p_1$ von $+\infty$ bis 0 und wieder zurück bis $+\infty$ geht.

33. Fortsetzung, δ negativ angenommen.

Eine besondere Behandlung erheischt der Fall, wo $-\delta$ statt δ (δ positiv gedacht) in der Gleichung steht. Wir wollen auch noch C positiv annehmen und haben also die Gleichung aufzulösen:

$$\psi(\alpha - \delta) - \psi(\alpha) + \delta\,\psi'(\alpha) = C.$$

Da $\delta\psi'(\alpha)$ negativ ist, so wird man für $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$ jedenfalls eine andere Lösung finden. Setzen wir $\delta = \alpha - \varepsilon$, so folgt:

$$\psi(\varepsilon) - \psi(\alpha) + (\alpha - \varepsilon)\psi'(\alpha) = C,$$

und unter der Annahme $\varepsilon \prec \alpha$ ist der Limes des letzten Gliedes links für $\psi'(\alpha) \prec \frac{1}{\alpha}$ Null, so dass ε aus

$$\psi(\varepsilon) - \psi(\alpha) \overline{\overline{\infty}}\, C$$

zu bestimmen wäre, was immer möglich ist. Im Falle $\psi(\alpha) = l\frac{1}{\alpha}$, hat man:

$$l\frac{1}{\alpha-\delta} - l\frac{1}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha} = C,$$

d. i. für $\delta = p\alpha$:

$$l\frac{1}{1-p} - p = C.$$

Die linke Seite stellt wieder zwischen den Grenzen $p = 0$ und $p = 1$ jede positive Zahl dar. Es ist also für $\psi(\alpha) \gtrsim l\frac{1}{\alpha}$ die Form der Lösung $\delta = u\alpha$, $u \sim 1$. Für $\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}$ gilt hier auch die frühere Form der Lösung $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\psi''(\alpha)}}$.

34. Auflösung zweier verwandter Gleichungen.

In diesem Artikel werde ich zum Schluss noch zwei Gleichungen ähnlicher Zusammensetzung, die auch in den Anwendungen auftreten, so weit dies dort erforderlich, infinitär auflösen. Es handelt sich zuerst um

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)+\delta\psi'(\alpha)v=C,\quad v\prec 1,\quad \psi(\alpha)\succ l\tfrac{1}{\alpha}.$$

Durch Entwickelung des ersten Gliedes folgt:

$$\delta\psi'(\alpha)(1+v)+\tfrac{\delta^2}{1\cdot 2}\psi''(\alpha+\delta_1)=C,\quad 0\leqq\delta_1\leqq\delta.$$

Wir nehmen an

$$\delta=\frac{U}{\psi'(\alpha)},$$

woraus folgt:

$$U(1+v)+\frac{U^2}{1\cdot 2}\frac{\psi''(\alpha+\delta_1)}{\psi'(\alpha)^2}=C.$$

Es ist

$$\frac{\psi''(\alpha+\delta)}{\psi'(\alpha)^2}=\frac{\psi''(\alpha+\delta)}{\psi'^2(\alpha+\delta)}\cdot\left(\frac{\psi'(\alpha+\delta)}{\psi'(\alpha)}\right)^2.$$

Man hat zunächst, $\psi'(\alpha)=\frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$, wo $\mu(\alpha)\succ 1$, gesetzt:

$$\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'^2(\alpha)}=\alpha\frac{\mu'(\alpha)}{\mu(\alpha)^2}-\frac{1}{\mu(\alpha)}.$$

Wäre nun $\alpha\frac{\mu'(\alpha)}{\mu(\alpha)^2}\gtrsim 1$, so folgte durch Integration $\frac{1}{\mu(\alpha)}\gtrsim l\frac{1}{\alpha}$, oder $\mu(\alpha)\prec 1$ gegen die Voraussetzung. Also ist $\frac{\psi''(\alpha)}{\psi'(\alpha)^2}\prec 1$. Es wird ferner

$$\frac{\psi'(\alpha+\delta)}{\psi'(\alpha)}=\frac{\mu(\alpha+\delta)}{\mu(\alpha)}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\delta},$$

wenn $\delta\gtrsim\frac{\alpha}{\mu(\alpha)}$ ist, den Limes 1 haben nach Satz (XI_b), Art. 9. Also wird die aufzulösende Gleichung für $\alpha=0$: $U=C$ *und für* $\psi(\alpha)\succ l\frac{1}{\alpha}$ *ist*

$$\delta=\frac{Cu}{\psi'(\alpha)},\quad u\overline{\infty}\,1$$

die infinitäre Lösung von

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)+\delta\psi'(\alpha)\cdot v=C,\quad v\prec 1.$$

Die zweite Gleichung lautet:

$$\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)+\frac{A\delta}{\alpha}=C,\quad \psi(\alpha)\prec l\frac{1}{\alpha},$$

und A und C constant, oder ~ 1. Wir schreiben die Gleichung wieder:

$$\delta\left\{\psi'(\alpha+\delta_1)+\frac{A}{\alpha}\right\}=C,\quad 0\leqq\delta_1\leqq\delta,$$

oder, $\psi'(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha}$ gesetzt, wo $\mu(\alpha) \prec 1$,

$$\delta \left\{ \frac{\mu(\alpha+\delta_1)}{\alpha} + \frac{A}{\alpha} \right\} = C.$$

Hieraus folgt, dass *für* $\psi(\alpha) \prec l\frac{1}{\alpha}$

$$\delta = \frac{\alpha C u}{A}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1$$

die infinitäre Lösung von

$$\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) + \frac{A\delta}{\alpha} = C$$

ist, während man wie im Art. 33., *im Falle* $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$, $\delta = p\alpha$ *hat, wo* p *seine Bestimmung durch die Gleichung:*

$$\psi_1(0) l\frac{1}{1+p} + Ap = C, \quad \psi_1(0) \overline{\overline{\infty}} \frac{\psi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}}$$

findet.

35. Zusammenfassung der Resultate der Art. 28—34.

1. Die infinitäre Auflösung nach a der Gleichung

$$\varphi(x+a) - \varphi(x) = C$$

für $x \succ 1$ ist möglich (nach unseren Methoden), wenn $\varphi(x) \succ l_r(x)$, r beliebig gross, jedoch mit verschiedenen Graden der Approximation.

Man findet für $\varphi(x) \succ lx$

$$a = \frac{Cu}{\varphi'(x)}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1,$$

für $\varphi(x) \sim lx$*:*

$$a = u\left(e^{\frac{C}{\varphi_1}} - 1\right)x, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1, \quad \varphi_1 \overline{\overline{\infty}} \frac{\varphi(x)}{lx}.$$

Dann für $lx \succ \varphi(x) \succ llx$*:*

$$a = xe^{\frac{Cu}{x\varphi'(x)}}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1,$$

eine Approximation vom Grade lx*, und für* $\varphi(x) \sim llx$ *findet man diese Lösung:*

$$a = x\left\{e^{u\left(\frac{C}{e^{\varphi_1}-1}\right)_{lx}} - 1\right\}, \quad \varphi_1 \overline{\overline{\infty}} \frac{\varphi(x)}{llx},$$

u. s. f. Die Auflösung für das Intervall $llx \succ \varphi(x) \succsim lllx$ findet sich Art. 28. auch noch angegeben.

2. Die Auflösung nach δ der Gleichung:

$$\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) - \delta\psi'(\alpha) = C,$$

für $\alpha = 0$ und die Grössen ψ und C positiv angenommen, zerfällt in *drei* Formen:

Für $\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}$ *hat man:*

$$\delta = u\sqrt{\frac{2C}{\psi''(\alpha)}}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 .$$

Für $\psi(\alpha) \prec l\frac{1}{\alpha}$ *hat man erstens die positive Lösung:*

$$\delta = -\frac{uc}{\psi'(\alpha)}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 ,$$

und zweitens die negative:

$$\delta = -u_1\alpha , \quad u \sim 1 .$$

Für $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ *gehen die Lösungen in einander über, hier ist:*

$$\delta = up\alpha , \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 .$$

wo p *eine der beiden reellen Lösungen der Gleichung*

$$l\frac{1}{1+p} + p = \frac{C}{\varphi_1}, \quad \varphi_1 \overline{\overline{\infty}} \frac{\psi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}}$$

vorstellt.

Diese Auflösungen zeichnen sich vor der unter 1. dieses Artikels und denen der Art. 22. und 25. dadurch aus, dass sie das ganze Unendlichkeitsgebiet der Function $\psi(\alpha)$ umfassen und durchweg vom Grade x sind.

3. *Die Gleichung*

$$\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) + \delta\psi'(\alpha)v = C, \quad v \prec 1 ,$$

hat für $\psi(\alpha) \succ l\frac{1}{\alpha}$ *die Lösung:*

$$\delta = \frac{Cu}{\psi'(\alpha)}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 .$$

4. *Die Gleichung:*

$$\psi(\alpha+\delta) - \psi(\alpha) + \frac{A\delta}{\alpha} = C$$

hat für $\psi(\alpha) \prec l\frac{1}{\alpha}$ *die Lösung:*

$$\delta = \alpha\frac{Cu}{A}, \quad u \overline{\overline{\infty}} 1 ,$$

und für $\psi(\alpha) \sim l\frac{1}{\alpha}$ *diese:*

$$\delta = p\alpha ,$$

wo p *durch*

$$\psi_1(0)l\frac{1}{1+p} + Ap = C, \quad \psi_1(0) \overline{\overline{\infty}} \frac{\psi(\alpha)}{l\frac{1}{\alpha}}$$

gegeben ist.

Tübingen, im Mai 1874.

Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven.

Von O. Stolz in Innsbruck.

Die Discussion der Singularitäten der ebenen algebraischen Curven fällt zusammen mit dem Probleme der analytischen Darstellung einer algebraischen Function einer Veränderlichen in der Umgebung eines singulären Punktes, welches zuerst von Puiseux gelöst, neuerdings durch Hrn. Hamburger eine einfache und dabei strenge Behandlung gefunden hat (Schlömilch Z. XVI. p. 461 ff.). Für die geometrische Aufgabe eine Uebersicht der möglichen Singularitäten herzustellen, wird man sich jedoch einfacher des von Plücker im 2. Abschnitte seiner „Theorie der algebraischen Curven" gegebenen Verfahrens bedienen, das allerdings nicht wesentlich von dem eben erwähnten verschieden ist. Plücker's Darstellung soll im vorliegenden Aufsatze durch eine allgemeine und consequente Benützung der von ihm gebrauchten Differentialgleichungen der gegebenen Curvengleichung vervollständigt und abgeschlossen werden. Dabei ergiebt sich auch ein anscheinend einfacher und strenger Nachweis des Lagrange'schen Satzes über die Entwickelung einer algebraischen Function, der in einigen Punkten mit dem des Hrn. Hamburger zusammentrifft.

Zunächst scheint eine Bemerkung aus den Elementen der Differentialrechnung nothwendig. Seit die Unhaltbarkeit des Satzes, dass jede stetige Function eine Ableitung haben müsse, erkannt ist, kommt es wesentlich darauf an, die *Existenz* des Differentialquotienten zu erweisen. Wenn z. B. in einem singulären Punkte die oben erwähnten Differentialgleichungen endliche Werthe des 1., 2. etc. Differentialquotienten liefern, so folgt daraus noch nicht, dass diese wirklich die Ableitungen der algebraischen Function in dem singulären Punkte seien, sondern nur, dass *diese Ableitungen, wenn sie wirklich existiren, keine anderen Werthe haben können.* Der Existenzbeweis ist allerdings leicht zu führen (vgl. Nr. 5.).

Im Folgenden kommen nur endliche singuläre Werthsysteme vor. Es bezeichnen x, y ein beliebiges lineares System von Punktcoordi-

naten, in dem aber nur endliche Werthe betrachtet werden. Es soll also der singuläre Punkt der Curve nicht auf der Unendlichkeitsgeraden des Systems liegen. Tritt dieser Fall aber ein, so geht man zu einem anderen linearen Coordinatensysteme über, was bei Ausschluss des *Punktes* $x = a$ $y = \infty$ am einfachsten durch die Transformation

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

geleistet wird.

---

1. In der Differentialrechnung wird der Satz gezeigt: „Ist $x^0 y^0$ ein *endliches* Werthsystem, welches die algebraische Gleichung n^{ten} Grades in x, y:

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

erfüllt, dabei aber die Function $\frac{\partial F}{\partial y}$ nicht Null macht, so existirt eine Ableitung der Function y für $x = x^0$ $y = y^0$." Man hat

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x^0} : \frac{\partial F}{\partial y^0},$$

woraus unmittelbar die Existenz der höheren Ableitungen von y nach x folgt. Nunmehr können dieselben auch gefunden werden, indem man die auf einander folgenden Ableitungen nach x von $F(x, y)$, y als Function von x betrachtet, gleich Null setzt. Um die allgemeine Form dieser Gleichungen, welche im Folgenden kurz als Differentialgleichungen von $F = 0$ bezeichnet werden, zu erhalten, benützt man den Satz, dass eine Function y, welche in einer bestimmten Umgebung des Punktes $x = x_0$ eindeutig definirt ist und p auf einander folgende Ableitungen besitzt, für diesen Bereich die Entwickelung

$$y = y^0 + y_1{}^0 (x - x^0) + \cdots + \frac{y_p{}^0 + z}{p!} (x - x_0)^p$$

zulasse, wo z für $x = x_0$ verschwindet. Hier bezeichnen $y_1{}^0 \cdots y_p{}^0$ die Werthe dieser Ableitungen für $x = x^0$. Setzt man den vorstehenden Ausdruck in die Entwickelung der ganzen Function $F(x, y)$ nach Potenzen von $x - x^0$ und $y - y^0$ und ordnet nach Potenzen von $x - x^0$, so müssen die Coefficienten der p ersten Glieder, weil sie z nicht enthalten, verschwinden. Man hat für

$$x - x^0 = \xi, \quad y - y^0 = \eta,$$

$$F(x^0 + \xi, y^0 + \eta) \equiv \sum_{r=0}^{r=n} F_r(\xi, \eta, x^0 y^0) = 0,$$

wobei man sich die Glieder derselben Dimension in $\xi\, \eta$ zu F_r zusammengefasst denkt. Ist nun zunächst

$$\eta = y_1^0 \xi + z',$$

so folgt

$$F_r(\xi, \eta, x^0, y^0) = \sum_0^r{}_k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k F_r(\xi, \xi y_1^0)}{\partial \eta^k} z'^k .$$

Setzt man hier

$$F_r(\xi, \xi y_1^0) = \xi^r \Phi_r ,$$

so dass

$$\Phi_r = \frac{1}{r!} \sum_1^r{}_k \binom{r}{k} \frac{\partial^r F(x^0, y^0)}{\partial x^{r-k} \partial y^k} y_1^{0k} \tag{2}$$

und

$$\frac{\partial^k F_r(\xi, \xi y_1^0)}{\partial \eta^k} = \xi^{r-k} \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^{0k}},$$

und führt den Werth von z'

$$z' = \frac{y_2^0}{2} \xi^2 + \cdots\cdots + \frac{y_p^0 + z}{p!} \xi^p$$

ein, so wird der Coefficient von ξ^m $(m < p)$ sein:

$$\sum_0^r{}_k \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^{0k}} \sum \frac{1}{\varrho_1! \varrho_2! \cdots} \left(\frac{y_{\lambda_1}^0}{\lambda_1!}\right)^{\varrho_1} \left(\frac{y_{\lambda_2}^0}{\lambda_2!}\right)^{\varrho_2} \cdots\cdots \tag{3}$$

Die zweite Summe enthält alle Glieder, welche der Bedingung genügen, dass, während die Indices λ als von einander verschieden und nicht unter 2 betragend vorausgesetzt werden, zugleich sei

$$\sum \varrho = k , \qquad \sum \varrho \lambda = m + k - r . \tag{4}$$

Geht r in (3) von 1 bis m, so erhält man den vollständigen Coefficienten von ξ^m in $F(x^0 + \xi, y^0 + \eta)$, welcher, wie oben bemerkt, verschwinden muss. Dadurch ergiebt sich *die m^{te} Differentialgleichung von* (1), welche mit Unterdrückung des Index 0 so geschrieben werden kann:

$$\sum_{\lambda\,\varrho} \frac{1}{\varrho_1! \varrho_2! \cdots} \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^k} \left(\frac{y_{\lambda_1}}{\lambda_1!}\right)^{\varrho_1} \left(\frac{y_{\lambda_2}}{\lambda_2!}\right)^{\varrho_2} \cdots = 0 , \tag{5}$$

wobei die Indices λ, von einander verschieden und mindestens gleich 2, und die Exponenten ϱ alle aus den Gleichungen (4) folgenden Werthe annehmen, wenn r die Zahlen $1, 2 \cdots m$ durchläuft. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner

$$\sum \varrho (\lambda - 2) = m - (r + k) ,$$

somit $r + k \leq m$, wozu noch zu bemerken, dass $k \leq r$. Für $k = 0$ folgt $r = m$; für $k = 1$, $r = 1$ folgt $\lambda_1 = m$, so dass der kleinste Werth von $k + r$ 2 ist. Man fügt daher zu bequemerer Bestimmung

der in (5) vorkommenden Indices zu den Gleichungen (4) noch die folgenden:

$$2 \leqq r + k \leqq m\,; \quad k \leqq r\,. \tag{6}$$

Die Formel (5), die bisher noch nicht gebraucht worden zu sein scheint, liefert das bequemste Mittel, um die Differentialgleichungen von (1) independent zu entwickeln. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die numerischen Coefficienten der einzelnen Glieder immer dieselben bleiben.

Indem man zuerst die zulässigen Werthe von k, welche von 0 bis $\frac{m}{2}$ ansteigen, ansetzt, hierauf die zugehörigen r nach (6), endlich die aus (5) folgenden λ, ϱ, — findet man die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} m=1, & \Phi_1=0, \\ m=2, & \Phi_2+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\cdot\frac{y_2}{2}=0, \\ m=3, & \Phi_3+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_1}\cdot\frac{y_2}{2}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\cdot\frac{y_3}{6}=0, \\ m=4, & \Phi_4+\frac{\partial\Phi_3}{\partial y_1}\cdot\frac{y_2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial y_1^2}\cdot\left(\frac{y_2}{2}\right)^2+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y_1}\frac{y_3}{6}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\frac{y_4}{24}=0 \end{cases}$$

u. s. w.

Die Functionen Φ_r wurden auch von Plücker gebraucht (Theorie d. algebr. Curven p. 156), wo auch die Differentialgleichungen von (1) in vorstehender Gestalt vorkommen.

2. Es scheint nicht unwesentlich zu bemerken, dass mit Benutzung der Gleichungen (5) die Convergenz der unendlichen Reihe

$$\eta = y_1{}^0\xi + \frac{y_2^0}{2!}\xi^2 + \frac{y_3^0}{3!}\xi^3 + \cdots \tag{7*}$$

für solche Werthe von ξ, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht übersteigt, gezeigt werden könne. Wir setzen

$$F(x^0+\xi,\ y^0+\eta) = G(\xi,\eta) = \sum_{i,k} a_{i,k}\,\xi^i\eta^k = 0\,, \tag{8}$$

wobei wir uns noch weiter die Exponenten i, k, deren kleinster Werth 1 ist, *ins Unendliche wachsend* vorstellen können, so dass die linke Seite von (8) *eine unendliche Reihe bezeichnet, von der angenommen wird, dass sie convergire für alle reellen und complexen Werthe der* ξ, η, *welche der Bedingung genügen:*

$$|\xi| \leqq a\,, \quad |\eta| \leqq b\,^*).$$

*) Nach Weierstrass und Grassmann wird anstatt „Modul" einer complexen Zahl ξ „absoluter Betrag" gesagt und dafür die Bezeichnung $|\xi|$ gebraucht.

Setzen wir nun

$$\eta = \alpha\xi + \beta\eta'$$

und entsprechend

$$G(\xi, \eta) \equiv G'(\xi, \eta'),$$

so convergirt die Reihe G' sicherlich noch, sobald $|\xi| < a$ und $|\alpha\xi + \beta_0\eta'| \leqq b$. Damit aber die Reihe G' nach Potenzen von ξ, η' geordnet werden könne, ist es hinreichend

$$\xi_0 \leqq a, \quad \alpha_0\xi_0 + \beta_0\eta_0' \leqq b$$

zu nehmen, worin die Grössen mit dem Index 0 die absoluten Beträge bedeuten. Man hat also

$$\beta_0\eta_0' \leqq b - \alpha_0\xi_0.$$

Was auch immer der Werth von α_0 sein möge, so kann man sich ξ_0 zugleich $< a$ und $< \frac{b}{\alpha_0}$ denken, so dass zwei positive Zahlen a' b' existiren von der Art, dass für $|\xi| \leqq a'$ $|\beta\eta'| \leqq b'$ die Reihe G' convergirt.

Nun denken wir uns α so bestimmt, dass aus G' das Glied mit ξ entfällt. Da

$$\frac{\partial G'}{\partial \xi} = \frac{\partial G}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\alpha,$$

so findet man nun α aus

$$0 = a_{10} + \alpha a_{01};$$

denn a_{01} *ist nach Voraussetzung nicht* 0.

Setzt *man* $\beta = b'$, $\xi = a'\xi'$, so hat man an Stelle von $G(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung

$$(9) \quad H(\xi', \eta') \equiv \sum_{i,k} b_{i,k}\xi'^i\eta'^k - \eta' = 0, \quad (i, k = 2, 3 \cdots \infty),$$

in der die linke Seite noch convergirt für $\xi' = 1$, $\eta' = 1$.

Hier ist für $\xi' = 0$, $\eta' = 0$

$$\eta_1' = \frac{d\eta'}{d\xi'} = 0;$$

also

$$\frac{\partial^r H(0,0)}{\partial \xi'^{r-k}\partial \eta'^k} = (r-k)!\, k!\, b_{r-k,k},$$

ferner nach (2)

$$(10) \qquad \Phi_r = \frac{1}{r!}\frac{\partial^r H(0,0)}{\partial \xi'^r} = b_{r,0},$$

$$\frac{\partial^k \Phi_r}{\partial \eta_1'^k} = \frac{1}{(r-k)!}\frac{\partial^r H(0,0)}{\partial \xi'^{r-k}\partial \eta'^k} = k!\, b_{r-k,k}.$$

In der Gleichung (5) tritt nun das Glied $\frac{\eta_m'}{m!}$ auf die rechte Seite, woraus man sofort erkennt, dass man eine dem absoluten Betrage

nach grössere Zahl als $\frac{\eta'_m}{m!}$ erhält, wenn man in (9) die b_{ik} durch eine *endliche* positive Grösse B ersetzt, die sie sämmtlich ihrem absoluten Betrage nach übertrifft. Die eben erwähnten positiven Zahlen sind aber die Werthe der Ableitungen einer Function ζ, welche durch die Gleichung

$$0 = \zeta - B \sum_{2}^{\infty}{}_k (\zeta + \xi')^k = \zeta - \frac{B(\zeta+\xi')^2}{1-\zeta-\xi'}$$

definirt wird, wobei man sich aber ξ', ζ so beschränkt denken muss, dass

$$|\xi'| + |\zeta| < 1 .$$

Wird $\zeta + \xi' = z$ gesetzt, so folgt daraus

$$z^2(1+B) - z(1+\xi') + \xi' = 0 ,$$

also

$$2(1+B)z = (1+\xi') - \sqrt{1 - 2\xi'(2B+1) + \xi'^2},$$

die Wurzel mit positivem reellen Theile genommen, damit für $\xi' = 0$ $z = 0$ sei. Diese Wurzelgrösse lässt sich in eine Reihe nach positiven Potenzen von ξ' entwickeln, wenn man sich

$$|2\xi'(2B+1) - \xi'^2| < 1$$

denkt, was stets erfüllt ist durch

$$|\xi'| < \frac{1}{4B+3} .$$

Die Coefficienten dieser Potenzreihe sind aber dem absoluten Betrage nach durchaus grösser als die der Entwickelung

$$\eta' = \frac{\eta_2^{0'}}{2!}\xi'^2 + \frac{\eta_3^{0'}}{3!}\xi'^3 + \cdots ,$$

welche somit mindestens denselben Convergenzkreis besitzt als die erstere. Setzt man hier wieder

$$\xi' = \frac{\xi}{a'}, \quad \beta\eta' = \eta - \alpha\xi = \eta - \eta_1{}^0\xi , \quad \beta\eta'_m = a'^m\eta_m , \quad (m \geqq 2) ,$$

so erhält man genau die Reihe (7*) *).

3. Sollen für den Punkt x^0y^0 nach einander $y_2{}^0 = y_3{}^0 = \cdots = y_m{}^0 = 0$ sein, so müssen nach (5) die Gleichungen

$$\Phi_2 = 0 , \quad \Phi_3 = 0 \cdots \Phi_m = 0$$

bestehen. Die Tangente hat, da y^0_{m+1} von 0 verschieden vorausgesetzt wird, mit der Curve eine Berührung von der m^{ten} Ordnung.

4. Der *nächste* Fall, dass *für den Punkt* x^0y^0 $\frac{\partial F}{\partial y}$ *verschwindet,*

*) Bemerkenswerth an diesem Beweise ist, dass er nichts weiter voraussetzt als den Satz von Cauchy über die Doppelreihen.

während $\frac{\partial F}{\partial x}$ *von Null verschieden ist*, lässt sich, wie auch Hamburger (a. a. O. p. 467) nach Weierstrass bemerkt, mittelst des Theorems in Nr. 2. erledigen. Man findet jetzt offenbar

$$\xi = \frac{x_m^0}{m!}\eta^m + \cdot\frac{x_{m+1}^0}{(m+1)!}\eta^{m+1} + \cdots, \tag{11}$$

wovon x_m den m^{ten} Differentialquotienten von x nach y bezeichnet. Der Allgemeinheit wegen ist angenommen, dass die Gerade $x = 0$ mit der Curve eine Berührung von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung habe.

Die Gleichung (11) bringt man auf die Form

$$\frac{\xi}{\alpha} = \eta^m \{1 + \beta_1\eta + \beta_2\eta^2 + \cdots\},$$

da α nicht Null sein soll. Hier zieht man die m^{te} Wurzel und entwickelt rechts nach dem polynomischen Satze. Dann kehrt man die Reihe um, wodurch man findet

$$\eta = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}} + \gamma_2\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{m}} + \cdots\cdots,$$

d. i. eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen von $\xi^{\frac{1}{m}}$; indem der Punkt x^0y^0 ein m-facher Verzweigungspunkt der Function y ist.

5. Nun möge der Punkt x^0y^0 singulär sein, d. i. *es sollen für diese Werthe* $\frac{\partial F}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *zugleich verschwinden.*

Denken wir uns diese Bedingungsgleichungen, sowie die etwa noch ausserdem bestehenden *formal* in die Gleichungen (5) eingeführt, so erscheinen die ersten derselben identisch erfüllt, während aus den folgenden die Schlussglieder verschwinden. Man zeigt nun leicht den Satz: *„Angenommen, den p ersten Gleichungen des Systems* (5) *genüge ein System von endlichen Werthen* $y_1^0, y_2^0 \cdots y_m^0$ $(p \geq m)$, *von denen der letzte aus der* p^{ten} *Gleichung entnommen werde; so giebt es immer einen Functionszweig, für welchen diese Grössen die m ersten Ableitungen im Punkte* x^0y^0 *sind.“*

Denn setzt man in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi, \quad y = y^0 + y_1^0\cdot\xi + \cdots + \frac{y_m^0 + z}{m!},$$

so folgt aus der transformirten Gleichung stets für $\xi = 0$ u. A. auch $z = 0$. Die letztgenannte Gleichung findet man wie in Nr. 1., indem man nur statt y_m^0 $y_m^0 + z$ oder z' schreibt und alle folgenden Coefficienten y_{m+1}^0 etc. Null setzt. Bezeichnet man die linke Seite von (5) mit K_m und bedenkt, dass die Gleichungen $K_1 = 0 \cdots K_{p-1} = 0$ in Beziehung auf $y_m, y_{m+1} \cdots$ identisch sind, so folgt offenbar

$$\xi^p K_p(z') + \xi^{p+1} K_{p+1}(z') + \cdots = 0 . \tag{12}$$

Hier ist

$$K_p(z') = K_p(y_m^0 + z) = \sum_0^f{}_k \frac{\partial^k K_p}{\partial y_m^{0\,k}} \cdot \frac{z^k}{k!} ,$$

wenn f den Grad von $K_p = 0$ in y_m bezeichnet. Von den Coefficienten der letzten Function verschwindet der erste K_p sicher, vielleicht auch noch einige folgende, aber *gewiss* nicht alle, da y_m^0 eben aus $K_p = 0$ bestimmt wurde. Somit geht (12) über in

$$\left(\frac{\partial^k K_p}{\partial y_m^{0\,k}} \cdot z^k + \cdots\right) + \xi K_{p+1}(z') + \cdots = 0 ,$$

woraus unmittelbar unsere Behauptung folgt.

6. Um zur analytischen Darstellung der Function y in der Umgebung des singulären Punktes x^0, y^0 zu gelangen, ist vor Allem eine nähere Betrachtung des Systems der Gleichungen (5) erforderlich.

Wir nehmen sogleich an, dass dieser Punkt i-fach sei, d. h. dass *alle partiellen Ableitungen der* $F(x, y)$ *bis einschliesslich der* $(i-1)^{ten}$ *Ordnung verschwinden.* Dann verschwinden die $i-1$ ersten Differentialgleichungen identisch, während aus den folgenden alle Glieder hinausfallen, wofür $r < i$. Setzen wir in (4) und (6)

$$m = i + q , \quad r = i + r' ,$$

so folgt

$$\Sigma\varrho = k , \quad \Sigma\varrho\lambda = q - r' + k ,$$
$$1 \leqq r' + k \leqq q , \quad k \leqq i + r' .$$

Die untere Grenze für $r' + k$ wird wieder direct ermittelt. Die Zahl k geht nicht über q hinaus; aber sie erreicht diesen Werth nur, so lange $q \leqq i$. Aus diesen Formeln lässt sich entnehmen, dass der noch zurückbleibende Theil der $(i+q)^{ten}$ Differentialgleichung grosse Aehnlichkeit besitze mit der q^{ten} Differentialgleichung, indem jedenfalls alle Glieder der letzteren darin vorkommen, nur mit um i Einheiten vorgeschobenem Index der Φ. — Der Anfang des reducirten Systems ist demnach:

$$\begin{cases} m = i , & \Phi_i = 0 , \\ m = i+1 , & \Phi_{i+1} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} = 0 , \\ m = i+2 , & \Phi_{i+2} + \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y_1^2} \cdot \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{y_3}{6} = 0 , \\ m = i+3 , & \Phi_{i+3} + \frac{\partial \Phi_{i+2}}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{i+1}}{\partial y_1^2} \left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 \Phi_i}{\partial y_1^3} \cdot \left(\frac{y_2}{2}\right)^3 \\ & \quad + \left(\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1} + \frac{y_2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y_1^2}\right) \frac{y_3}{6} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} \cdot \frac{y_4}{24} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

u. s. w.

Aus den *angeschriebenen Gleichungen* entfallen für $i < 3$ noch einige Glieder.

Nun sei y_1^0 eine *endliche* Wurzel der Gleichung $\Phi_i = 0$. Ist dieselbe einfach, so folgen aus den Gleichungen (13) auch endliche Werthe von y_2^0, y_3^0, $y_4^0 \cdots$. Wenn sie aber wiederholt — wir wollen sofort annehmen i-*mal* — vorkommt, so folgt im Allgemeinen kein endlicher Werth von y_2. Erst wenn auch $\Phi_{i+1} = 0$, so folgt aus der 3. der Gleichungen (13) ein endlicher Werth von y_2, so lange $\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1}$ nicht Null ist. Ist dieses Null, so müsste auch $\Phi_{i+2} = 0$ genommen werden, dann aber giebt die letzte der Gleichungen (13) im Allgemeinen zwei endliche Werthe für y_2.

Indem wir so fortfahren, d. h. ausser den Gleichungen

$$\Phi_i = 0\,, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} = 0 \cdots \frac{\partial^{i-1} \Phi_i}{\partial y_1^{i-1}} = 0$$

noch annehmen, dass

$$\frac{\partial^k \Phi_{i+r'}}{\partial y_1^{\,k}} = 0 \tag{13*}$$

für alle Werthe von r', k, die der Bedingung genügen,

$$1 \leqq k + r' \leqq i - 1\,,$$

so verschwinden die Differentialgleichungen $i+1$, $i+2 \cdots 2i-1$ identisch, während aus der $2i^{\text{ten}}$ nur diejenigen Glieder zurückbleiben, wofür $k + r' = 2i$, d. h. nur Glieder mit y_2, indem nun

$$\sum \varrho\,(\lambda - 2) = q - (r' + k) = 0\,.$$

Die genannte Differentialgleichung reducirt sich also auf

$$\sum_0^i{}_\varrho \frac{1}{\varrho!} \frac{\partial^\varrho \Phi_{2i-\varrho}}{\partial y_1^{\,\varrho}} \left(\frac{y_2}{2}\right)^\varrho = 0\,. \tag{13**}$$

Somit erhält y_2 jetzt i *endliche*, im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe. Die Endlichkeit folgt daraus, dass der Coefficient von $y_2^{\,i} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^{\,i}}$ somit von Null verschieden ist.

Hier werden offenbar wieder ähnliche Specialisirungen beginnen, wenn die Werthe y_2 gruppenweise oder vollständig einander gleich werden. Wir können dieses leicht übersehen, *wenn wir uns die Gleichung* (5) *nach* y_h, y_{h+1}, $\cdots$ y_m *geordnet denken.*

7. Bezeichnet man denjenigen Theil der m^{ten} Differentialgleichung von $F = 0$, welcher die Grössen y_h, y_{h+1}, $\cdots$ y_m nicht enthielt, mit $\Phi_m^{(h-2)}$, so erweist sich der Coefficient des Gliedes

$$\frac{1}{\sigma_1!\,\sigma_2!\cdots}\left(\frac{y_{\mu_1}}{\mu_1!}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{y_{\mu_2}}{\mu_2!}\right)^{\sigma_2}\cdots\cdots\ (h\leq\mu_1<\mu_2\cdots\leq m)$$

in ebenderselben Gleichung, d. i.

$$(14)\qquad \sum_{\lambda,\varrho}\frac{1}{\varrho_1!\,\varrho_2!\cdots}\,\frac{\partial^k\Phi_r}{\partial y_1^{\,k}}\left(\frac{y_{\lambda_1}}{\lambda_1!}\right)^{\varrho_1}\left(\frac{y_{\lambda_2}}{\lambda_2!}\right)^{\varrho_2}\cdots\cdots,$$

$$(15)\qquad \begin{cases}\sum\varrho=k-\sum\sigma\,,\\ \sum\lambda\varrho=m-r+k-\sum\sigma\mu\end{cases}$$

als identisch mit

$$(16)\qquad \{(h-1)!\}^{\iota}\,\frac{\partial^{\iota}\Phi_s^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^{\iota}}\,,$$

wo

$$\sum\sigma=l\,,\quad m+l\,(h-1)-\sum\sigma\mu=s$$

gesetzt sind. In der That bestehen für die Indices und Exponenten der y_{h-1}^{ι} enthaltenden Glieder von $\Phi_s^{(h-2)}$ nach (4) genau die Relationen (15). Auch die Uebereinstimmung der numerischen Factoren in (14) und (16) lässt sich leicht nachweisen. Steht in $\Phi_s^{(h-2)}$ ein Glied mit $\frac{1}{(\varrho+l)!}\left(\frac{y_{h-1}}{h-1!}\right)^{\varrho+\iota}$, so in (16) eines mit $\frac{(\varrho+l)\cdots(\varrho+l)}{(\varrho+l)!}\left(\frac{y_{h-1}}{(h-1)!}\right)^{\varrho}$ oder $\frac{1}{\varrho!}\left(\frac{y_{h-1}}{(h-1)!}\right)^{\varrho}$ genau wie in (14).

Demnach erscheint jetzt die Gleichung (5) in der Gestalt:

$$(17)\qquad \sum_{\mu,\sigma}\frac{1}{\sigma_1!\,\sigma_2!\cdots}\,\frac{\partial^{\iota}\Phi_s^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^{\iota}}\left(\frac{y_{\mu_1}}{h\,(h+1)\cdots\mu_1}\right)^{\sigma_1}\left(\frac{y_{\mu_2}}{h\,(h+1)\cdots\mu_2}\right)^{\sigma_2}\cdots\cdots=0.$$

Dabei genügen die Zahlen μ, σ den Gleichungen

$$(18)\qquad \sum\sigma=l\,,\quad \sum\sigma\mu=m+l\,(h-1)-s\,.$$

Aus der letzteren folgt, da $\sum\sigma\mu\leq m$, $s\geq l\,(h-1)$; wie auch unmittelbar aus der Bedeutung von $\Phi_s^{(h-2)}$ geschlossen wird. Da ferner nach (18)

$$(18^*)\qquad \sum\sigma\,(\mu-h)=m-(s+l)\,,$$

so ist nothwendig

$$s+l\leq m\,,$$

also auch

$$(19)\qquad lh\leq s+l\leq m$$

und somit die untere Grenze für $s+l$ h, denn für $l=0$ folgt $s=m$.

Will man die Differentialgleichungen von $F=0$ in der Form (18) entwickeln, so stellt man zuerst die Werthe von l auf, welche

von 0 bis $m:h$ gehen; hierauf die zugehörigen s nach (19), endlich die Systeme μ, σ.

So findet man z. B. für $h=3$

$$m=1,\quad \Phi_1'=0,$$

$$m=2,\quad \Phi_2''=0,$$

$$m=3,\quad \Phi_3''+\frac{\partial\Phi_2''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_3}{3}=0,$$

$$m=4,\quad \Phi_4''+\frac{\partial\Phi_3''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_3}{3}+\frac{\partial\Phi_2''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_4}{12}=0,$$

$$m=5,\quad \Phi_5''+\frac{\partial\Phi_4''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_3}{3}+\frac{\partial\Phi_3''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_4}{12}+\frac{\partial\Phi_2''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_5}{60}=0,$$

$$m=6,\quad \Phi_6''+\frac{\partial\Phi_5''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2\Phi_4''}{\partial y_2^2}\cdot\left(\frac{y_3}{2}\right)^2$$
$$+\frac{\partial\Phi_4''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_4}{12}+\frac{\partial\Phi_3''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_5}{60}+\frac{\partial\Phi_2''}{\partial y_2}\cdot\frac{y_6}{360}=0$$

u. s. w.

8. Man theile nun die Gleichungen (13) in Gruppen von je i und denke sich in der $(h-1)^{\text{ten}}$ Gruppe, welche die Gleichungen $(h-1)i+1$ bis hi umfasst, nach y_h, $y_{h+1}\cdots$ geordnet. Setzt man in (18)

$$m=(h-1)i+q,\quad \mu_r=(h-2)+\delta_r,\quad s=(h-1)i+s',$$

so folgt neben

$$\sum\sigma=l,\quad \sum\sigma\delta=q+l-s'.$$

Dazu hat man nach (19)

$$1\leqq s'+l\leqq q,$$

indem die Annahme $s'=0$, $l=1$ offenbar zulässig ist. *Beschränkt man sich auf diejenigen Glieder von* (17), *wo* $s\geqq(h-1)i$, *so hat man Ausdrücke, welche eine ganz ähnliche Zusammensetzung zeigen, wie die linken Seiten der Gleichungen* (13) *der ersten Gruppe, wo* m *von* $i+1$ *bis* $2i$ *geht.* Es steht nur an Stelle von y_{δ_r}, y_{μ_r}, von $\frac{\partial^k\Phi_r}{\partial y_1^k}$ $\frac{\partial^k\Phi_s^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^k}$, wo $s=(h-1)i+r$.

Geht man nun von der Gleichung (13**), d. i. $\Phi_{2i}'=0$ aus, indem man ihre sämmtlichen Wurzeln als gleich annimmt, und setzt auch noch das Bestehen aller Gleichungen

$$\frac{\partial^l\Phi_{2i+s'}'}{\partial y_2^l}=0,\quad (1\leqq s'\leqq i-1) \tag{19*}$$

voraus, so erhält man für y_3 wieder eine Gleichung vom Grade i mit ausschliesslich *endlichen* Wurzeln. Dieselbe lautet

$$\sum_0^i{}_g \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi'_{3i-g}}{\partial y_2^g} \left(\frac{y_3}{3}\right)^g \equiv \Phi''_{3i} = 0 .$$

Der Coefficient von $\left(\frac{y_3}{3}\right)^i$ ist wieder $\frac{1}{i!} \frac{1}{2^i} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^i}$, d. i. nicht Null.

In dieser Art schreitet die Specialisirung fort. Man gelangt allgemein zur $h i^{\text{ten}}$ Differentialgleichung von $F = 0$, aus welcher i endliche Werthe von y_h folgen als Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{hi}^{(h-1)} \equiv \sum_0^i{}_g \cdot \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi_{hi-g}^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}^g} \left(\frac{y_h}{h}\right)^g = 0 .$$

Man sieht, um alle möglichen Fälle in Betracht zu ziehen, hat man nur noch ein System von i Gleichungen zu betrachten, welche dieselbe Form besitzen, wie die Gleichungen (13), fortgesetzt bis zur $(2i-1)^{\text{ten}}$ Differentialgleichung von $F = 0$*).

Eine ähnliche Bemerkung lässt sich machen im Falle, dass von den Wurzeln von $\Phi_i = 0$ weniger als i, etwa g in *einen* endlichen Werth y_1^0 zusammenfallen. Man theilt dann die Differentialgleichungen von der $i+1$ an in Gruppen von je g, welche dann gruppenweise in dieselbe Form gebracht werden können, wie die Gleichungen in den Gruppen des g-fachen Punktes mit in eine einzige zusammenfallenden Tangenten. Man setzt jetzt

$$m = i + (h-2)\,g + q , \quad \mu_r = (h-2) + \delta_r ,$$
$$s = (i-g) + (h-1)\,g + s' ,$$

worin q von 1 bis g geht.

9. Es ist nun zu zeigen, *dass im i-fachen Punkte $x^0 y^0$ nur eine endliche Anzahl von Differentialquotienten je einen i-fachen endlichen Werth erhalten können*, ohne dass die ganze Function $F(x, y)$ n^{ter} Dimension in x, y einen wiederholten Factor in y — mit oder ohne x — enthält, oder *ohne dass die Discriminante D von F, in Beziehung auf y genommen, identisch verschwindet.* Dieses folgt unmittelbar aus der bekannten Identität

$$(\alpha) \qquad F \cdot V - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot U = D ,$$

worin U, V ganze Functionen von x, y bezeichnen; in y bezüglich von den Graden $q-1$, $q-2$, wenn F in y vom Grade q ist $(q \leqq n)$. Die Discriminante D, welche nicht identisch verschwinden darf, ist eine ganze Function von x, welche den Grad $(2n-q)\,(q-1)$ nicht übersteigen kann.

---

*) Eine Andeutung dieser Gruppirung der Differentialgleichungen findet sich bei Plücker, Theorie der algebr. Curven p. 175.

Nimmt man an, dass für den singulären Punkt x^0, y^0 $y_1\, y_2 \cdots y_h$ je *einen* endlichen i-fachen Werth besitzen und setzt in (α)

$$(\beta) \qquad x = x^0 + \xi\,, \quad y = y^0 + y_1{}^0\xi + \cdots + \frac{y_h^0 + z}{h!}\xi^h\,,$$

so lässt sich zeigen, dass *das niedrigste Glied in D nicht einen kleineren Exponenten haben könne, als* $h(i-1)+1$, so dass nothwendig

$$h(i-1) < (2n-q)(q-1)$$

sein müsse*) — womit der vorstehende Satz bewiesen ist.

Nach dem in Nr. 5. Bemerkten beginnt $F(x, y)$ nach Ausführung der Substitution (β) mit ξ^{hi}, so dass nur noch das Ergebniss derselben in $\frac{\partial F}{\partial y}$ zu betrachten ist.

Es sei $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv G$. Dann ist

$$\frac{\partial^r G}{\partial x^k \partial y^{r-k}} = \frac{\partial^{r+1} F}{\partial x^k \partial y^{r-k+1}}\,, \qquad \frac{\partial^k \Psi_r}{\partial y_1{}^k} = \frac{\partial^{k+1}\Phi_{r+1}}{\partial y_1{}^{k+1}}\,;$$

wo Ψ_r den Ausdruck (2), gebildet mit der Function G, bedeutet. Wenn ferner die linke Seite von (5), unter Zugrundelegung von G entwickelt, L_m heisst, so ist

$$(\gamma) \qquad L_m \equiv 2\frac{\partial K_{m+2}}{\partial y_2}\,.$$

Denn es geht L_m aus K_m hervor, indem man durchaus $\frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1{}^r}$ mit $\frac{\partial^{k+1}\Phi_{r+1}}{\partial y_1{}^{r+1}}$ vertauscht. Andererseits werden die y_2 enthaltenden Glieder von K_{m+2} aus den Gleichungen bestimmt:

$$\sum \varrho + 1 = k\,,$$
$$\sum \lambda\varrho + 2 = m + 2 + k - r\,,$$
$$4 \leqq r + k \leqq m + 2\,, \quad (m \geqq 2)\,.$$

Setzt man hier

$$k = k' + 1\,, \quad r = r' + 1\,,$$

so gehen die Gleichungen unmittelbar in (4) und (6) über. Somit stehen in (γ) zu beiden Seiten dieselben Glieder, welche, wie sich unmittelbar aus (5) ergiebt, auch dieselben numerischen Coefficienten haben.

---

*) Diese Grenze für h ist nur im Falle $i = 2$ weiter als die von Hamburger gegebene (a. a. O. p. 479).

Der Punkt x^0y^0 ist für $G=0$ $(i-1)$-fach. Die Werthe von y_1 ergeben sich aus der Gleichung:

$$\Psi_{i-1} \equiv \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} = 0;$$

somit hat nach der hier bestehenden Voraussetzung y_1 *einen* endlichen $(i-1)$-fachen Werth und zwar ist derselbe y_1^0 wie in (β). Nun verschwinden auch die Ausdrücke

$$L_i, \quad L_{i+1}, \cdots L_{2i-3},$$

denn sie enthalten, nach $y_2\, y_3$ etc. geordnet, dieselben Coefficienten wie

$$K_{i+2}, \quad K_{i+3} \cdots K_{2i-1},$$

welche sämmtlich als Null angenommen werden (13*). Von L_{2i-2} bleibt nichts als

$$\frac{\partial \Phi'_{2i}}{\partial y_2} = 0,$$

so dass y_2 ebenfalls *einen* $(i-1)$-fachen Werth besitzt, der mit y_2^0 übereinstimmt (13**). — Die Ausdrücke

$$L_{2i-1}, \quad L_{2i+1} \cdots L_{3i-4}$$

verschwinden nun auch wegen (19*), indem sie sich von

$$K_{2i+1}, \quad K_{2i+2} \cdots K_{3i-2}$$

nur dadurch unterscheiden, dass an Stelle von

$$\frac{\partial^l \Phi'_s}{\partial y_2^{\,l}} \text{ steht } \frac{\partial^{l+1} \Phi'_s}{\partial y_2^{\,l+1}}.$$

Von L_{3i-3} bleiben nur die Glieder, welche entstehen aus denjenigen Gliedern von K_{3i-1}, wofür $s+l=3i-1$, d. i. aus den y_3 enthaltenden (18*). Man findet also

$$0 = \frac{\partial \Phi''_{3i-1}}{\partial y_2} \equiv 3\, \frac{\partial \Phi''_{3i}}{\partial y_3},$$

d. i. y_3 hat als $(i-1)$-fachen Werth auch wieder y_3^0 aus (β). Die hier benützte Identität ist ein specieller Fall der allgemeinen Formel

$$(\delta) \qquad \frac{\partial \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_2} \equiv 3 \cdot 4 \cdots h \cdot \frac{\partial \Phi_{s+h-2}^{(h-1)}}{\partial y_h}, \quad (h \geqq 3),$$

die ähnlich wie (γ) gezeigt wird. Daraus folgt sofort, dass

$$L_{3i-2}, \quad L_{3i-1} \cdots L_{4i-5}$$

in dem hier betrachteten Falle verschwinden, denn nach (γ) gehen dieselben aus den nach y_3, y_4 etc. geordneten

$$K_{3i}, \quad K_{3i+1} \cdots K_{3i-3}$$

hervor, indem an Stelle von

$$\frac{\partial^l \Phi_s''}{\partial y_3^{\,l}} \text{ tritt } \frac{\partial}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial^l \Phi_s''}{\partial y_3^{\,l}} \equiv 3 \frac{\partial^{l+1} \Phi_{s+1}''}{\partial y_3^{\,l+1}} .$$

Von L_{4i-4} bleiben nur diejenigen Glieder, welche aus solchen von K_{4i-2} entstehen, wofür $s + l = 4i - 2$ also aus Φ_{4i-2}'''. Nach (δ) ist aber

$$\frac{\partial \Phi_{4i-2}'''}{\partial y_2} \equiv 12 \frac{\partial \Phi_{4i}'''}{\partial y_4} ;$$

mithin erhält im Punkte $x^0 y^0$ von $G = 0$ y_4 $(i-1)$-mal denselben Werth $y_4^{\,0}$ wie in (β).

So kann man fortfahren. Es ist offenbar, dass im Punkte $x^0 y^0$, wenn er als der Curve $G = 0$ angehörig betrachtet wird, $y_1\, y_2 \cdots y_h$ je denselben Werth $y_1^{\,0}\, y_2^{\,0} \cdots y_h^{\,0}$ $(i-1)$-mal annimmt, wie in $F = 0$ i-mal. Damit ist der oben gebrauchte Hülfssatz erwiesen.

10. *Vollständige Aufzählung aller Fälle des Doppelpunktes* $(i = 2)$.

Man setzt in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi , \quad y = y^0 + (y_1^{\,0} + z)\, \xi ,$$

wo $y_1^{\,0}$ eine der Wurzeln der Gleichung $\Phi_2 = 0$, von welchen zugleich angenommen wird, dass dieselben sämmtlich endlich seien, d. i. $\frac{\partial^2 F}{\partial y^{0\,2}}$ nicht Null. Nach dem in Nr. 5. Bemerkten folgt als transformirte Gleichung

$$\text{(a)} \quad G(z, \xi) \equiv \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1^{\,0}} z + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^{\,0\,2}} z^2 + \xi \left(\Phi_3 + z \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1^{\,0}} + \cdots \right) + \cdots = 0.$$

Ist $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1}$ nicht 0, d. i. *sind die Wurzeln von* $\Phi_2 = 0$ *verschieden*, so ist $\frac{\partial G(0,0)}{\partial z}$ nicht 0 und man hat die Entwickelung

$$z = \frac{y_2^{\,0}}{2} \xi^2 + \cdots .$$

Somit ergeben sich für $y - y^0$ zwei Entwickelungen nach ganzen positiven Potenzen von ξ. — Bestehen für einen dieser Zweige auch noch die Gleichungen

$$\Phi_3 = 0 , \quad \Phi_4 = 0 \cdots \Phi_h = 0 ,$$

so sind nach (7) auch noch $y_2^{\,0} = y_3^{\,0} = \cdots = y_{h-1}^{\,0}$, es hat derselbe eine Berührung $(h-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit seiner Tangente.

Ist aber $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 0$, d. i. *sind die Wurzeln von* $\Phi_2 = 0$ *einander gleich, jedoch* Φ_3 *von Null verschieden*, so hat man noch $\frac{\partial G(00)}{\partial \xi}$ nicht Null und somit eine Entwickelung

$$\Phi_3 \xi = -\tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^{\,0\,2}} z^2 + \cdots ,$$

mithin

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots$$

und

$$y - y^0 = y_1{}^0 \xi + \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{2}} + \cdots\cdots.$$

Die Entwickelung entspricht einer *Spitze erster Art*, indem die Curve auf einer Seite der Geraden $x - x^0 = 0$, aber auf beiden Seiten der Tangente liegt.

Mit der Bedingung $\Phi_3 = 0$ betreten wir die zweite Gruppe. Es hat jetzt y_2 zwei endliche Werthe, welche aus der Gleichung

$$\text{(b)} \qquad \Phi_4' \equiv \Phi_4 + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_1} \cdot \frac{y_2}{2} + \frac{\partial^2 \Phi_3}{\partial y_1^2} \cdot \frac{y_2^2}{8} = 0$$

folgen. Nun ist zu setzen

$$y - y^0 = y_1{}^0 \xi + \frac{y_2{}^0 + z}{2} \xi^2.$$

Das Resultat dieser Substitution ergiebt sich ähnlich wie (a); es ist:

$$G'(z, \xi) \equiv \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_2{}^{00}} z + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_4'}{\partial y_2{}^{02}} z^2 + \xi \left(\Phi_5' + z \frac{\partial \Phi_5'}{\partial y_2{}^{00}} + \cdot\cdot\right) + \cdot\cdot = 0.$$

So lange $\frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_2}$ nicht 0, d. i. *die Gleichung* (b) *verschiedene Wurzeln hat*, hat man zwei gewöhnliche Entwickelungen und ihnen entsprechend zwei Curvenzweige, die unter einander und mit der Tangente eine Berührung 1. Ordnung aufweisen. Dieselben können bei reellem x^0, y^0, $y_1{}^0$ auch imaginär sein (isolirte Tangente mit reellem Berührungspunkte).

Im Falle reeller Zweige kann *einer* derselben mit der Tangente eine beliebig hohe Berührung erhalten. Ist

$$\Phi_4 = 0, \quad \Phi_5 = 0 \cdots \Phi_h = 0,$$

so ist die Ordnung derselben $h - 2$.

Wenn $\frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_2} = 0$, *aber* Φ_5' *nicht Null ist*, so folgt wie oben die Entwickelung

$$y - y^0 = y_1{}^0 \xi + \frac{y_2{}^0}{2} \xi^2 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots;$$

offenbar *eine Spitze zweiter Art, wenn* $y_2{}^0$ *nicht Null ist, sonst eine solche erster Art.*

Mit der Gleichung $\Phi_5' = 0$ gelangen wir in die 3. Gruppe. So lange die Gleichung $\Phi_6'' = 0$ zwei verschiedene Wurzeln y_3 hat, bildet die Curve zwei Zweige mit einer Berührung 2. Ordnung, welche — wenn diese einander gleich werden — im Allgemeinen in eine Spitze zweiter Art übergehen, u. s. f.

Das vollständige Ergebniss dieser Untersuchung lautet:

„Bestehen ausser $\frac{\partial F}{\partial x^0} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y^0} = 0$ noch die Gleichungen

$$\Phi_2 = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 0, \quad \Phi_3 = 0,$$

$$\Phi_4' = 0, \quad \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y_1} = 0, \quad \Phi_5' = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_{2h-2}^{(h-2)} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{2h-2}^{(h-2)}}{\partial y_{h-1}} = 0, \quad \Phi_{2h-1}^{(h-2)} = 0,$$

so wird y_h aus der Gleichung $\Phi_{2h}^{(h-1)} = 0$ bestimmt. Die Curve besteht in der Umgebung des Punktes $x^0 y^0$ aus zwei gewöhnlichen Zweigen, von denen gesagt wird, sie haben unter sich eine Berührung von der Ordnung $h - 1$. Die Berührung mit Tangente steigt *zugleich für beide Zweige* von der 1. bis zur $(h-1)^{\text{ten}}$ Ordnung; dann aber lässt sich dieselbe nur mehr für *einen* der Zweige erhöhen.

Tritt zu den vorstehenden Gleichungen noch die folgende

$$\frac{\partial \Phi_{2h}^{(h-1)}}{\partial y_h} = 0,$$

während $\Phi_{2h+1}^{(h-1)}$ von Null verschieden ist, so bildet die Curve eine Spitze und zwar von erster Art, wenn von y_2^0 ab eine ungerade — von zweiter Art, wenn eine gerade Zahl von Differentialquotienten oder gar keiner verschwindet. Doch gilt dieses nur bis einschliesslich bis y_{h-1}^0. Ist ausser $y_2^0 \cdots y_{h-1}^0$ auch noch $y_h^0 = 0$, so ist die Spitze stets von erster Art. — *Die Ableitung y_{h+1}^0 ist stets unendlich.* Die Bedingungen für das Verschwinden von $y_2^0\, y_3^0 \cdots y_k^0$ $(k \leqq h-1)$ sind *hier*, da

$$\text{(c)} \qquad \Phi_{2k}^{(k-1)} = (\Phi_{2k} + \cdots) + \left(\frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial y_1} + \cdots\right)\frac{y_k}{k!} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y_1^2}\left(\frac{y_k}{k!}\right)^2 + \cdots$$

$$\Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0 \cdots \quad \Phi_{2k} = 0, \quad \Phi_{2k+1} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_4}{\partial y_1} = 0 \cdots \frac{\partial \Phi_{k+1}}{\partial y_1} = 0.$$

Für $k = h$ fällt die letzte Gleichung der ersten Zeile weg.

Als analytische Darstellung der Function y in der Umgebung des singulären Punktes $x^0 y^0$ ergeben sich im ersten Falle zwei Entwickelungen nach ganzen positiven Potenzen von $x - x^0$, im zweiten eine ebensolche nach Potenzen von $\sqrt{x - x^0}$."

Wenn die Gleichung $\Phi_2 = 0$ einen unendlichen Werth für y_1^0 anzeigt, so betrachtet man x als Function von y. Auf diese Weise

erhält man Entwickelungen von $x - x^0$ nach ganzen positiven Potenzen von $y - y^0$ oder $\sqrt{y - y^0}$, welche stets umgekehrt werden können.

Die Herstellung von Gleichungen solcher Curven, welche eine gegebene Doppelpunkts-Singularität besitzen, lässt sich mittelst der Formeln (10) ausführen, wenn man $x^0 = y^0 = y_1{}^0 = 0$ setzt.

11. Mit Hülfe der in der vorhergehenden Nummer gegebenen Sätze folgt unmittelbar der allgemeine Satz von Lagrange: *„In der Umgebung eines i-fachen endlichen Punktes $x^0 y^0$ existiren Entwickelungen von $y - y^0$ nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x^0$."* — wenn nur die Richtigkeit derselben für alle, weniger als i-fachen Punkte vorausgesetzt wird.

Betrachten wir zunächst eine *endliche*, g-fache Wurzel $y_1{}^0$ der Gleichung $\Phi_i = 0$ $(g \leq i)$ und nehmen wir an, dass auch die entsprechenden g Werthe von $y_2\, y_3 \cdots y_{h-1}$ je in *einen* endlichen Werth zusammenfallen, während y_h g beliebige *endliche* Werthe erhält, von denen ein e-facher y_h^0 hier aufgefasst wird. *Die Zahl h ist stets eine endliche* (Nr. 9.). Dann setzen wir in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi\,, \quad y = y^0 + y_1{}^0 \xi + \cdots + \frac{y_h^0 + z}{h!}\xi^h\,.$$

Nach der Bemerkung in Nr. 5. folgt

$$(20) \quad \sum_s \xi^{s-i-(h-1)g}\, \Phi_s^{(h-1)}(y_h^0 + z) = 0\,, \quad (s = i + (h-1)g \cdots hn),$$

indem in $\Phi_s^{(h-1)}$ an Stelle von y_h^0 $y_h^0 + z$ eintritt. Hier ist ferner

$$\Phi_s^{(h-1)}(y_h^0 + z) = \sum_0^f{}_l \frac{\partial^l \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_h^{0\,l}} \cdot \frac{z^l}{l!}\,,$$

wo f den Grad von $\Phi_s^{(h-1)}$ in y_h bezeichnet, der bis $\frac{s}{h}$ ansteigt. Das erste Glied in (20) ist demnach

$$\frac{\partial^e \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_h^{0\,e}} \cdot \frac{z^e}{e!} + \frac{\partial^{e+1} \Phi_s^{(h-1)}}{\partial y_h^{0\,e+1}} \cdot \frac{z^{e+1}}{(e+1)!} + \cdots,$$

für $s = i + (h-1)g$. Nach Voraussetzung verschwindet hier das erste Glied nicht. Es ist also der Punkt $\xi = 0$ $z = 0$ in (20) höchstens g-fach. Im Falle $g < i$, ist somit die Sache erledigt; denn nach Voraussetzung folgen für z Entwickelungen nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von ξ; somit auch für $y - y^0$.

Dasselbe gilt im Falle $g = i$. Denn wollen wir in der h^{ten} Gruppe der Singularitäten des i-fachen Punktes verbleiben, so dürfen nach Nr. 8. nicht alle Ausdrücke

$$\frac{\partial^i \Phi_{\lambda i+s'}^{(\lambda-1)}}{\partial y_\lambda^{0\,l}}, \quad (0 \leq s' + l \leq i-1)$$

zugleich verschwinden. Somit — da dieses Coeff. v. $\xi^{s'} z^l$ in (20) für $g = i$ — können aus der genannten Gleichung nicht alle Glieder bis einschliesslich der $i-1$ Ordnung in ξ, z entfallen. Es ist also in diesem Falle der Punkt $\xi = 0$ $z = 0$ in der Curve (20) höchstens $i-1$-fach.

Damit ist der angegebene Satz gezeigt; denn unendliche Wurzeln der Gleichung $\Phi_i = 0$ bringen keine Ausnahme hervor. Dann finden wir nach dem Vorstehenden Entwickelungen von $x - x^0$ nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von $y - y^0$, welche umgekehrt werden können.

Die Gestalt der reellen Zweige der Curve $F = 0$ wird aus der Gleichung derselben in der Umgebung des Punktes $x^0 y^0$

$$(20^*) \qquad \begin{cases} x - x^0 = t^\lambda, \\ y - y^0 = c_0 t^\mu + c_1 t^{\mu+1} + \cdots \end{cases}$$

gefunden. (Weierstrass in einer Vorlesung über Geometrie.) Ist die Gerade $y = y^0$ Tangente im Punkte $x^0 y^0$, so hat man $\mu > \lambda$. Dann ist $(y - y^0) y_2$ für gehörig kleine Werthe von t durchaus positiv — somit ergeben sich folgende Formen der Zweige

λ gerade,	μ gerade,	Spitze 2. Art,
„	μ ungerade,	Spitze 1. Art,
λ ungerade,	μ gerade,	Gewöhnlicher Zweig,
„	μ ungerade,	Wendepunkt.

Im 3. Falle verläuft die Curve auf derselben Seite der Tangente, der sie zu beiden Seiten des Berührungspunktes $x^0 y^0$ ihre Convexität zuwendet.

12. Es mögen jetzt die *an einem i-fachen Punkte mit i-facher Tangente vorkommenden Singularitäten* etwas näher betrachtet werden. Nach dem in Nr. 8. Bemerkten genügt die Untersuchung *einer* Gruppe derselben, z. B. der ersten. Dabei wird angenommen, dass die Gleichung $\Phi_i = 0$ eine endliche i-fache Wurzel y_1^0 besitze. — Die Gleichung (20) geht nun in die folgende über (indem $y = y^0 + (y_1^0 + z)\xi$ zu setzen ist)

$$(21) \quad G(\xi, z) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^{0\,i}} z^i + \xi \left\{ \Phi_{i+1} + \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1^0} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0\,2}} z^2 + \cdots \right\} + \\ + \xi^2 (\Phi_{i+2} + \cdots) + \cdots = 0.$$

a) Ist Φ_{i+1} nicht 0, so erhält man hieraus nach Nr. 4. eine Entwickelung von der Form:

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i}} + \cdots,$$

also

$$y - y^0 - y_1{}^0 \xi = \xi \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i}} + \cdots\cdots.$$

$y_2{}^0$ ist ∞, wie auch die 2. Gleichung (13) anzeigt.

b) Nimmt man an, dass $\Phi_{i+1} = 0$ sei, aber $\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^0}$ nicht Null, so ist im Falle $i > 2$ der Punkt $\xi = 0$ $z = 0$ für $G = 0$ ein Doppelpunkt mit zwei verschiedenen Tangenten, deren eine $\xi = 0$. Nach Nr. 10. finden die Entwickelungen statt:

$$z = \left(\frac{dz}{d\xi}\right)_0 \xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{d\xi^2}\right)_0 \xi^2 + \cdots\cdots,$$

$$\xi = \alpha z^{i-1} + \cdots\cdots,$$

da für den zweiten Zweig alle Differentialquotienten von ξ nach z bis zum $(i-2)^{\text{ten}}$ einschliesslich verschwinden. Der letztere liefert somit die Entwickelung

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i-1}} + \cdots\cdots:$$

c) Wenn ferner $\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^0} = 0$, aber Φ_{i+2} von 0 verschieden ist, so hat $G = 0$ im Punkte $\xi = 0$ $z = 0$ einen Doppelpunkt mit der einzigen Tangente $\xi = 0$. Seine Untersuchung wird mit Hülfe von Nr. 10. leicht durchgeführt. Man braucht nur zu bemerken, dass anfänglich zwei Differentialquotienten von ξ nach z nur gleich werden können, wenn sie verschwinden. Es seien die Ausdrücke Φ_r in Beziehung auf $G = 0$ und $\frac{d\xi}{dz}$ mit Ψ_r bezeichnet, ferner der Coefficient $z^\alpha \xi^\beta$ in (21) mit $[z^\alpha \xi^\beta]$, so folgt nach (10) für den Punkt $z = 0$ $\xi = 0$

$$\Psi_r = [z^r], \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial \xi_1} = [z^{r-1}\xi] = \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^{0\,r-1}}.$$

Nun sollen auch noch die Grössen

$$\frac{\partial^2 \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^{0\,2}}, \quad \frac{\partial^3 \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^{0\,3}}, \quad \cdots \quad \frac{\partial^{f-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^{0\,f-1}}$$

verschwinden, dagegen $\frac{\partial^f \Phi_{i+1}}{\partial y_1{}^{0\,f}}$ nicht Null sein ($f \geqq 2$). Dann sind ausser ξ_1 auch $\xi_2, \cdots \xi_{f-1}$ je zweimal Null (vgl. Gleichung (c) in Nr. 10.). Es giebt *zwei gewöhnliche Curvenzweige*, für deren einen ausserdem noch

$$\xi_f = \xi_{f+1} = \cdots = \xi_{i-f-1} = 0.$$

Denselben entsprechend bestehen die Entwickelungen

$$\xi = \alpha z^f + \cdots$$
$$\xi = \alpha' z^{i-f} + \cdots$$

und umgekehrt

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{f}} + \cdots$$

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{i-f}} + \cdots .$$

Man findet leicht aus den Differentialgleichungen von $G = 0$ (oder unmittelbar)

$$\alpha = -\frac{1}{f!}\frac{\partial^f \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0f}} : \Phi_{i+2}, \quad \alpha' = -1 : \frac{1}{f!}\frac{\partial^f \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0f}} .$$

Um den Schluss dieser Specialisirung zu erhalten, hat man zu unterscheiden:

α) i ungerade $= 2j + 1$. Setzt man $f = j + 1$, so sind wegen $\Psi_{2j} = 0$ beide Werthe von ξ_j Null. Da aber Ψ_{2j+1} nicht mehr verschwindet, so hat $G = 0$ eine Spitze erster Art, der die Entwickelung entspricht

$$\xi = \alpha z^{\frac{2j+1}{2}} + \cdots ,$$

somit

$$\sqrt{z} = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2j+1}} + \cdots$$

und

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{2j+1}} + \cdots .$$

Die Curve $F = 0$ hat *einen* Zweig mit *singulärem Wendepunkte.*

β) i gerade $= 2j$. Nun kann f gehen bis j einschliesslich; dann hat wegen $\Psi_{2j-1} = 0$ ξ_j 2 endliche und von 0 verschiedene Werthe, welche aber einander gleich werden können. Dann gelten auch hier die obenstehenden Schlussformeln. Die Specialisirung kann von hier aus beliebig weit fortgesetzt werden, indem die Ordnung der Berührung der beiden Curvenzweige stets zunimmt. Die Entwickelung von z beginnt stets mit $\xi^{\frac{1}{j}}$ und schreitet im Falle zweier Zweige nach positiven Potenzen dieser Grösse, im Falle eines einzigen Zweiges nach positiven Potenzen von $\xi^{\frac{1}{2j}}$ fort.

d) Die nächste Annahme $\Phi_{i+2} = 0$ bewirkt das identische Verschwinden der 3. der Gleichungen (13). Aus der nächstfolgenden ergeben sich dann im Allgemeinen zwei endliche Werthe von y_2. —

So geht es fort. Bestehen die Gleichungen

$$(22^*) \qquad \frac{\partial^k \Phi_r}{\partial y_1^{0\,k}} = 0\,, \quad (i \leqq r + k \leqq i + q - 1)\,,$$

wo $q \leqq i - 1$, so verschwinden alle Gleichungen (13) identisch bis zur $(i + q)^{\text{ten}}$, in welcher nur die Glieder zurückbleiben, für die $r + k = i + q$, d. i. diejenigen, welche y_2 enthalten:

$$(22) \qquad \sum_0^q{}_g \frac{1}{g!} \frac{\partial^g \Phi_{i+q-g}}{\partial y_1^{0\,g}} \left(\frac{y_2}{2}\right)^g = 0\,.$$

In dem hier betrachteten Falle reducirt sich der Grad der Gleichung um eine Einheit, so dass im Allgemeinen $q - 1$ endliche Werthe von y_2 vorhanden sind. Die Gleichung (21) geht entsprechend über in

$$(23) \quad G(\xi, z) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \Phi_i}{\partial y_1^{0\,i}} z^i + \xi \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \frac{\partial^{q-1} \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0\,q-1}} z^{q-1} + \cdots \right\}$$
$$+ \xi^2 \left\{ \frac{1}{(q-2)!} \frac{\partial^{q-2} \Phi_{i+2}}{\partial y_1^{0\,q-2}} z^{q-2} + \cdots \right\}$$
$$+ \cdots + \xi^q \left\{ \Phi_{i+q} + \cdots \right\} + \cdots = 0.$$

In dieser Curve ist $\xi = 0$ $z = 0$ q-facher Punkt. $q - 1$ Werthe von $\frac{dz}{d\xi}$ sind endlich, wenn $[z^{q-1}\xi]$ nicht 0 ist. Für die Tangente $\xi = 0$ sind ausser ξ_1 nach (13) noch ξ_2, $\xi_3 \cdots \xi_{i-q}$ Null; somit besteht die Entwickelung nach positiven ganzen Potenzen von z

$$\xi = \alpha z^{i-q+1} + \cdots$$

und daher

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i-q+1}} + \cdots *).$$

Die weitere Specialisirung wird allgemein darin bestehen, dass die Gleichung (22) vom Grade $q - g$ wird, so dass die Curve (23) im q-fachen Punkte $\xi = 0$ $z = 0$ die g-fache Tangente $\xi = 0$ besitzt. *Ein solcher Fall kann leicht auf den g-fachen Punkt mit einer einzigen Tangente zurückgeführt werden.* Denken wir uns neben (20) diejenige Gleichung gesetzt, wo $i = g$ ist, so stimmen beide Gleichungen in dem Anfange der Coefficienten jeder Potenz von ξ überein, nur sind die Indices der $\Phi^{(\lambda-1)}$ im ersten Falle um $i - g$ höher. Ein Blick auf die vorstehende Untersuchung zeigt nun, dass die Ergebnisse derselben unmittelbar auf den Fall eines k-fachen Punktes mit $i\,(< k)$

*) Hierher (für $i = 5$ $q = 3$) gehört das bekannte Beispiel von Puiseux (vgl. Fischer, V. Puiseux, Untersuchungen etc. p. 48).

zusammenfallenden Tangenten übertragen werden können. Beispielsweise möge noch die Gleichung (23) betrachtet werden, nachdem darin

$$(2 \leq g \leq q), \quad \frac{\partial^{q-1}\Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0\,q-1}} = \frac{\partial^{q-2}\Phi_{i+2}}{\partial y_1^{0\,q-2}} = \cdots = \frac{\partial^{q-g+1}\Phi_{i+g-1}}{\partial y_1^{0\,q-g+1}} = 0$$

gesetzt ist, so dass, wie erwähnt, die Glieder von der Dimension q in ξ, z den Factor ξ^g erhalten. Die Ausdrücke Φ_r (2) in Beziehung auf $G = 0$ und $\frac{d\xi}{dz} = \xi_1$ mögen wieder mit Ψ_r bezeichnet werden. Wenn $q < i - 1$, so verschwindet noch die $(q+1)^{\text{te}}$ Differentialgleichung von $G = 0$; wir haben also, so lange

$$(24) \qquad \frac{\partial \Psi_{q+1}}{\partial \xi_1^0} = [z^q \xi] = \frac{1}{q!} \frac{\partial^q \Phi_{i+1}}{\partial y_1^{0\,q}}$$

nicht verschwindet, genau den Fall b). — Der reguläre Zweig hat aber noch $\xi_2 = \xi_3 = \cdots = \xi_{i-q-1} = 0$, wie aus (13) folgt. Dagegen kann ξ_{i-q} nicht mehr 0 sein. Somit bestehen die Entwickelungen

$$\xi = \alpha z^{i-q} + \cdots,$$

$$\xi = z\left(\frac{z}{\alpha'}\right)^{\frac{1}{g-1}} + \cdots,$$

woraus folgt

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{i-q}} + \cdots,$$

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha''}\right)^{\frac{g-1}{g}} + \cdots,$$

Wenn $q = i - 1$, so tritt, da Ψ_{q+1} nicht mehr Null ist, *stets* der Fall a) ein, dem eine Entwickelung von ξ nach Potenzen von $z^{\frac{1}{g}}$ entspricht, so dass käme

$$z = \left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{g}{g+1}} + \cdots.$$

Dazu sind noch die zu den $q-g$ endlichen Werthen von y_2 gehörigen Zweige zu rechnen.

Wenn die Grösse (24) auch verschwindet, so tritt, falls $q < i-2$, schon die Form $q=3$ des Hauptfalles d) ein. $q=i-2$ giebt noch c).

Damit möge diese Untersuchung, die man ohne Mühe beliebig weit fortsetzen kann, abgebrochen werden. Es sei nur noch bemerkt, dass der Uebergang aus der ersten Gruppe der hier betrachteten Singularitäten in die zweite (d. i. zu i sich gewöhnlich berührenden Zweigen) in der Art stattfindet, dass y_2 von $i-2$ endlichen Werthen zu i ebensolchen gelangt.

13. Setzt man in $F(x, y) = 0$

$$x = x^0 + \xi\,, \quad y = y^0 + \eta\,,$$

unter $x^0 y^0$ einen beliebigen endlichen Punkt von $F = 0$ verstanden — so erhält man für ξ, η eine oder mehrere Entwickelungen von der Form (20*). Es gilt nun der Satz: *„Die Summe aller λ ist stets gleich dem kleinsten Exponenten der ξ-freien Glieder in $F(x^0+\xi, y^0+\eta) = 0$; die Summe aller μ gleich dem kleinsten Exponenten der η-freien Glieder."*

Es würde genügen, den ersten Theil des Satzes zu zeigen, indem der zweite daraus durch Vertauschung von ξ und η folgt. Der Beweis wird aber vereinfacht, indem man sich den vollständigen Satz für die weniger als i-fachen Punkte $x^0 y^0$ gegeben denkt und denselben unter dieser Voraussetzung auf den i-fachen Punkt ausdehnt. — Dass der Satz für $i = 1$ gilt, ist unmittelbar klar; ebenso für $i = 2$. Denn, wenn die Bezeichnung (8) wieder gebraucht wird, so sind im letzteren Falle nur die Formen zu betrachten:

$$G(\xi, \eta) = \begin{cases} a_{20}\xi^2 + a_\eta \xi\eta + a_{02}\eta^2 + \cdots & = 0\,, \\ a_{20}\xi^2 + a_\eta \xi\eta + \cdots + a_{0r}\eta^r + \cdots & = 0\,, \\ a_{20}\xi^2 + \cdots + a_{0r}\eta^r + \cdots & = 0\,, \end{cases}$$

wo die Coefficienten a sämmtlich von 0 verschieden und η^r das niedrigste Glied mit η allein ist. Für die erste Gleichung ist der Satz unmittelbar klar, indem entweder zwei Zweige $\lambda = 1$, $\mu = 1$ oder einer $\lambda = 2$ $\mu = 2$ vorhanden sind. Die zweite und dritte Gleichung sind bereits ausführlich unter b) und c) der vorigen Nummer besprochen.

Nun sei $\xi = 0$ $\eta = 0$ ein i-facher Punkt von $G = 0$, so dass $r \geqq i$ sein muss. — Ist $r = i$, so ergiebt sich unter der gemachten Voraussetzung nach der Bemerkung in Nr. 11., dass nothwendig $\sum \lambda = i$, was zum Beweise hinreicht. Denn setzt man in $G(\xi, \eta) = 0$

$$\eta = (\eta_1{}^0 + z)\,\xi\,,$$

was hier stets gestattet ist, so hat die transformirte Curve in $\xi = 0$ $z = 0$ erst dann einen i-fachen Punkt, wenn η_2 i endliche Werthe erhält. Dann setzt man aber

$$\eta = \eta_1{}^0 \xi + \frac{\eta_2{}^0 + z}{2}\,\xi^2,$$

worauf derselbe Schluss u. s. f.

Ist aber $r > i$, so hat man

(a) $$G(\xi, \eta) \equiv \xi^g (a_{g,\,i-g}\eta^{i-g} + \cdots) + \cdots + \eta^r + \cdots = 0\,.$$

Für die den $i - g$ endlichen Werthen von $\frac{d\eta}{d\xi}$ entsprechenden Entwickelungen hat man nach Voraussetzung — man braucht nur $\eta = \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0 + \zeta\right]\xi$ zu setzen — $\sum \lambda = i - g$.

Man setze ferner $\xi = \eta u$, so folgt aus (a)

(b) $$u^g (a_{g,\, i-g} + \cdots) + \cdots + \eta^{r-i} + \cdots = 0;$$

mithin, so lange $g < i$ sicher für die Entwickelungen

(c) $$\begin{cases} u = \alpha \eta^{\frac{\sigma}{\varrho}} + \cdots, \\ \sum \varrho = g, \quad \sum \sigma = r - i. \end{cases}$$

Da nun

$$\xi = \alpha' \eta^{\frac{\sigma+\varrho}{\varrho}} + \cdots;$$

somit

$$\eta = \left(\frac{\xi}{\alpha'}\right)^{\frac{\varrho}{\sigma+\varrho}} + \cdots,$$

so kommt von hier

$$\sum \lambda = \sum \sigma + \sum \varrho = r - i + g,$$

so dass im Ganzen in der That $\sum \lambda = r$, q. e. d.

Dasselbe Resultat bleibt auch für $g = i$ noch richtig, so lange nicht $\frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \xi_2$ i endliche Werthe annimmt; denn nach Nr. 10. ist der Punkt $\eta = 0$ $u = 0$ in der Curve (b) noch immer nicht i-fach.

Sind aber i solche Werthe von ξ_2 vorhanden, so muss nach (22*) $r \geq 2i$ sein. Man setzt nun in (a)

(d) $$\xi = \frac{\xi_i^0 + u}{2} \cdot \eta^2,$$

wodurch sich nach (20) ergiebt:

(e) $$\Psi'_{2i}(\xi_2^0 + u) + \eta \Psi'_{2i+1}(\xi_2^0 + u) + \cdots = 0.$$

Hier sind die Ψ' in Bezug auf G, η, ξ, was die Φ' in Bezug auf F, x, y.

Nun sei ξ_2^0 eine nicht verschwindende e-fache Wurzel von

(f) $$\Psi'_{2i}(\xi_2^0) = 0;$$

dann folgt für die Entwickelungen (c)

$$\sum \varrho = e,$$

so lange nicht (wenn $e = i$ ist) ξ_3 i endliche Werthe erhält. Die Annahme $e = i$ *setzt voraus* $r = 2i$.

Wenn aber der erwähnte Fall eintreten sollte, so würde man setzen

$$\xi = \frac{\xi_2^0 \eta^2}{2} + \frac{(\xi_3^0 + u)\eta^3}{6},$$

worauf dann doch wieder geschlossen werden kann

$$\sum \varrho = i.$$

Somit ist *im Falle* $r = 2i$, wo kein Nullwerth unter den ξ_2^0 vorkommen kann, die Gesammtheit aller ϱ gleich $\sum e$ oder i. — Es ist aber jetzt nach (d)

$$\xi = \frac{\xi_2^0}{2}\eta^{\frac{2\varrho}{\varrho}} + \cdots,$$

folglich das entsprechende $\lambda = 2\varrho$, und $\sum\lambda = 2\sum\varrho = 2i$, wie behauptet ist.

Im Falle $r > 2i$ hat die Gleichung (f) auch die Wurzel 0, allgemein f-mal. Ist nun

(g) $$u = \alpha\eta^{\frac{\pi}{\nu}} + \cdots,$$

so folgt aus (e)

$$\sum\nu = f, \qquad \sum\pi = r - 2i;$$

denn wegen $\xi_1^0 = \xi_2^0 = 0$ ist

$$\Psi_i'(\xi_2^0) = [\eta^i].$$

Demnach ergiebt sich aus (d)

$$\xi = \frac{\alpha}{2}\eta^{\frac{2\nu+\pi}{\nu}} + \cdots,$$

somit ist die Zahl λ für den entsprechenden Zweig $2\nu + \pi$.

Sammelt man alle λ, so folgt

$$\sum\lambda = 2\sum e + \sum(2\nu + \pi) = 2\left(\sum e + f\right) + r - 2i = r.$$

Dieser Schluss ist so lange erlaubt, als nicht die Curve (e) einen i-fachen Punkt erhält. Dann aber muss ξ_3 i endliche Werthe erhalten, während ξ_2^0 i-mal Null ist. Und es ist offenbar, dass der vorstehende Schluss wiederholt werden kann, wenn man nur in $G = 0$

$$\xi = \frac{(\xi_3^0 + u)\eta^3}{6}$$

einführt u. s. f. Es ist somit allgemein erwiesen, dass $\sum\lambda = r$, wodurch der Satz vollständig gezeigt ist.

14. Die Zahlen λ, μ, welche nach Nr. 11. die Singularität *eines* Curvenzweiges bestimmen, stehen in unmittelbarem Zusammenhange mit den von Plücker (Theorie der algebr. Curven p. 205) eingeführten Zahlen: „Ordnung n und Classe m" einer Singularität (in der eben angedeuteten Beschränkung des Wortes)*). Es ist im Falle $\mu > \lambda$ — also wenn $y = 0$ die Tangente im singulären Punkte $x^0 = 0$ $y^0 = 0$ ist —

$$n = \lambda, \qquad m = \mu - \lambda.$$

*) Auf den Zusammenhang der Plücker'schen Zahlen mit den Zahlen λ, μ wurde ich durch Herrn Weierstrass aufmerksam gemacht.

Demnach ergiebt sich folgende Tafel:

n gerade, m gerade : Spitze 2. Art,
n gerade, m ungerade : Spitze 1. Art,
n ungerade, m gerade : Wendepunkt,
n ungerade, m ungerade : Zweig ohne augenfällige Singularität.

Betrachtet man nun eine Liniencurve

$$\Phi(u, v) = 0,$$

wo u, v ein lineares System von Liniencoordinaten bezeichnet, in welchem $u = 0$ $v = 0$ eine *endliche* Gerade sein soll, — so kann man für dieselbe die nämlichen Entwickelungen brauchen, die an $F(x, y) = 0$ vorgenommen sind. Man erhält somit in der Umgebung der Tangente 0, 0 stets Entwickelungen von der Form

$$u = t^{\varrho},$$
$$v = \gamma_0 t^{\sigma} + \gamma_1 t^{\sigma+1} + \cdots,$$

wo $\sigma > \varrho$ ist, wenn $v = 0$ der Berührungspunkt. Die Zahlen ϱ, $\sigma - \varrho$ wird man als Classe m' und als Ordnung n' der Singularität der Liniencurve bezeichnen. — *Der Gestalt nach* werden hier folgende Formen gefunden:

m' gerade, n' gerade, Spitze 2. Art,
m' gerade, n' ungerade, Wendepunkt,
m' ungerade, n' gerade, Spitze 1. Art (Rückkehrpunkt),
m' ungerade, n' ungerade, Zweig ohne Singularität.

Es entsteht aber die Frage, *ob die Singularitäten der zweiten Tafel mit den entsprechenden der ersten nicht bloss äusserlich, sondern auch nach ihrer analytischen Definition identisch sind.* Dieses wird dann der Fall sein, wenn die Singularität von $F = 0$

$$(25) \qquad \begin{cases} x = t^{\lambda}, \\ y = c_0 t^{\mu} + c_1 t^{\mu+1} + \cdots \end{cases}$$

$(\mu > \lambda)$ als solche der Gleichung von $F = 0$ in Liniencoordinaten betrachtet,

$$m' = m, \qquad n' = n$$

ergiebt. — Dieses lässt sich leicht zeigen:

Sind u, v die zu den Punktcoordinaten x, y reciproken Liniencoordinaten, so findet man für die Tangente in einem beliebigen Punkte xy von $F = 0$

$$u = \frac{\frac{dy}{dt}}{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}, \qquad v = \frac{-\frac{dx}{dt}}{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}.$$

Für $x = y = 0$ werden aber diese Ausdrücke unendlich. Es können also die Coordinaten u, v hier nicht gebraucht werden; vielmehr muss ein solches System von *linearen* Linien coordinaten eingeführt werden, dass die Tangente im Punkte $x = 0$ $y = 0$ die Coordinaten 0, 0 erhält. Dieses ist

$$u' = \frac{u}{v}, \qquad v' = \frac{1}{v};$$

somit

$$u' = -\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}, \qquad v' = \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) : \frac{dx}{dt}.$$

Setzt man hier die Werthe (25) ein, so folgt:

$$u' = -\frac{\mu c_0}{\lambda} t^{\mu-\lambda} + \cdots,$$

$$v' = \frac{\mu - \lambda}{\lambda} c_0 t^{\mu} + \cdots.$$

Demnach ist in der That

$$m' = \mu - \lambda = m, \qquad n' = \lambda = n.$$

Es ergiebt sich ferner, *dass in zwei reciproken Curven einer Singularität der Ordnung n und der Classe m eine solche von der Ordnung m und der Classe n entspricht.* Denn da $F = 0$ durch die Substitution

$$u = \frac{ax + by}{1 + a''x + b''y}, \qquad v = \frac{b'y}{1 + a''x + b''y}$$

in die reciproke Curve transformirt wird, so folgt unmittelbar

$$m' = \lambda = n, \qquad n' = \mu - \lambda = m.$$

Zum Schlusse möge noch bemerkt sein, dass der Singularität (25) eine verschwindende, endliche oder unendlichgrosse Krümmung in $x = 0$ $y = 0$ entspricht, je nachdem n kleiner, gleich oder grösser als m. Denn es ist offenbar

$$y_2 = \frac{\mu(\mu - \lambda)}{\lambda^2} c_0 t^{m-n} + \cdots.$$

15. Cayley hat gezeigt (Quart. J. VII, p. 212 ff.), dass jede Singularität äquivalent sei einer bestimmten (ganzen) Zahl von Doppelpunkten, Rückkehrpunkten, Doppeltangenten und Wendetangenten. Bei Ermittelung dieser Zahlen, welche bezüglich mit δ', $\varkappa'$, τ', ι' bezeichnet werden mögen, wird auch die in der letzten Nummer gegebene Entwickelung gebraucht, welche von Cayley in etwas anderer Form ausgeführt wurde.

Die von Cayley für die genannten Zahlen angegebenen Werthe sind richtig; doch ist sein Beweis, wie er selbst bemerkt, nicht ganz vollständig. Man könnte denselben, in folgender Art ergänzen, wobei

es genügen wird, den Fall einer einfachen Singularität im Punkte $x=0$ $y=0$ zu betrachten, d. i. *einen* λ-fachen Zweig

$$y = c_1 x^{\frac{\mu}{\lambda}} + c_2 x^{\frac{\mu+1}{\lambda}} + \cdots . \tag{a}$$

Es ist ferner nur erforderlich, die Werthe δ', $\varkappa'$ abzuleiten, indem die beiden andern sich durch den eben erwähnten Uebergang zu Liniencoordinaten ergeben.

Die ganzen Zahlen δ', $\varkappa'$ sind definirt durch die Gleichungen

$$2\delta' + 3\varkappa' = M, \qquad \delta' + \varkappa' = \mathfrak{r}, \tag{b}$$

wo M, $\mathfrak{r}$ die Reductionen bedeuten, welche die Classe und das Geschlecht der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung durch die gegebene Singularität erfahren.

Cayley giebt an, wie M gefunden werden kann. Man leite aus (a) dadurch, dass man $x^{\frac{1}{\lambda}}$ durch seine λ conjugirten Werthe ersetzt, die partiellen Entwickelungen

$$y_1, y_2 \cdots y_\lambda$$

ab und bilde $y_r - y_s$, indem man r, s alle Werthe $1, 2 \cdots \lambda$ durchlaufen lässt. Dann ist M die Summe der niedrigsten Exponenten von x in allen Grössen $y_r - y_s$.

Man sieht, M ist genau die Multiplicität des Factors x in der Discriminante der algebraischen Function y.

Nun ist nach einem Satze von Kronecker, welchen ich seinen Vorträgen über Algebra im W. S. 1870/1 entnehme,

$$M = 2\mathfrak{r} + \mathfrak{w},$$

wo die Zahl $\mathfrak{w}$ angiebt, wie oft der Factor x in der Discriminante von y „wesentlich“ sei. In unserem Falle ist $\mathfrak{w} = \lambda - 1$; somit folgt aus (b)

$$\varkappa' = M - 2\mathfrak{r} = \lambda - 1 .$$

Diesen Werth hat $\varkappa'$ auch bei Cayley; jedoch fehlt der allgemeine Beweis dafür (vgl. a. a. O. p. 220).

Innsbruck, 16. Mai 1874.

Ueber binäre Formen, welche Polaren einer Form sind.

Von Dr. Ph. Wiederhold zu Worms.

Clebsch hat nachgewiesen, dass zwei binäre cubische Formen Polaren einer biquadratischen Form sind*); ich habe mir, angeregt durch die Vorträge des Herrn Professor Gordan über „Neuere Algebra", die allgemeinere Aufgabe gestellt, zu untersuchen, unter welcher Bedingung die beiden Formen n^{ten} Grades:

$$a_x^n = a_x'^n = a_x''^n \text{ und } b_x^n = b_x'^n = b_x''^n$$

Polaren einer Form $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$F = A_x^{n+1}$$

sind.

§ 1.

Sind a_x^n und b_x^n die mit den Grössen y und z gebildeten Polaren von F, d. h.

$$A_x^n A_y = a_x^n, \quad A_x^n A_z = b_x^n, \tag{1}$$

so ergiebt sich die Bedingungsgleichung:

$$a_x^{n-1} a_z = b_x^{n-1} b_y, \tag{2}$$

welche für x eine Identität ist, während y und z darin constante, später noch zu berechnende Grössen sind.

In Betreff dieser Gleichung (2) kann man beweisen, dass dieselbe nicht nur eine nothwendige, sondern auch hinreichende Bedingung dafür ist, dass a_x^n und b_x^n Polaren einer Form sind, und es lässt sich zugleich der Ausdruck der Form F herstellen.

Nämlich aus den Gleichungen (1) lässt sich folgende combiniren:

$$A_x^n A_y (xz) - A_x^n A_z (xy) = a_x^n (xz) - b_x^n (xy),$$

*) Vgl. Clebsch, Theorie der bin. algebr. Formen S. 395.

welche mit Anwendung einer bekannten Identität auch so geschrieben werden kann:

$$A_x^{n+1}(yz) = a_x^n(xz) - b_x^n(xy)\,. \tag{3}$$

Die Polare der Form (3) mit der Grösse y lautet:

$$A_x^n A_y = \frac{n \cdot a_x^{n-1} a_y(xz) + a_x^n(yz) - n b_x^{n-1} b_y(xy)}{(n+1)\cdot(yz)}\,,$$

oder mit Anwendung der Bedingungsgleichung (2):

$$A_x^n A_y = \frac{n \cdot a_x^{n-1}\{a_y(xz) - a_z(xy)\} + a_x^n(yz)}{(n+1)\cdot(yz)}\,,$$

oder mit Hülfe jener Identität:

$$A_x^n A_y = \frac{n \cdot a_x^{n-1} a_x(yz) + a_x^n(yz)}{(n+1)\cdot(yz)} = a_x^n\,.$$

Mithin ist die Behauptung für a_x^n bewiesen; auf gleiche Weise lässt sie sich für b_x^n beweisen.

§ 2.

Ich will jetzt dazu übergehen, die Constanten y und z, welche die Gleichungen (1) befriedigen sollen, aus der Gleichung (2) zu berechnen und alsdann in den Ausdruck für F einzutragen. Die Gleichung (2):

$$a_x^{n-1}(a_1 z_1 + a_2 z_2) - b_x^{n-1}(b_1 y_1 + b_2 y_2) = 0 \tag{2a}$$

liefert hierzu n Gleichungen; ich erhalte deren 3, wenn ich die zweiten partiellen Differentialquotienten nach x_1 und x_2 von der Identität (2a) zu Hülfe nehme. Dieselben lauten:

$$\begin{cases} a_x^{n-3} a_1^3 z_1 + a_x^{n-3} a_1^2 a_2 z_2 - b_x^{n-3} b_1^3 y_1 - b_x^{n-3} b_1^2 b_2 y_2 = 0\,, \\ a_x^{n-3} a_1^2 a_2 z_1 + a_x^{n-3} a_1 a_2^2 z_2 - b_x^{n-3} b_1^2 b_2 y_1 - b_x^{n-3} b_1 b_2^2 y_2 = 0\,, \\ a_x^{n-3} a_1 a_2^2 z_1 + a_x^{n-3} a_2^3 z_2 - b_x^{n-3} b_1 b_2^2 y_1 - b_x^{n-3} b_2^3 y_2 = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Diese Gleichungen sagen dasselbe aus, wie die obige Bedingungsgleichung (2), denn ich erhalte dieselbe aus ihnen, wenn ich sie der Reihe nach mit x_1^2, $2\,x_1 x_2$, x_2^2 multiplicire und alsdann addire.

Aus den Gleichungen (4) lassen sich die Grössen y_1, y_2, z_1, z_2, resp. deren Verhältnisse berechnen; es kommt nämlich, wenn ich für x einen beliebigen Werth ξ annehme, unter Zuhülfenahme eines willkührlichen Factors $\frac{\varrho}{2}$:

$$\varrho z_1 = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_\xi^{n-3} a_1^2 a_2 & - b_\xi^{n-3} b_1^3 & - b'^{n-3}_\xi b_1'^2 b_2' \\ a_\xi^{n-3} a_1 a_2^2 & - b_\xi^{n-3} b_1^2 b_2 & - b'^{n-3}_\xi b_1' b_2'^2 \\ a_\xi^{n-3} a_2^3 & - b_\xi^{n-3} b_1 b_2^2 & - b'^{n-3}_\xi b_2'^3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot a_\xi^{n-3} b_\xi^{n-3} b'^{n-3}_\xi a_2 b_1 b_2' \begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & b_1'^2 \\ a_1 a_2 & b_1 b_2 & b_1' b_2' \\ a_2^2 & b_2^2 & b_2'^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot a_\xi^{n-3} b_\xi^{n-3} b'^{n-3}_\xi a_2 b_1 b_2' \, (ab)\,(ab')\,(bb')$$

$$= -2 \cdot a_\xi^{n-3} b_\xi^{n-3} b'^{n-3}_\xi a_2 b_1 b_2 \, (ab)\,(ab')\,(bb')$$

$$= a_\xi^{n-3} b_\xi^{n-3} b'^{n-3}_\xi (ab)\,(ab')\,(bb')^2 a_2 .$$

Analog lassen sich die Grössen ϱz_2, ϱy_1, ϱy_2 berechnen, deren Werthe ich in folgenden linearen Functionen zusammenfassen will:

$$\varrho(xy) = a_\xi^{n-3} a'^{n-3}_\xi b_\xi^{n-3} (aa')^2 \,(ab)\,(a'b)\, b_x ,$$

$$\varrho(xz) = -a_\xi^{n-3} b_\xi^{n-3} b'^{n-3}_\xi (ab)\,(ab')\,(bb')^2 a_x .$$

Ich kann jetzt die Form A_x^{n+1} selbst aus (3) berechnen; dieselbe wird:

(5) $$\varrho(yz) A_x^{n+1} =$$

$$= -a_\xi^{n-3} b_\xi^{n-3} (ab) \left\{ b'^{n-3}_\xi a_x a'^n_x (ab')(bb')^2 + a'^{n-3}_\xi b_x b'^n_x (aa')^2 (a'b) \right\}.$$

Somit ist also auch F gefunden, von welcher Form a_x^n und b_x^n Polaren sind, wenn die Bedingung (2) erfüllt ist.

§ 3.

Es soll nun die, von den Grössen y und z freie, nothwendige und hinreichende Bedingung gefunden werden, welche für $n \geqq 4$ zwischen den Coefficienten der Formen a_x^n und b_x^n bestehen muss, wenn sie Polaren einer Form sein sollen.

Zu dem Ende bilde ich die dritten partiellen Differentialquotienten nach x_1 und x_2 von der Bedingungsgleichung (2^a), wodurch ich folgende 4 Gleichungen für y_1, y_2, z_1, z_2 erhalte:

$$a_x^{n-4} a_1^4 z_1 + a_x^{n-4} a_1^3 a_2 z_2 - b_x^{n-4} b_1^4 y_1 - b_x^{n-4} b_1^3 b_2 y_2 = 0 ,$$

$$a_x^{n-4} a_1^3 a_2 z_1 + a_x^{n-4} a_1^2 a_2^2 z_2 - b_x^{n-4} b_1^3 b_2 y_1 - b_x^{n-4} b_1^2 b_2^2 y_2 = 0 ,$$

$$a_x^{n-4} a_1^2 a_2^2 z_1 + a_x^{n-4} a_1 a_2^3 z_2 - b_x^{n-4} b_1^2 b_2^2 y_1 - b_x^{n-4} b_1 b_2^3 y_2 = 0 ,$$

$$a_x^{n-4} a_1 a_2^3 z_1 + a_x^{n-4} a_2^4 z_2 - b_x^{n-4} b_1 b_2^3 y_1 - b_x^{n-4} b_2^4 y_2 = 0 .$$

Dieses Gleichungssystem kann nur dann zusammen bestehen, wenn die Determinante desselben verschwindet. Dieselbe lautet:

$$3)\quad R = a_x^{n-4} a_x'^{n-4} b_x^{n-4} b_x'^{n-4} a_1 a_2' b_1 b_2' \begin{vmatrix} a_1^3 & a_1'^3 & b_1^3 & b_1'^3 \\ a_1^2 a_2 & a_1'^2 a_2' & b_1^2 b_2 & b_1'^2 b_2' \\ a_1 a_2^2 & a_1' a_2'^2 & b_1 b_2^2 & b_1' b_2'^2 \\ a_2^3 & a_2'^3 & b_2^3 & b_2'^3 \end{vmatrix}$$

$$= a_x^{n-4} a_x'^{n-4} b_x^{n-4} b_x'^{n-4} a_1 a_2' b_1 b_2' (aa')(ab)(ab')(a'b)(a'b')(bb')$$

$$= -a_x^{n-4} a_x'^{n-4} b_x^{n-4} b_x'^{n-4} a_1' a_2 b_1 b_2' (aa')(ab)(ab')(a'b)(a'b')(bb')$$

$$= \tfrac{1}{2} a_x^{n-4} a_x'^{n-4} b_x^{n-4} b_x'^{n-4} b_1 b_2' (aa')^2 (ab)(ab')(a'b)(a'b')(bb')$$

$$= -\tfrac{1}{2} a_x^{n-4} a_x'^{n-4} b_x^{n-4} b_x'^{n-4} b_1' b_2 (aa')^2 (ab)(ab')(a'b)(a'b')(bb')$$

$$= \tfrac{1}{4} a_x^{n-4} a_x'^{n-4} b_x^{n-4} b_x'^{n-4} (aa')^2 (ab)(ab')(a'b)(a'b')(bb')^2.$$

Das Verschwinden dieser Covariante ist also eine nothwendige Bedingung dafür, dass a_x^n und b_x^n Polaren einer Form sind.

§ 4.

Um zu zeigen, dass $R = 0$ auch eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass a_x^n und b_x^n Polaren einer Form sind, kehre ich wieder zur Bedingungsgleichung (2^a) zurück und schreibe dieselbe in verallgemeinerter Form folgendermassen:

$$(2^b) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

worin die λ gewisse Constanten und die f gewisse Formen $(n-1)^{ten}$ Grades, etwa:

$$f_1 = \alpha_x^{n-1}, \quad f_2 = \beta_x^{n-1}, \quad f_3 = \gamma_x^{n-1}, \quad f_4 = \delta_x^{n-1}, \quad (n \geq 4)$$

bedeuten. Alsdann wird die in (6) dargestellte Determinante nach einem bekannten Determinantensatze, wenn ich noch $x_1 = 1$ und $x_2 = x$ setze und mit x^6 multiplicire, folgende Gestalt annehmen:

$$\cdot x^6 = \begin{vmatrix} 1 & (n-4)x & \binom{n-4}{2}x^2 & \binom{n-4}{3}x^3 \cdots & x^{n-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & (n-4)x^2 & \binom{n-4}{2}x^3 \cdots & (n-4)x^{n-4} & x^{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & (n-4)x^3 \cdots & \binom{n-4}{2}x^{n-4} & (n-4)x^{n-3} & x^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \cdots & \binom{n-4}{3}x^{n-4} & \binom{n-4}{2}x^{n-3} & (n-4)x^{n-2} & x^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \delta_0 & \delta_1 & \cdots & \delta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Führt man also unter der Festsetzung $i < k < l < m$ die Bezeichnung:

$$(i\,k\,l\,m) = \sum_{[i,k,l,m=0,1\ldots,n-1]} \pm \alpha_i \beta_k \gamma_l \delta_m = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k & \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_k & \beta_l & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_k & \gamma_l & \gamma_m \\ \delta_i & \delta_k & \delta_l & \delta_m \end{vmatrix}$$

ein, so erhält man:

$$(7) \qquad R = \sum_{\sigma=0}^{\sigma=4n-16} C_\sigma x^\sigma$$

und zwar ist:

$$C_\sigma = \sum_{i,k,l,m} A\,(iklm)\,, \quad i+k+l+m = \sigma+6\,,$$

wo die A numerische und von Null verschiedene Factoren, wie man aus der Berechnung derselben erkennt, bedeuten und die Summe sich über alle Zerlegungen von $\sigma + 6$ erstreckt.

Da R identisch verschwinden soll, so folgt aus (7):

$$(8) \qquad C_\sigma = 0 \text{ für } \sigma = 0,\ 1,\ 2 \cdots (4n-16)\,.$$

Es handelt sich nun um den Beweis, dass aus dem Systeme (8) die Möglichkeit des Zusammenbestehens der n Gleichungen:

$$(9) \qquad \lambda_1 \alpha_\nu + \lambda_2 \beta_\nu + \lambda_3 \gamma_\nu + \lambda_4 \delta_\nu = 0\,, \quad \nu = 0,\ 1 \cdots (n-1)$$

folgt, aus welchen sich alsdann die Identität (2^b) ergiebt.

Ich kann annehmen, die $(q+1)^{te}$ Gleichung des Systems (9) sei die erste, welche nicht identisch verschwindet, also eine Bedingung für die λ liefert, ferner die $(r+1)^{te}$ Gleichung die erste, welche eine neue Bedingung für die λ liefert, und endlich die $(s+1)^{te}$ die erste, welche im Verein mit den s vorhergehenden die Verhältnisse der λ völlig bestimmt.

Es ist dann:

$$(10) \qquad (i\,k\,l\,m) = 0\,,$$

sobald nicht gleichzeitig

$$i \geqq q\,, \quad k \geqq r\,, \quad l \geqq s\,.$$

Es bleibt dann nur zu beweisen, dass das Werthsystem λ, welches die 3 von einander unabhängigen Gleichungen q, r, s liefern, auch die folgenden $n-s-1$ Gleichungen des Systems (9) befriedigt, dass also:

$$(q\ r\ s\ s+\varrho) = 0\,, \quad \varrho = 1, 2 \cdots (n-s-1)\,.$$

Ich kann aber zu diesem Zwecke, sobald:

$$(11) \qquad (q\ r\ s\ s+\tau) = 0 \text{ für } \tau = 0, 1 \cdots \varrho$$

ist, beweisen, dass alsdann auch:

$$(q\,r\,s\;\; s+\varrho+1)=0\,.$$

Zu dem Ende folgere ich zunächst aus (10) und (11):

$$(i\,k\,l\,m)=0\,, \tag{12}$$

wenn nicht zugleich

$$i\geqq q\,,\quad k\geqq r\,,\quad l\geqq s\,,\quad m\geqq s+\varrho+1\,,$$

und wähle nun aus dem Systeme (8) diejenige Gleichung aus, in welcher:

$$q+r+2s+\varrho+1=\sigma+6\,,$$

d. i. die Gleichung:

$$C_{q+r+2s+\varrho-5}=\sum A(iklm)=0,\quad i+k+l+m=q+r+2s+\varrho+1\,.$$

Hierin sind aber nach (10), (11) und (12) alle Determinanten ausser $(q\,r\,s\;\; s+\varrho+1)$ Nullen, folglich muss auch sein:

$$(q\,r\,s\;\; s+\varrho+1)=0\,.$$

Nun gilt (11) für $\varrho=0$, also auch für $\varrho=1\cdots n-s-1$, w. z. b. w.

§ 5.

Weiter lässt sich beweisen, dass, wenn eine Form a_x^n und b_x^n zu Polaren hat, dann auch jede lineare Combination von a_x^n und b_x^n Polare derselben ist, so z. B.

$$\lambda_1 a_x^n \text{ und } \lambda_2 b_x^n=c_x^n,\quad \mu_1 a_x^n+\mu_2 b_x^n=d_x^n\,.$$

Da man η und ξ so bestimmen kann, dass:

$$\lambda_1=(\eta z)\,,\quad \lambda_2=-(\eta y)\,,\quad \mu_1=(\xi z)\,,\quad \mu_2=-(\xi y)\,,$$

so folgt aus den Gleichungen (1):

$$A_x^n A_\eta(yz)=a_x^n(\eta z)-b_x^n(\eta y)=c_x^n\,,$$

$$A_x^n A_\xi(yz)=a_x^n(\xi z)-b_x^n(\xi y)=d_x^n\,.$$

Also sind in der That c_x^n und d_x^n Polaren derselben Form, von der es a_x^n und b_x^n sind.

Da hiernach, wenn a_x^n und b_x^n Polaren einer Form sind, dasselbe auch für 2 beliebige lineare Combinationen c_x^n und d_x^n gilt, so muss die in (6) dargestellte Covariante eine Combinante*) der Formen a_x^n und b_x^n sein, was in der Folge noch besonders mit Anwendung des bekannten Kriteriums bewiesen werden soll.

*) Vgl. Gordan: „Ueber Combinanten", Mathem. Annalen V, S. 95.

Das Kriterium dafür, dass R eine Combinante ist, lautet:

$$\delta R = \sum b_i \frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 .$$

Bilde ich nun δR*), so kommt:

$$\delta R = \begin{vmatrix} b_x''^{n-4} b_1''^4 & a_x'^{n-4} a_1'^3 a_2' & b_x^{n-4} b_1^4 & b_x'^{n-4} b_1'^3 b_2' \\ b_x''^{n-4} b_1''^3 b_2'' & a_x'^{n-4} a_1'^2 a_2'^2 & b_x^{n-4} b_1^3 b_2 & b_x'^{n-4} b_1'^2 b_2'^2 \\ b_x''^{n-4} b_1''^2 b_2''^2 & a_x'^{n-4} a_1' a_2'^3 & b_x^{n-4} b_1^2 b_2^2 & b_x'^{n-4} b_1' b_2'^3 \\ b_x''^{n-4} b_1'' b_2''^3 & a_x'^{n-4} a_2'^4 & b_x^{n-4} b_1 b_2^3 & b_x'^{n-4} b_2'^4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_x^{n-4} a_1^4 & b_x''^{n-4} b_1''^3 b_2'' & b_x^{n-4} b_1^4 & b_x'^{n-4} b_1'^3 b_2' \\ a_x^{n-4} a_1^3 a_2 & b_x''^{n-4} b_1''^2 b_2''^2 & b_x^{n-4} b_1^3 b_2 & b_x'^{n-4} b_1'^2 b_2'^2 \\ a_x^{n-4} a_1^2 a_2^2 & b_x''^{n-4} b_1'' b_2''^3 & b_x^{n-4} b_1^2 b_2^2 & b_x'^{n-4} b_1' b_2'^3 \\ a_x^{n-4} a_1 a_2^3 & b_x''^{n-4} b_2''^4 & b_x^{n-4} b_1 b_2^3 & b_x'^{n-4} b_2'^4 \end{vmatrix} = 0,$$

R ist also eine Combinante.

Da nun ferner R eine simultane Covariante zweiten Grades in den Coefficienten a und b ist, so hat die analoge Covariante R', gebildet für die Formen c_x^n und d_x^n, den Werth:

$$R' = R \cdot (\lambda\mu)^2.$$

§ 6.

Es mögen noch zur Erläuterung als Beispiele die Formen vom ersten bis fünften Grade folgen:

I. Die beiden Formen a_x und b_x sind Polaren einer quadratischen Form, wenn:

$$a_z - b_y = a_1 z_1 + a_2 z_2 - b_1 y_1 - b_2 y_2 = 0.$$

Hierdurch werden die Verhältnisse der Grössen z_1, z_2, y_1, y_2 nur so weit bestimmt, dass es eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Formen zweiten Grades giebt, welche a_x und b_x zu Polaren haben, d. h. jede quadratische Form hat im Allgemeinen die Polaren a_x und b_x.

Ist z. B. die quadratische Form r_x^2 gegeben, so kann ich:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= -(ar) r_2 , & \Delta z_1 &= -(br) r_2 , \\ \Delta y_2 &= (ar) r_1 , & \Delta z_2 &= (br) r_1 , \end{aligned} \qquad (2\Delta = (rr')^2)$$

berechnen und alsdann ist:

$$r_x r_y = a_x , \quad r_x r_z = b_x .$$

*) Vgl. Clebsch, Theorie der bin. algebr. Formen S. 120 und 121.

II. Die beiden Formen a_x^2 und b_x^2 sind Polaren einer cubischen Form, wenn:

$$a_x a_z - b_x b_y = 0$$

oder:

$$a_1 a_s - b_1 b_y = 0\,, \quad a_2 a_s - b_2 b_y = 0\,. \tag{13}$$

Hierdurch werden die Verhältnisse der z_1, z_2, y_1, y_2 nur so weit bestimmt, dass es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von cubischen Formen giebt, von denen a_x^2 und b_x^2 Polaren sind.

Habe ich nun 2 Grössengruppen: $\eta'\zeta'$ und $\eta''\zeta''$, welche die Gleichungen (13) erfüllen und 2 cubische Formen: φ_x^3 und ψ_x^3 derart, dass:

$$\varphi_x^2 \varphi_{\eta'} = a_x^2\,, \quad \psi_x^2 \psi_{\eta''} = a_x^2\,,$$
$$\varphi_x^2 \varphi_{\zeta} = b_x^2\,, \quad \psi_x^2 \psi_{\zeta''} = b_x^2\,,$$

so sind dann auch a_x^2 und b_x^2 Polaren der allgemeinen Form:

$$\vartheta_x^3 = \lambda \varphi_x^3 + \mu \psi_x^3$$

und zwar in Bezug auf die Constanten:

$$y = \lambda\eta' + \mu\eta''\,, \quad z = \lambda\zeta' + \mu\zeta''.$$

III. a_x^3 und b_x^3 sind Polaren einer biquadratischen Form, wenn:

$$a_x^2 a_s - b_x^2 b_y = 0\,,$$

oder:

$$\begin{aligned}
a_1^3 z_1 \;&+ a_1^2 a_2 z_2 \;- b_1^3 y_1 \;- b_1^2 b_2 y_2 &&= 0\,,\\
a_1^2 a_2 z_1 \;&+ a_1 a_2^2 z_2 \;- b_1^2 b_2 y_1 \;- b_1 b_2^2 y_2 &&= 0\,,\\
a_1 a_2^2 z_1 \;&+ a_2^3 z_2 \;- b_1 b_2^2 y_1 \;- b_2^3 y_2 &&= 0\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\varrho(xy) = (aa')^2\,(ab)\,(a'b)\,b_x\,,$$
$$\varrho(xz) = -\,(ab)\,(ab')\,(bb')^2\,a_x\,,$$
$$\varrho(yz) = (aa')^2\,(ab)^3\,(ab')\,(a'b)\,(bb')^2\,.$$

Mithin lassen sich auch noch für $n = 3$, ohne dass eine Bedingung: $R = 0$ zwischen den Coefficienten a und b existirt, immer solche y und z finden, welche die beiden Formen a_x^3 und b_x^3 zu Polaren einer biquadratischen Form:

$$\frac{1}{\varrho} F = -\,\frac{a_x'^3\, a_x\,(ab)\,(ab')\,(bb')^2 + b_x'^3\, b_x\,(aa')^2\,(ab)\,(a'b)}{(aa')^2\,(ab)^3\,(ab')\,(a'b)\,(bb')^2}$$

machen, die für $\varrho = 16\,\Omega^4$ mit der von Clebsch*) angegebenen:

$$F = -\,8\,\Omega^3\,(f\pi + \varphi p)$$

übereinstimmt, wo:

*) Vgl. Clebsch, Theorie der bin. algebr. Formen S. 395.

$$f = a_x^3\,, \qquad \varphi = b_x^3\,,$$
$$p = (aa')^2\,(ab)\,(a'b)b_x\,, \quad \pi = (ab)\,(ab')\,(bb')^2 a_x\,,$$
$$2\,\Omega = -\,(p\pi) = (aa')^2\,(ab)^3\,(ab')\,(a'b)\,(bb')^2\,.$$

IV. Sollen die Formen a_x^4 und b_x^4 Polaren einer Form fünften Grades F sein, so hat man:

$$R = \tfrac{1}{4}\,(aa')^2\,(ab)\,(a'b)\,(a'b')\,(bb')^2 = 0$$

und es ist alsdann:

$$\varrho\,(yz)F = -\,a_\xi b_\xi\,(ab)\,\{b_\xi' a_x'^4\,a_x\,(ab')\,(bb')^2 + a_\xi' b_x'^4\,b_x\,(aa')^2\,(a'b\}\,.$$

V. Die Formen a_x^5 und b_x^5 sind Polaren einer Form sechsten Grades:

$$\varrho\,(yz)F = -\,a_\xi^2 b_\xi^2\,(ab)\,\{b_\xi'^2 a_x'^5 a_x\,(ab')\,(bb')^2 + a_\xi'^2 b_x'^5\,b_x\,(aa')^2\,(a'b)\}\,,$$

wenn die Covariante vierten Grades:

$$R = \tfrac{1}{4}\,a_x a_x'\,b_x b_x'\,(aa')^2\,(ab)\,(ab')\,(a'b)\,(a'b')\,(bb')^2$$

identisch verschwindet.

Giessen, Februar 1874.

Bestimmte Integrale mit Cylinderfunctionen*).

Von Hermann Hankel †.

Auf den folgenden Seiten behandle ich eine Reihe von meist neuen bestimmten Integralen, in denen Cylinderfunctionen (Bessel'sche Functionen) erster und zweiter Art, $J^n(x)$ und $Y^n(x)$ erscheinen, und die sich mir bei Beschäftigung mit diesen Functionen als brauchbar oder unentbehrlich erwiesen haben.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Die Cylinderfunctionen $J^n(x)$ und $J^{-n}(x)$ sind die Integrale der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{1}$$

für ein beliebiges reelles oder complexes n. Diese Functionen *erster* Art werden durch die immer convergente Reihe

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+n+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p \tag{2}$$

definirt.

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so wird $J^n(0) = 0$ und es verhält sich $J^n(x)$ stetig und eindeutig in der ganzen Ebene der complexen x. Es zeigt sich ferner, dass dann

$$J^{+n}(x) = (-1)^n J^{-n}(x)\,, \tag{3}$$

und es tritt jetzt an Stelle der zwei particulären Lösungen $J^n(x)$ und $J^{-n}(x)$ jener Differentialgleichung, neben $J^n(x)$ die *Cylinderfunction zweiter* Art $Y^n(x)$, welche ich in einer früheren Abhandlung**) durch den Grenzwerth, dem, wenn n eine ganze Zahl wird, der Quotient

---

*) Diese Abhandlung, wie auch die folgende, sind der Redaction der Annalen übergeben worden aus dem Nachlass des der Wissenschaft leider so früh entrissenen verdienstvollen Mathematikers. Aus der Unterschrift der letztern erkennt man, aus welcher Zeit dieselben herrühren.

**) S. diese Annalen Bd. I, p. 471.

$$(4) \qquad Y^n(x) = 2\pi e^{n\pi i} \frac{\cos n\pi \cdot J^n(x) - J^{-n}(x)}{\sin 2n\pi}$$

zustrebt, und durch die Reihe:

$$(5) \quad Y^n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$
$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+n+1)\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \left\{2\log\frac{x}{2} - \psi(p+1) - \psi(p+n+1)\right.$$

dargestellt habe. Es ist hierin unter $\log x$ der reelle Logarithmus für reelle positive x zu verstehen und somit $\log x$ für jeden Punkt der Ebene der complexen x bestimmt, wenn die Art und Weise angegeben ist, wie man zu diesem Punkte gelangen soll. So würde für negative x $\log x$ einen imaginären Theil $\mp \pi i$ haben, je nachdem man oberhalb oder unterhalb $x = 0$ von der positiven reellen Axe zu der negativen übergegangen ist. Im ersten Falle wird also, da der Factor von $2 \log x$ in $Y^n(x)$ nichts anderes als $J^n(x)$ ist, die Relation:

$$(6) \qquad (-1)^n Y^n(-x) = Y^n(+x) + 2\pi i J^n(+x)$$

gefunden. Die Definition von $Y^n(x)$ durch (4) behält, wie man sieht, ihre Bedeutung auch für irgendwelche complexe n und ich werde zuweilen mich auch dieses $Y^n(x)$ für beliebige n bedienen.

Um den Beweisgang der folgenden §§ nicht zu unterbrechen, stelle ich hier alle Sätze aus der Theorie der Cylinderfunctionen zusammen, von denen wir Gebrauch zu machen haben werden.

Es ist bereits früher von mir nachgewiesen*), dass der asymptotische Werth von $J^n(x)$ für ein unendlich wachsendes x mit positivem reellen Theile:

$$(7) \qquad J^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

und für complexe x mit negativem reellen Theile:

$$(8) \qquad J^n(x) = e^{n\pi i} \sqrt{\frac{2}{-\pi x}} \cos\left[x + \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right].$$

Ferner ist dort gezeigt, dass für ganze n der asymptotische Werth von:

$$(9) \qquad Y^n(x) \mp \pi i J^n(x) = e^{\mp \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2})i} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{\pm xi}$$

ist, innerhalb der complexen Ebene, wenn diese in der imaginären positiven Axe zerschnitten gedacht wird.

Es tritt hier eine Analogie zwischen den Kreisfunctionen $\cos x$, $\sin x$ als Lösung der Differentialgleichung

*) A. a. O. S. 494 und 500.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$$

mit den Cylinderfunctionen $J^n(x)$, $Y^n(x)$ hervor, welche als hodogetisches Princip in der Theorie letzterer sich als sehr ausgiebig erweist. Die lineare Verbindung $Y^n(x) - \pi i J^n(x)$ kann als entsprechend $\cos x + i \sin x = e^{xi}$ angesehen werden. Uebrigens ist direct:

$$J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

In vielen Fällen hat man indess auch $J^n(\sqrt{x})$, $Y^n(\sqrt{x})$ als den Kreisfunctionen $\cos x$, $\sin x$ entsprechend anzusehen.

Wir werden im Folgenden einige Recursionsformeln zwischen den Cylinderfunctionen und ihren Derivirten gebrauchen, welche zwar für die J längst bekannt und auch für die Y schon aufgestellt sind, doch aber, wie mir scheint, durch folgende Ableitung erst in ihr rechtes Licht gesetzt werden.

Die Differentialgleichung (1) lässt sich, falls man y mit Q_n bezeichnet, in die Formen

$$\frac{\partial x^{2n+1} \frac{\partial x^{-n} Q_n}{\partial x}}{\partial x} = -x^{n+1} Q_n, \qquad \frac{\partial x^{-2n+1} \frac{\partial x^n Q_n}{\partial x}}{\partial x} = -x^{-n+1} Q_n$$

setzen. Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$Q_n = A_n J^n(x) + B_n J^{-n}(x).$$

Führt man nun $x^{-n} Q_n = R_n$ als neue abhängige, und $z = x^2$ als neue unabhängige Veränderliche ein, so verwandeln sich diese Formeln in:

$$(10) \quad \frac{\partial z^{n+1} \frac{\partial R_n}{\partial z}}{\partial z} = -\tfrac{1}{4} z^n R_n, \qquad (11) \quad \frac{\partial z^{-n+1} \frac{\partial z^n R_n}{\partial z}}{\partial z} = -\tfrac{1}{4} R_n,$$

wo

$$R_n = z^{-\frac{n}{2}} \left\{ A_n J^n(\sqrt{z}) + B_n J^{-n}(\sqrt{z}) \right\}.$$

Differentiirt man nun (10), nachdem man mit z^n dividirt hat, so findet man

$$\frac{\partial z^{-n} \frac{\partial z^{n+1} \frac{\partial R_n}{\partial z}}{\partial z}}{\partial z} = -\tfrac{1}{4} \frac{\partial R_n}{\partial z},$$

und wenn man dies mit der aus (11) hervorgehenden Gleichung:

$$\frac{\partial z^{-n}\dfrac{\partial z^{n+1}R_{n+1}}{\partial z}}{\partial z} = -\tfrac{1}{4}R_{n+1}$$

vergleicht, so sieht man, dass:

$$\frac{\partial R_n}{\partial z} = R_{n+1},$$

jedoch in der Weise, dass, wenn A_n, B_n bestimmte, gegebene Constanten sind:

$$(12)\quad \frac{\partial}{\partial z}\cdot z^{-\frac{n}{2}}\left\{A_nJ^n(\sqrt{z})+B_nJ^{-n}(\sqrt{z})\right\} = z^{-\frac{n+1}{2}}\left\{AJ^{n+1}(\sqrt{z})+BJ^{-(n+1)}(\sqrt{z})\right\}$$

gesetzt werden muss, wo A und B noch zu bestimmende Constanten sind. Um dieselben zu bestimmen, bemerken wir, dass auf die einfachste Weise aus der Reihenentwickelung von $J^n(\sqrt{z})$ die Formel:

$$(13)\quad \frac{\partial z^{-\frac{n}{2}}J^n(\sqrt{z})}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}z^{-\frac{n+1}{2}}J^{n+1}(\sqrt{z})$$

abgeleitet werden kann, welche für jedes n gilt. Da $z^{-\frac{n}{2}}J^n(\sqrt{x}) = R_n$ jedenfalls eine Lösung der Differentialgleichung (10) ist, so erhält man nach (13):

$$\frac{\partial z^{-\frac{n+1}{2}}J^{n+1}(\sqrt{z})}{\partial z} = \tfrac{1}{2}z^{\frac{n}{2}}J^n(\sqrt{z}),$$

oder

$$(14)\quad -\frac{\partial z^{\frac{n}{2}}J^n(\sqrt{z})}{\partial z} = \tfrac{1}{2}z^{\frac{n-1}{2}}J^{n-1}(\sqrt{z})$$

Durch Vertauschung von n mit $-n$ findet man somit

$$(15)\quad \frac{\partial z^{-\frac{n}{2}}J^{-n}(\sqrt{z})}{\partial z} = +\tfrac{1}{2}z^{-\frac{n+1}{2}}J^{-(n+1)}(\sqrt{z})$$

welche, mit (13) zusammen auf (12) angewandt, die Gleichung liefert:

$$\frac{\partial}{\partial z}\cdot z^{-\frac{n}{2}}\left\{A_nJ^n(\sqrt{z})+B_nJ^{-n}(\sqrt{z})\right\} = \tfrac{1}{2}z^{-\frac{n+1}{2}}\left\{-A_nJ^{n+1}(\sqrt{z})+B_nJ^{-(n+1)}(\sqrt{z})\right\}.$$

Wird also

$$Q_n = A_nJ^n(\sqrt{z})+B_nJ^{-n}(\sqrt{z}),\quad Q_{n+1} = A_{n+1}J^{n+1}(\sqrt{z})+B_{n+1}J^{-(n+1)}(\sqrt{z})$$

gesetzt, so ist die (13) entsprechende Gleichung:

$$\frac{\partial z^{-\frac{n}{2}}Q_n}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}z^{-\frac{n+1}{2}}Q_{n+1}$$

nur erfüllt, wenn:

$$A_{n+1} = A_n\,, \qquad B_{n+1} = -B_n\,.$$

Die der Recursionsformel (15) entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial z^{-\frac{n}{2}} Q_n}{\partial z} = +\tfrac{1}{2} z^{-\frac{n+1}{2}} Q_{n+1}$$

gilt dagegen nur für solche particuläre Lösungen, für welche:

$$A_{n+1} = -A_n\,, \qquad B_{n+1} = B_n\,.$$

Unsere particuläre Lösung (4) gehört aber, wie man leicht sieht, zu jener ersten Art und es ist daher ebenso, wie für die $J^n(\sqrt{z})$ auch:

$$\frac{\partial z^{-\frac{n}{2}} Y^n(\sqrt{z})}{\partial z} = -\tfrac{1}{2} z^{-\frac{n+1}{2}} Y^{n+1}(\sqrt{z}) \tag{16}$$

und, entsprechend (14):

$$\frac{\partial z^{+\frac{n}{2}} Y^n(\sqrt{z})}{\partial z} = +\tfrac{1}{2} z^{\frac{n-1}{2}} Y^{n-1}(\sqrt{z})\,. \tag{17}$$

Aus (13) und (14) folgen aber, wenn man $z = x^2$ restituirt, die bekannten Relationen:

$$\frac{\partial x^{-n} J^n(x)}{\partial x} = -x^{-n} J^{n+1}(x)\,, \quad \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} = \frac{n}{x} J^n(x) - J^{n+1}(x)\,, \tag{18}$$

$$\frac{\partial x^{+n} J^n(x)}{\partial x} = +x^{n-1} J^{n-1}(x)\,, \quad \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} = -\frac{n}{x} J^n(x) + J^{n+1}(x)\,, \tag{19}$$

und aus (16), (17) kann man analoge für $Y^n(x)$ herleiten.

Noch mag hier einer bisher nicht aufgestellten Relation gedacht werden, die aus einem bekannten, von Abel gegebenen Satze entspringt, wonach die Determinante der particulären Lösungen:

$$\begin{vmatrix} J^n(x) & \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} \\ Y^n(x) & \frac{\partial Y^n(x)}{\partial x} \end{vmatrix} = e^{-\int \frac{dx}{x}},$$

oder:

$$J^n(x) \frac{\partial Y^n(x)}{\partial x} - Y^n(x) \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} = \frac{\text{Const}}{x}\,,$$

worin man die Constante leicht bestimmt, wenn man nach der aus (16) folgenden Relation:

$$\frac{\partial Y^n(x)}{\partial x} = \frac{n}{x} Y^n(x) - Y^{n+1}(x)$$

und der entsprechenden für $J^n(x)$ die vorstehende Gleichung in:

$$Y^n(x)J^{n+1}(x) - J^n(x)\,Y^{n+1}(x) = \frac{\text{Const}}{x}$$

transformirt. Schreibt man nämlich:

$$x^2 \cdot x^n\,Y^n(x) \cdot x^{-(n+1)}J^{n+1}(x) - x^{-n}J^n(x) \cdot x^{n+1}\,Y^{n+1}(x) = \text{Const.}$$

und bemerkt, dass für $x = 0$:

$$x^n\,Y^n(x) = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n}\Gamma(n), \quad x^{-n}J^n(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n+1)},$$

so findet man leicht*) Const $= 2$, also:

$$(20)\quad Y^n(x)J^{n+1}(x) - J^n(x)\,Y^{n+1}(x) = J^n(x)\frac{\partial Y^n(x)}{\partial x} - Y^n(x)\frac{\partial J^n(x)}{\partial x} = \frac{2}{x}.$$

Mit dieser Ausrüstung können wir nun an unsere bestimmten Integrale gehen.

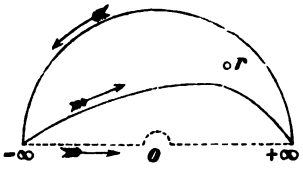
§ 2.

Wir betrachten zunächst das Integral:

$$(1)\qquad \int x^{n+h}\,\frac{Y^n(ax) - \pi i J^n(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}}\,dx,$$

in dem n, m, h ganze positive Zahlen, a, r aber beliebige complexe Grössen sein mögen, und denken uns dasselbe hinerstreckt von $-\infty$ bis $+\infty$ oberhalb der reellen Axe, etwa längs des Weges (Fig. 1). Was die Convergenz des Integrales für $x = \pm\infty$ in der reellen Axe betrifft, so beachte man den in (9) des § 1. gegebenen asymptotischen Werth von $Y^n(ax) \mp \pi i J^n(ax) = \frac{c}{\sqrt{x}}\,e^{\pm axi}$;

Fig. 1.



und man weiss aus bekannten Sätzen, dass hiernach schon

$$\int \{Y^n(ax) - \pi i J^n(ax)\}\,dx$$

für $x = \pm\infty$ convergiren würde, wenn der imaginäre Theil von $a \gtrless 0$ ist. Wenn also $2(m+1) > n + h - \frac{1}{2}$ ist, wird auch vorstehendes Integral (1) convergiren.

Dehnen wir ferner das Integral über einen unendlich grossen Halbkreis, oberhalb der reellen Axe von $+\infty$ nach $-\infty$ aus, und bezeichnet R den unendlich wachsenden Radius, so haben wir das Integral

---

*) Für $n = 0$ wird allerdings $x^n\,Y^n(x) = Y^0(x)$ im Punkte $x = 0$ logarithmisch unendlich. Der Factor x^2 aber im ersten Gliede obiger Gleichung compensirt hier das Wachsthum, so dass man für $n = 0$ dieselbe Bestimmung Const $= 2$ findet.

$$ci R^{n+h+\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} e^{(n+h+\frac{1}{2})\varphi i} \frac{d\varphi}{(R^2 e^{2\varphi i} - t^2)^{m+1}} e^{aR\cos\varphi i - aR\sin\varphi}.$$

Wenn der reelle und imaginäre Theil von a, wie hier überall geschehen soll, ≥ 0 vorausgesetzt wird, so nehmen die Elemente dieses Integrals, ihres Exponentialfactors wegen, unendlich ab und das ganze Integral verschwindet.

Ist nun r eine complexe Grösse mit einem so grossen positiven imaginären Theile, dass sie oberhalb der Integrationscurve liegt, so darf man das in der ausgezogenen Curve von $-\infty$ nach $+\infty$ und oberhalb durch den unendlichen Halbkreis von $+\infty$ nach $-\infty$ zurückgeführte, also über eine geschlossene Curve ausgedehnte Integral zusammenziehen auf ein $x = r$ unmittelbar umgebendes Flächenstück. Ein solches Integral kann aber immer leicht gefunden werden: Führen wir nämlich die neue Veränderliche $x^2 = z$ ein, so wird jenes um $x = r$ ausgedehnte Integral (1)

$$= \tfrac{1}{2} \int z^{\frac{n+h-1}{2}} \frac{Y^n(a\sqrt{z}) - \pi i J^n(a\sqrt{z})}{(z - r^2)^{m+1}} dz,$$

wenn dies letztere um $z = r^2$ genommen wird. Dessen Werth ist aber nach bekannten Sätzen:

$$= \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m z^{\frac{n+h-1}{2}} \left\{ Y^n(a\sqrt{z}) - \pi i J^n(a\sqrt{z}) \right\},$$

wenn schliesslich $z = r^2$ gesetzt wird.

Somit findet man das Integral:

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+h} \frac{Y^n(ax) - \pi i J^n(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx = \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{n+h-1} \left\{ Y^n(ar) - \pi i J^n(ar) \right\},$$

unter den Bedingungen, dass n, m, h ganze positive Zahlen sind, der reelle und imaginäre Theil von a und der imaginäre Theil von r, ≥ 0 und endlich $2(m+1) > n + h - \frac{1}{2}$ ist.

Hieraus folgt, z. B. wenn J^0, Y^0 mit J, Y bezeichnet werden:

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^h \frac{Y(ax) - \pi i J(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx = \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{h-1} \left\{ Y(ar) - \pi i J(ar) \right\},$$

wo $2(m+1) > h - \frac{1}{2}$ sein muss. Wird $m = 0$ gesetzt, so muss $h < \frac{5}{2}$ sein; es darf also in diesem Falle z. B. $h = 0$ gesetzt werden, wodurch sich ergiebt:

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(ax) - \pi i J(ax)}{x^2 - r^2} dx = \frac{\pi i}{r} \left\{ Y(ar) - \pi i J(ar) \right\}.$$

Man mag bemerken, dass man aus letzterem speciellen Integrale rückwärts auch das allgemeine (2) ableiten kann. Denn man findet zunächst durch m-malige Differentiation nach r^2 die Gleichung (3) für $h = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Y(ax) - \pi i J(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx = \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{-1} \left\{ Y(ar) - \pi i J(ar) \right\}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit a^{-n} und differentiirt n-mal nach a, so findet man mittels der Recursionsformeln (18) des § 1.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \frac{Y^n(ax) - \pi i J^n(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx = \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{n-1} \left\{ Y^n(ar) - \pi i J^n(ar) \right\}.$$

Multiplicirt man ferner mit a^{+n} und differentiirt nach a, so findet man nach (19) in § 1.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+1} \frac{Y^{n-1}(ax) - \pi i J^{n-1}(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx = \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^n \left\{ Y^{n-1}(ar) - \pi i J^{n-1}(ar) \right\}$$

und durch Wiederholung dieser Operation die allgemeine Gleichung (2).

Es lassen sich die Integrale (2) noch auf andere Formen bringen. Der Integrationsweg kann nämlich in der, in Fig. 1 angedeuteten Weise mit der reellen Axe zusammenfallen, wenn er nur um $x = 0$ in einem unendlich kleinen Halbkreise oberhalb herumgeht. Das Integral über diesem Halbkreis verschwindet aber, da $x^n Y^n(x)$ für $x = 0$ endlich bleibt; und selbst im Falle $n = 0$, wo $x^n Y^n(x) = Y^0(x)$ logarithmisch unendlich wird, verschwindet das Integral, da $x = \varepsilon e^{\varphi i}$ gesetzt:

$$\int \log x \, dx = \varepsilon i \int_0^{\pi} (\log \varepsilon + \varphi i) \, e^{\varphi i} d\varphi$$

mit unendlich abnehmendem ε verschwindet.

Zerlegt man aber $\int_{-\infty}^{+\infty}$ in $\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$ und setzt in ersterem $-x$ statt $+x$, wendet dann die Relationen (s. (6) in § 1.)

$$(-x)^n J^n(-x) = x^n J^n(x), \quad (-x)^n Y^n(-x) = x^n Y^n(x) + 2\pi i x^n J^n(x)$$

an, so findet man aus dem Integrale in (2), für ein *gerades* $h = 2p$:

$$(5) \quad \int_0^{\infty} x^{n+2p} \frac{Y^n(ax)}{(x^2 - r^2)^{m+1}} dx = \frac{\pi i}{2\Gamma(m+1)} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{n+2p-1} \left\{ Y^n(ar) - \pi i J^n(ar) \right\}$$

und für ein *ungerades* $h = 2p + 1$:

$$5)\quad \int_0^\infty x^{n+2p+1}\frac{J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx=-\frac{1}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^{n+2p}\left\{Y^n(ar)-\pi i J^n(ar)\right\}.$$

In diesen Formeln sind also n, p, m ganze positive Zahlen, und $2(m+1) > n+h-\frac{1}{2}$, ferner sind a, r im Allgemeinen complexe Zahlen, doch der reelle und imaginäre Theil von $a \geq 0$ und der imaginäre Theil von $r \geq 0$.

Ein specieller Fall von (6) mag noch hervorgehoben werden: Ist nämlich $p=0$, so kann man die Differentiation rechter Hand nach (14) und (17) in § 1. ausführen und man findet:

$$6)\quad \int_0^\infty x^{n+1}\frac{J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx=-\frac{1}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^m\left\{Y^{n\ \ m}(ar)-\pi i J^{n-m}(ar)\right\},$$

also z. B.

$$7)\quad \int_0^\infty x^{n+1}\frac{J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{n+1}}\,dx=-\frac{1}{2\Gamma(n+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^n\left\{Y(ar)-\pi i J(ar)\right\},$$

oder, wenn $m=2n$, wo dann

$$J^{-n}(ar)=(-1)^n J^n(ar),\qquad Y^{-n}(ar)=(-1)^n Y^n(ar)$$

ist*):

$$8)\quad \int_0^\infty x^{n+1}\frac{J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{2n+1}}\,dx=\frac{(-1)^{n+1}}{2\Gamma(2n+1)}\left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\left\{Y^n(ar)-\pi i J^n(ar)\right\}.$$

Es ist in allen Formeln dieses § r als complexe Grösse mit positivem imaginärem Theile vorausgesetzt, so dass man, $r=si$ gesetzt, die Integrale

$$\int_0^\infty x^{n+2p+1}\frac{J^n(ax)}{(x^2+s^2)^{m+1}}\,dx$$

u. s. w. erhält. Doch leuchtet ein, dass r auch als reelle Grösse gedacht werden kann, wenn nur der Integrationsweg unterhalb des Punktes $x=r$ genommen wird.

§ 3.

Das Verfahren des vorigen § kann auf das Integral

$$(1)\qquad \int x^{q+1}J^p(\xi x)\,\frac{Y^n(ax)-\pi i J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx,$$

*) Dies ganz specielle Integral (9) wurde auf anderem Wege schon abgeleitet von C. Neumann (Theorie d. Bess. Funct. p. 58).

in dem wir p, n, q, m als positive ganze, ξ, a als positive reelle Grössen und r als complexe Grösse mit positivem imaginären Theile ansehen, leicht ausgedehnt werden. Damit das Integral über jenen unendlichen Halbkreis verschwinde, also der asymptotische Werth von:

$$J^p(\xi x)\left\{Y^n(ax)-\pi i J^n(ax)\right\}=\frac{\text{Const}}{x}\left\{e^{(a+\xi)xi}+(-1)^n i e^{(a-\xi)xi}\right\}$$

unendlich abnehme für $x=Re^{\varphi i}$, muss $\xi<a$ sein; es nimmt dann dieses Product exponentiell zu Null ab, und das Integral über den Halbkreis verschwindet. Ist $\xi=a$, so giebt das Product der Cylinderfunctionen Elemente von der Ordnung $\frac{1}{x}$ und es wird das Integral nur Null, wenn die gehörige Abnahme der Elemente dadurch hergestellt wird, dass in dem Integrale der Nenner von höherem Grade als der Zähler, also $2(m+1)>q+1$ ist.

Soll nun ferner das Integral auf der reellen Axe für $x=\pm\infty$ convergiren, so wird:

$$J^p(\xi x)\left\{Y^n(ax)-\pi i J^n(ax)\right\}=\frac{\text{Const}}{x}\cos(\xi x-\varrho)\left\{\cos ax+i\sin ax\right\}$$

und daher nothwendig $2(m+1)>q$ sein müssen. Für $\xi=a$ aber muss $2(m+1)>q+1$ sein, damit das Integral endlich bleibe.

Da $Y^n(x)$ für $x=0$ sich wie x^{-n} verhält, so muss, wenn die Integration durch $x=0$ hindurch erlaubt sein soll, $p+q+1>n$ sein.

Unter den Bedingungen $p+q+1\geq n$, $2(m+1)>q$, $\xi<a$ erhält man nun, wenn m eine ganze Zahl ist, ganz wie oben:

$$(2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{q+1}J^p(\xi x)\frac{Y^n(ax)-\pi i J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx=\frac{\pi i}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q J^p(\xi r)\left\{Y^n(ar)-\pi i J^n(ar)\right\}.$$

Wie die des vorigen §, so lassen sich auch diese Integrale weiter reduciren; und zwar findet man, wenn $(n+p+q)$ eine *ungerade* ganze Zahl ist:

$$(3)\qquad \int_0^{\infty} x^{q+1}\frac{J^p(\xi x)Y^n(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx=\frac{\pi i}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q J^p(\xi r)\left\{Y^n(ar)-\pi i J^n(ar)\right\},$$

und wenn $(n+p+q)$ eine *gerade* ganze Zahl:

$$(4)\qquad \int_0^{\infty} x^{q+1}\frac{J^p(\xi x)J^n(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx=-\frac{1}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q J^p(\xi r)\left\{Y^n(ar)-\pi i J^n(ar)\right\}.$$

Ist z. B. $m=0$, $q=0$, $p=n$, so sind alle obigen Bedingungen für die Convergenz des Integrales erfüllt und die letzte Gleichung giebt:

$$(5)\qquad \int_0^\infty x\,\frac{J^n(\xi x)J^n(ax)}{x^2-r^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}J^n(\xi r)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}.$$

Da jetzt $2(m+1) > q+1$, so erstreckt sich die Gültigkeit dieser Werthe auf alle $\xi < a$ *und* auf $\xi = a$, so dass:

$$(6)\qquad \int_0^\infty x\,\frac{J^n(ax)J^n(ax)}{x^2-r^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}J^n(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}.$$

Für $\xi > a$ dagegen gilt (5) nicht mehr, sondern es ist, wie aus (5) durch Vertauschung hervorgeht:

$$(7)\qquad \int_0^\infty x\,\frac{J^n(\xi x)J^n(ax)}{x^2-r^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}J^n(ar)\left\{Y^n(\xi r) - \pi i J^n(\xi r)\right\},$$

welche Gleichung sich für $\xi = a$ ebenfalls auf (6) reducirt.

Das Integral

$$-2\int_0^\infty x\,\frac{J^n(\xi x)J^n(ax)}{x^2-r^2}\,dx = f(\xi)$$

stellt daher, als Function der reellen Veränderlichen ξ betrachtet, für $\xi < a$ und $\xi > a$ zwei verschiedene analytische Functionen dar:

$$f(\xi) = J^n(\xi r)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\},$$

und

$$f(\xi) = J^n(ar)\left\{Y^n(\xi r) - \pi i J^n(\xi r)\right\},$$

die in $\xi = a$ jedoch zusammenhängen, d. h. denselben Werth ergeben.

Eine andere Art von Unstetigkeit zeigen Integrale, wie:

$$(8)\qquad -2\int_0^\infty x^2\,\frac{J^{n+1}(\xi x)J^n(ax)}{x^2-r^2}\,dx = f(\xi),$$

deren Werth nach (4)

$$(9)\qquad f(\xi) = rJ^{n+1}(\xi r)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}$$

für $\xi < a$ ist. Für $\xi = a$ aber gilt diese Gleichung, da jetzt $2(m+1) = q+1$ ist, nicht mehr, weil das Integral über jenen unendlichen Halbkreis jetzt nicht verschwindet. Es nimmt vielmehr dies Integral einen endlichen Werth an, den wir folgendermassen berechnen wollen:

Mit Rücksicht auf die asymptotischen Werthe von $J^{n+1}(ax)$ im ersten Quadranten (s. (7) des § 1.) findet man für einen grossen Viertelskreis im ersten Quadranten:

$$\int x^2 J^{n+1}(ax) \frac{Y^n(ax) - \pi i J^n(ax)}{x^2 - r^2} dx$$

$$= \frac{2}{a} e^{-\frac{1}{2}\pi(n+\frac{3}{2})i} \int \frac{x dx}{x^2 - r^2} e^{axi} \cos\left[ax - \tfrac{1}{2}\pi\left(n + \tfrac{3}{2}\right)\right],$$

welch letzteres Integral sich für unendlich wachsende x bis auf unendlich abnehmende Grössen reducirt auf: $\frac{1}{a}\int \frac{dx}{x}$. Setzt man nun $x = Re^{\varphi i}$, so wird $\int \frac{dx}{x} = i\int d\varphi$ ausgedehnt über den ersten Quadranten, also $\frac{\pi i}{2a}$ der Werth des betreffenden Integrales. Der asymptotische Werth von $J^{n+1}(ax)$ im zweiten Quadranten, den man aus (8) des § 1. zu entnehmen hat, lässt erkennen, dass das Integral über den zweiten Viertelskreis ebenfalls $\frac{\pi i}{2a}$ ist, so dass man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 J^{n+1}(ax) \frac{Y^n(ax) - \pi i J^n(ax)}{x^2 - r^2} dx + \frac{\pi i}{a} = \pi i r J^{n+1}(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}$$

erhält, und hieraus*)

$$(10) \qquad f(a) = -\frac{1}{a} + r J^{n+1}(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}.$$

Vergleicht man dies mit (8), so sieht man, dass, wenn sich ξ dem Werthe a nähert, sich $f(\xi)$ zunächst stetig und dem Werthe $r J^{n+1}(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}$ zustrebend verändert. In $\xi = a$ selbst aber hat die Function einen Werth, der plötzlich um $\frac{1}{a}$ herabsinkt. Aus (9) kann man übrigens durch Vertauschung die Gleichung:

$$(11) \qquad f(\xi) = r J^n(ar)\left\{Y^{n+1}(\xi r) - \pi i J^{n+1}(\xi r)\right\}$$

für $\xi > a$ ableiten, so dass der Grenzwerth, dem sich $f(a + \varepsilon)$ mit abnehmendem ε nähert:

$$f(a + \varepsilon) = r J^n(ar)\left\{Y^{n+1}(ar) - \pi i J^{n+1}(ar)\right\}.$$

Beachtet man nun, dass nach (20) in § 1.:

$$J^n(ar) Y^{n+1}(ar) = Y^n(ar) J^{n+1}(ar) - \frac{2}{ar},$$

so kann man auch schreiben:

$$f(a + \varepsilon) = -\frac{2}{a} + r J^{n+1}(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\}.$$

Da ferner nach (9) der Grenzwerth:

*) Einfacher, jedoch weniger in die eigentliche Natur dieser Unstetigkeit eindringend, hätte man diesen Werth $f(a)$ auch durch Differentiation von (6) nach a finden können.

$$f(a-\varepsilon) = rJ^{n+1}(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\},$$

so hat man

$$\frac{f(a+\varepsilon)+f(a-\varepsilon)}{2} = -\frac{1}{a} + rJ^{n+1}(ar)\left\{Y^n(ar) - \pi i J^n(ar)\right\},$$

d. h. den Werth $f(a)$ in (10).

Das Integral $f(\xi)$ stellt also für $\xi < a$, $\xi > a$ verschiedene analytische Functionen dar, welche auch für solche $\xi = a \pm \varepsilon$, die sich dem Werthe $\xi = a$ unendlich annähern, zwei verschiedenen Werthen $f(a \pm \varepsilon)$ zustreben. Der Werth in $\xi = a$ selbst ist das arithmetische Mittel beider Sprungwerthe.

In allen Formeln dieses § ist r als eine complexe Grösse mit positivem imaginären Theile vorausgesetzt, so dass, z. B. $r = si$ gesetzt die Integrale:

$$\int_0^\infty x^{q+1} \frac{J^p(\xi x) J^n(ax)}{(x^2+s^2)^{m+1}}\, dx$$

u. s. w. dargestellt worden sind.

Wenn aber $r = k$ reell wird, so kann man, wenigstens in den Integralen (2), den Integrationsweg verändern und ihn unterhalb der Stelle $x = r$ herumführen. Doch kann auch in Integralen, wie:

$$\int_0^\infty x^{q+1} \frac{J^p(\xi x) J^n(ax)}{x^2-k^2}\, dx = -\tfrac{1}{2} k^q J^p(\xi k)\left\{Y^n(ak) - \pi i J^n(ak)\right\},$$

das Verschwinden des Nenners durch ein gleichzeitiges Verschwinden des Zählers compensirt werden: Wenn nämlich k eine Wurzel der Gleichung $J^n(ka) = 0$ ist, dann reducirt sich die rechte Seite auf $-\tfrac{1}{2} k^q J^p(\xi k)\, Y^n(ak)$. Da aber $J^n(ka) = 0$, so hat man nach (20) in § 1. $Y^n(ak)\, J^{n+1}(ak) = \frac{2}{ak}$, und also:

$$(12) \qquad \int_0^\infty x^{q+1} \frac{J^p(\xi x) J^n(ax)}{x^2-k^2}\, dx = -\frac{k^{q-1}}{a} \frac{J^p(\xi k)}{J^{n+1}(ka)},$$

wo $2 > q$ und $\xi < a$ vorausgesetzt ist*).

* * *

*) Es mag schliesslich bemerkt werden, dass man durch dieselbe Methode, wie sie zur Bestimmung dieser Integrale mit Cylinderfunctionen angewandt ist, die analogen Integrale für Kreisfunctionen erhalten kann. Dazu gehe man von dem Integrale:

$$\int x^{q+1} \frac{\cos(\xi x)\, e^{axi}}{(x^2-r^2)^{m+1}}\, dx$$

Auf ganz analoge Weise lassen sich die Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h e^{ax\,i}\,\frac{J^n(\xi x)}{(x^2-r^2)^m}\,dx$$

behandeln. Ich beschränke mich hier auf die Angabe des Integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h e^{ax\,i}\,\frac{J^n(\xi x)}{x^2-r^2}\,dx = \pi i r^{h-1} e^{ar\,i} J^n(\xi r)\,, \tag{13}$$

wo $a > \xi$ als reelle Grössen, h als ganze positive Zahl < 2 und r als complexe Grösse mit positivem imaginären Theile vorausgesetzt werden mag. Dann ist, wenn $(h+n)$ *gerade:*

$$\int_0^{\infty} x^h \cos ax\,\frac{J^n(\xi x)}{x^2-r^2}\,dx = \frac{\pi i}{2}\, r^{h-1} e^{ar\,i} J^n(\xi r) \tag{14}$$

---

aus, in dem $2(m+1) > q+1$, m, q ganze positive Zahlen, und ξ, a positive reelle Grössen, $\xi < a$, vorstellen sollen. Dann findet man genau, wie oben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{q+1}\,\frac{\sin^{\cos}(\xi x)\, e^{ax\,i}}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx = \frac{\pi i}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q \sin^{\cos}(\xi r) e^{ar\,i}.$$

Durch Zerlegung findet man, wenn q *ungerade:*

$$\int_0^{\infty} x^{q+1}\,\frac{\cos(\xi x)\cos(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx = \frac{\pi i}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q \cos(\xi r) e^{ar\,i},$$

$$\int_0^{\infty} x^{q+1}\,\frac{\sin(\xi x)\sin(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q \sin(\xi r) e^{ar\,i}$$

und, wenn q *gerade:*

$$\int_0^{\infty} x^{q+1}\,\frac{\cos(\xi x)\sin(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q \cos(\xi r) e^{ar\,i},$$

$$\int_0^{\infty} x^{q+1}\,\frac{\sin(\xi x)\cos(ax)}{(x^2-r^2)^{m+1}}\,dx = \frac{\pi i}{2\Gamma(m+1)}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^m r^q \sin(\xi r) e^{ar\,i}.$$

Ist $m = 0$, so muss $1 > q$ sein, also $q = 0$:

$$\int_0^{\infty} x\,\frac{\cos(\xi x)\sin(ax)}{x^2-r^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cos(\xi r) e^{ar\,i},$$

$$\int_0^{\infty} x\,\frac{\sin(\xi x)\cos(ax)}{x^2-r^2}\,dx = \frac{\pi i}{2}\sin(\xi r) e^{ar\,i}.$$

und, wenn $(h + n)$ *ungerade:*

$$(15) \qquad \int_0^\infty x^h \sin ax \, \frac{J^n(\xi x)}{x^2 - r^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \, r^{h-1} e^{ar\,i} J^n(\xi x) \, .$$

Die Erweiterungen der in diesem § vorgetragenen Integrale auf die Fälle, wo die Exponenten n, h, p, q u. s. w. gebrochene, a und ξ complexe Zahlen sind, glaube ich übergehen zu dürfen, da die Methode genügend dargelegt ist und ihre Anwendung auf diese complicirteren Fälle keine Schwierigkeit mehr hat.

§ 4.

Zum Schluss mögen noch einige Integrale erwähnt werden, welche mit den Hülfsmitteln der Integration über complexe Wege sich nicht bestimmen lassen, sehr einfach aber durch die Substitution der Reihenentwickelung für $J^n(x)$. Sie beziehen sich auf Producte von J-Functionen in Potenzen und Exponentialgrössen. Ich beschränke mich darauf, hier die einfachsten derselben mitzutheilen und namentlich diejenigen, welche von Hrn. H. Weber*) vor einiger Zeit theils mit Hülfe eines besonderen Hülfssatzes, theils durch Doppelintegrale gewonnen sind; die folgende Ableitung hat sich viel bequemerer Hülfsmittel bedient.

Aus der Entwickelung:

$$J^n(bx) = \left(\frac{bx}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{bx}{2}\right)^{2p}$$

folgt durch Integration der einzelnen Reihenglieder ohne Weiteres:

$$(1) \qquad \int_0^\infty x^q e^{-ax} J^n(bx)\, dx = \left(\frac{b}{2a}\right)^n \frac{1}{a^{q+1}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Gamma(n+2p+q+1)}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{b}{2a}\right)^p .$$

Diese Reihe ist eine hypergeometrische und zwar

$$(2) \qquad = \frac{b^n}{a^{n+q+1}} \frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)} F\left(\frac{n+q+1}{2}, \frac{n+q+2}{2}, n+1, -\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Die Grössen n, q, a, b sind hierin allgemeine complexe Grössen, welche nur den Beschränkungen unterliegen, dass der reelle Theil von $(q + n) > -1$ sein muss (damit für $x = 0$ keine unendlichen Elemente erscheinen), und der reelle Theil von a im Allgemeinen > 0 (damit das Integral an der oberen Grenze convergire).

*) Crelle's Journ. t. 69, p. 232.

In dem speciellen Falle, dass n und q ganze positive Zahlen und $n > q$ ist, kann vorstehende Reihe auf eine *Kugelfunction* reducirt werden. Bezeichnet man als zugeordnete Kugelfunction erster Art die Reihe:

$$P_n^q(\sqrt{x}) = x^{\frac{q-n}{2}}(x-1)^{\frac{n}{2}} F\left(-\frac{q-n}{2}, -\frac{q-n-1}{2}, \tfrac{1}{2}-q, \frac{1}{x}\right),$$

die unter jenen Voraussetzungen jedenfalls eine endliche ist, so lehrt die Theorie der hypergeometrischen Reihen die Transformation:

$$P_n^q(\sqrt{x}) = \frac{(-1)^q}{2^{n+q+1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-q)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(q+n+1)}{\Gamma(n+1)} (x-1)^n x^{-\frac{q+n+1}{2}} F\left(\frac{n+q+1}{2}, \frac{n+q+2}{2}, n+1, 1-\frac{1}{x}\right)$$

Setzt man $1 - \frac{1}{x} = -\frac{b^2}{a^2}$, so überzeugt man sich, dass obige Formel (2) in:

$$(3) \quad \int_0^\infty x^q e^{-ax} J^n(bx)\,dx = (-1)^{q+n} i^n \frac{2^{q+1}}{(a^2+b^2)^{\frac{q+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-q)} P_n^q\left(-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

übergeht.

Sind die angegebenen Bedingungen eines ganzen $n > q$ nicht erfüllt, so wird die hypergeometrische Reihe in (2) einer Summe einer zugeordneten Kugelfunction P_n^q erster und einer solchen Q_n^q zweiter Art gleich, worin die Indices gebrochene oder complexe Zahlen sind. Die weitere Ausführung dieser Bemerkung mag hier, als zu weitführend, unterbleiben, ebenso wie die anderen Umgestaltungen der Reihe (2). Nur eine derselben, die man mittels der bekannten Euler'schen Formel:

$$(4) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

erhält, mag hier bemerkt werden. Sie giebt:

$$(5) \quad \int_0^\infty x^q e^{-ax} J^n(bx)\,dx = \left(\frac{b}{2}\right)^n \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{n+q+1}{2}}} \frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)} F\left(\frac{n-q}{2}, \frac{n+q+1}{2}, n+1, \frac{b^2}{a^2+b^2}\right)$$

zunächst unter denselben Bedingungen als (2). Doch kann man noch bemerken, dass, wenn der reelle Theil von $q < \frac{1}{2}$, das Integral auch für ein rein imaginäres a und $a = 0$ an der oberen Grenze convergirt und mit unendlich abnehmendem a stetig bleibt. Da ein Gleiches von der rechten Seite gilt, so hat man für $a = 0$ durch Summation letzterer Reihe:

$$(6) \quad \int_0^\infty x^q J^n(bx)\,dx = \left(\frac{2}{b}\right)^q \frac{1}{b} \frac{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)}.$$

Eine zweite Classe von Integralen ergiebt sich ebenso durch Substitution der Reihe:

$$(7)\quad \int_0^\infty x^q e^{-cx^2} J^n(ax)\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{2\sqrt{c}}\right)^n \frac{1}{c^{\frac{q+1}{2}}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\Gamma\left(p+\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)} \left(\frac{q}{2\sqrt{c}}\right)^{2p}.$$

Diese Reihe kann man nun in der Weise als hypergeometrische Reihe ansehen, dass sie

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{q}{2\sqrt{c}}\right)^n \frac{1}{c^{\frac{q+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} F\left(\frac{n+q+1}{2},\ \omega,\ n+1,\ -\frac{a^2}{4c\omega}\right)$$

ist, worin ω eine unendlich wachsende Grösse bezeichnet. Doch sind auch auf solche Reihen die Transformationen anwendbar und es giebt die Euler'sche Gleichung (4) die vorstehende Reihe:

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{2\sqrt{c}}\right)^n \frac{1}{c^{\frac{q+1}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4c}} \frac{\Gamma(n+q+1)}{\Gamma(n+1)} F\left(\frac{n-q+1}{2},\ \omega,\ n+1,\ \frac{a^2}{4c\omega}\right),$$

also durch Entwickelung:

$$9)\quad \int_0^\infty x^q e^{-cx^2} J^n(ax)\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{2\sqrt{c}}\right)^n \frac{1}{c^{\frac{q+1}{2}}} e^{-\frac{a^2}{4c}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(p+\frac{n-q+1}{2}\right)}{\Gamma(p+n+1)\,\Gamma(n+1)} \left(\frac{q}{2\sqrt{c}}\right)^{2p}.$$

Wenn $q = n+1$, so reducirt sich diese Reihe auf das erste Glied und man hat:

$$(10)\qquad \int_0^\infty x^{n+1} e^{-cx^2} J^n(ax)\,dx = \frac{a^n}{(2c)^{n+1}} e^{-\frac{a^2}{4c}}.$$

Bildet man die Reihe:

$$\int_0^\infty x^s e^{-cx^2} J^n(ax) J^n(bx)\,dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{\Gamma(n+r+1)\,\Gamma(r+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{n+2r} \int_0^\infty x^{s+n+2r} e^{-cx^2} J^n(ax)\,dx,$$

und substituirt man die Werthe der letzteren Integrale aus (9), so erhält man eine Doppelreihe nach p und r, die nur in dem Falle, dass $s = 1$ ist, eine einfache Gestalt zeigt, nämlich:

$$\frac{1}{2c}\left(\frac{ab}{4c}\right)^n e^{-\frac{a^2}{4c}} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=p}^{\infty} \frac{(-1)^{r+p}}{\Gamma(n+p+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(r-p+1)} \left(\frac{a}{2\sqrt{c}}\right)^{2p} \left(\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^{2r},$$

wo eine Umkehrung der Summenordnung vorgenommen ist. Eliminirt

man den Summationsbuchstaben r, indem man $r - p = q$ setzt, so geht die Doppelsumme in

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{\Gamma(p+n+1)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)} \left(\frac{ab}{4c}\right)^{2c} \left(\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^{r}$$

über, welche in ein Product zweier Reihen zerfällt, so dass die interessante Formel

$$(11) \qquad \int_0^{\infty} x e^{-cx^2} J^n(ax)\, J^n(bx)\, dx = \frac{i^n}{2c}\, e^{-\frac{a^2+b^2}{4c}}\, J^n\left(\frac{ab}{4ci}\right)$$

erhalten wird.

Die Fourier'schen Reihen und Integrale für Cylinderfunctionen.

Von Hermann Hankel †.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Die Analogie zwischen den Kreis- und den Cylinderfunctionen, welche bei der Bearbeitung der Theorie der letzteren als fruchtbares Princip dient, ist doch eine so lockere, dass es in vielen Fällen möglich ist, einem Satze aus der Theorie der Kreisfunctionen mehrere Sätze in Cylinderfunctionen an die Seite zu stellen. Ein Beispiel hierfür bietet die Fourier'sche Reihe:

$$f(x) = \sum_n A_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (nx)$$

dar. Nimmt man $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (nx)$ entsprechend $J^n(x)$ an, so erhält man die Entwickelungen

$$f(x) = \sum_n A_n J^n(x) ,$$

die von Hrn. C. Neumann*) vor einiger Zeit untersucht worden sind. Setzt man $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (nx)$ analog $J^p(nx)$, wo p eine beliebige, aber constante ganze Zahl ist, so erhält man Entwickelungen von der Form:

$$f(x) = \sum_n A_n J^p(nx) ,$$

deren Coefficienten Hr. Schlömilch**), wenigstens für den Fall $p = 0$ und $p = 1$, durch Doppelintegrale dargestellt hat.

In den meisten, auf einen axial-symmetrischen Zustand bezüglichen Problemen der mathematischen Physik erscheinen jedoch nicht

*) Theorie d. Bessel'schen Functionen, Leipzig 1867, p. 24.
**) Schlömilch, Zeitschr. II. Jahrg., p. 155.

diese Reihen, sondern die schon von Fourier*) in der Wärmetheorie angewandten:

$$f(x) = \sum_k A_k J^0(kx) ,$$

wo k die sämmtlichen Wurzeln der transscendenten Gleichung $J^0(ka) = 0$ sind, und die algemeinen:

$$f(x) = \sum_k A_n J^n(kx) ,$$

wo n eine beliebige constante ganze Zahl ist und k die Wurzeln von $J^n(ka) = 0$. Es entsprechen diese letzteren Entwickelungen noch in sofern den Fourier'schen Reihen mit Kreisfunctionen, als sie nicht nur für *analytische*, sondern auch für *illegitime* Functionen, d. h. solche anwendbar sind, welche nicht durch einen analytischen Ausdruck definirt, sondern zunächst nur für reelle Werthe des Argumentes bestimmt sind, unstetig, ohne bestimmten Differentialquotienten sein können, jedenfalls aber für complexe Werthe des Argumentes ihre Bedeutung gänzlich verlieren.

Die Bestimmung der Coefficienten A geschieht in bekannter Weise, indem man mittels der in der Form:

$$\frac{\partial y^{2n+1} \frac{\partial y^{-n} J^n(ky)}{\partial y}}{\partial y} = - k^2 y^{n+1} J^n(ky)$$

geschriebenen Differentialgleichung der Cylinderfunctionen das Integral:

$$\int_0^a y J^n(ky)\, J^n(k'y) dy ,$$

in dem wir a als positive reelle Grösse, k, k' aber zunächst als beliebige complexe Grössen ansehen, transformirt. Man setze nämlich:

$$-k^2 \int_0^a y J^n(ky)\, J^n(k'y) dy = \int_0^a y^{-n} J^n(k'y) \frac{\partial y^{2n+1} \frac{\partial y^{-n} J^n(ky)}{\partial y}}{\partial y} dy ,$$

wende auf letzteres Integral die Integratio per partes zweimal an und reducire es mittels der Differentialgleichung schliesslich wieder auf das erste Integral, so hat man:

$$\int_0^a y J^n(ky) J^n(k'y) dy = \frac{a^{n+1}}{k'^2 - k^2} \left\{ J^n(k'a) \frac{\partial a^{-n} J^n(ka)}{\partial a} - J^n(ka) \frac{\partial a^{-n} J^n(k'a)}{\partial a} \right\} ,$$

oder mit Hülfe der leicht zu verificirenden Formel:

*) Théorie anal. de la chaleur p. 356.

(1) $$\frac{\partial y^{-n} J^n(ky)}{\partial y} = -ky^{-n} J^{n+1}(ky)$$

die Gleichung:

(2) $$\int_0^a y J^n(ky) J^n(k'y) dy = \frac{a}{k'^2 - k^2} \left\{ k' J^n(ka) J^{n+1}(k'a) - k J^n(k'a) J^{n+1}(ka) \right\},$$

die, wenn man beachtet, dass

(3) $$kyJ^{n+1}(ky) = nJ^n(ky) - y \frac{\partial J^n(ky)}{\partial y},$$

auch geschrieben werden kann:

(4) $$\int_0^a y J^n(ky) J^n(k'y) dy = \frac{a}{k'^2 - k^2} \left\{ J^n(k'a) \frac{\partial J^n(ka)}{\partial a} - J^n(ka) \frac{\partial J^n(k'a)}{\partial a} \right\}.$$

Jetzt ist aber k als Wurzel von $J^n(ka) = 0$ anzunehmen, wodurch die rechte Seite von (2) in:

$$-ak \frac{J^n(k'a)}{k'^2 - k^2} J^{n+1}(ka)$$

übergeht. Ist auch k' eine Wurzel, die von k verschieden ist, so folgt daraus:

(5) $$\int_0^a y J^n(ky) J^n(k'y) dy = 0.$$

Ist aber $k' = k$, so ist, wie man aus (3) findet:

$$\left(\frac{J^n(k'a)}{k'^2 - k^2}\right)_{k=k'} = + \frac{1}{2k} \frac{\partial J^n(ka)}{\partial k} = - \frac{a}{2k} J^{n+1}(ka),$$

so dass

(6) $$\int_0^a y [J^n(ky)]^2 dy = \tfrac{1}{2} [aJ^{n+1}(ka)]^2.$$

Aus (5) leitet man leicht ab, dass $J^n(ka) = 0$ keine complexen Wurzeln $k = \varkappa + \varkappa' i$ haben kann. Denn da $J^n(ka)$ durchaus reelle Coefficienten hat, so würde neben $k = \varkappa + \varkappa' i$ immer die conjugirte Wurzel $k = \varkappa - \varkappa' i$ erscheinen und $J^n(ky) J(k'y)$ von der Form $(K + K'i)(K - K'i) = K^2 + K'^2$ sein, so dass das Integral dieses Productes nicht verschwinden könnte. Dass rein imaginäre Wurzeln nicht vorhanden sein können, zeigt die Form der Reihe:

$$J^n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(n+p+1)\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

unmittelbar. Es hat somit $J^n(ka) = 0$, wenn hier, wie im Folgenden überall, n eine *ganze positive* Zahl (inclusive der Null) bezeichnet, nur reelle Wurzeln, die für grosse k den Werthen:

$$k = \{\mu + \tfrac{1}{2}(n + \tfrac{3}{2})\}\frac{\pi}{a}$$

immer näher kommen, worin μ ganze positive Zahlen bezeichnet; denn für diese verschwindet der asymptotische Werth*):

$$J^n(ka) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \cos\left[ka - \tfrac{1}{2}(n + \tfrac{1}{2})\pi\right].$$

Die negativen Wurzeln von $J^n(ka) = 0$, welche den positiven entgegengesetzt gleich sind, können hier wie im Folgenden aus der Betrachtung ausgeschlossen werden; ebenso wie der singuläre Werth $k = 0$, für welchen $J^n(ka)$ bei einem $n > 0$ auch verschwindet.

Werden nun mit k die reellen positiven Wurzeln bezeichnet, so bestimmen sich in der unendlichen Reihe

$$f(\xi) = \sum_k A_k J^n(k\xi), \tag{7}$$

in der wir die Variabilität von ξ auf reelle positive Werthe beschränken, die Coefficienten nach:

$$A_k = \frac{2}{[aJ^{n+1}(ka)]^2} \int_0^a x f(x) J^n(kx)\, dx. \tag{8}$$

Reihen vorstehender Art, welche nach Wurzeln einer transscendenten Gleichung fortschreiten, nenne ich im Allgemeinen *Fourier'sche Reihen.* Im Gebiete der Kreisfunctionen wäre dann die der vorstehenden genau entsprechende Reihe sowohl:

$$f(\xi) = \sum_k A_k \sin(k\xi), \qquad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(kx)\, dx,$$

wo k alle Wurzelwerthe der Gleichung $\sin(k\pi) = 0$ durchläuft, als auch:

$$f(\xi) = \sum_k A_k \cos(k\xi), \qquad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(kx)\, dx,$$

wo k alle Wurzeln $(k = \varrho + \frac{1}{2})$ der Gleichung $\cos(k\pi) = 0$ durchläuft**).

---

*) Vgl. meine Abhandl. in diesen Annalen Bd. I, p. 500.

**) Um letztere, von der gewöhnlichen Fourier'schen Reihe abweichende Entwickelung zu erweisen, kann man entweder das Dirichlet'sche Verfahren nachbilden und

$$\cos\tfrac{1}{2}z + \cos\tfrac{3}{2}z + \cdots + \cos\frac{2\varrho+1}{2}z$$

summiren, oder man benutzt die Identität

$$f(\xi) = \cos\tfrac{1}{2}\xi\,[f(\xi)\cos\tfrac{1}{2}\xi] + \sin\tfrac{1}{2}\xi\,[f(\xi)\sin\tfrac{1}{2}\xi],$$

und entwickelt $f(\xi)\cos\frac{1}{2}\xi$, $f(\xi)\sin\frac{1}{2}\xi$ nach der Fourier'schen Reihe. Einfache Reductionen liefern dann obige Reihe.

Mit der Aufstellung dieser Reihen ist aber nur der erste Schritt gethan, der die Stufe von Euler und Fourier darstellt; es muss mit Dirichlet der zweite Schritt gemacht werden, der in dem vollständigen Beweise der Gültigkeit dieser Reihen besteht. Bekanntlich hat Dirichlet diesen Beweis an der ersteren Reihe geführt, indem er die Reihe nach Substitution der Coefficienten mit dem h^{ten} Gliede abbricht, dann die Summationsformel:

$$(9) \qquad \cos z + \cos 2z + \cdots + \cos hz = \frac{\sin (h+\frac{1}{2})z}{\sin \frac{1}{2}z} - \frac{1}{2}$$

anwendet und so die Aufgabe auf die Werthbestimmung des Integrales:

$$(10) \qquad \lim_{h=\infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin hx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} f(0)$$

hinausführt.

So oft man nun auch Fourier'sche Reihen in dem allgemeinen, eben angegebenen Sinne in der mathematischen Physik entwickelt hat, so ist man doch, mit Ausnahme der Reihen nach Kreis- und Kugelfunctionen, bisher, soviel ich weiss, noch nicht über die Stufe Fourier's hinausgegangen; und es schien mir dem Standpunkte der heutigen Analysis entsprechend, für die bei gewissen physikalischen Aufgaben sich darbietenden Entwickelungen nach Cylinderfunctionen eine strenge Begründung zu versuchen.

Der von Dirichlet eingeschlagene Weg für die Reihen mit Kreisfunctionen erwies sich hier bald als ungangbar, in sofern ein jener Summation (9) einer endlichen Reihe entsprechender Satz für die Cylinderfunctionen nicht bekannt ist. Ein Analogon bot sich mir indess in der Reihe dar, welche man aus (7) und (8) ableiten kann:

$$(11) \qquad J^n(y\xi) = \frac{2}{a} J^n(ya) \sum_k^{\infty} \frac{k}{k^2 - y^2} \frac{J^n(k\xi)}{J^{n+1}(ka)},$$

indem es mir gelang, den Rest derselben, wenn sie bei dem x^{ten} Gliede abgebrochen wird, durch ein bestimmtes Integral (s. § 3.) darzustellen.

Anstatt eines Dirichlet'schen Integrales, wie in (10), bediene ich mich des Fourier'schen Integrales für Cylinderfunctionen, das ich mir zunächst verschaffte, indem ich in:

$$f(\xi) = 2 \sum \frac{J^n(k\xi)}{[aJ^{n+1}(ka)]^2} \int_0^a x f(x) J^n(kx)\, dx$$

das a unendlich wachsen liess. Da man dann für $J^n(ka)$ seinen asymptotischen Werth setzen kann, so sind die auf einander folgenden

Wurzeln k um $\frac{\pi}{a}$ verschieden, und es wird: $J^{n+1}(ka)=(-1)^{\varrho}\sqrt{\frac{2}{\pi ka}}$. Setzt man dann y statt k, so findet man:

$$(12) \qquad f(\xi) = \int_0^{\infty} y J^n(y\xi)\, dy \int_0^{\infty} x f(x) J^n(yx)\, dx\,,$$

das dem Integrale

$$\frac{\pi}{2} f(\xi) = \int_0^{\infty} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(y\xi)\, dy \int_0^{\infty} f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(yx)\, dx$$

in unserem Gebiete entsprechende Fourier'sche Integral.

Es galt nun zunächst das Integral (12) in aller Strenge zu begründen, was in § 2. geschehen ist; die Substitution der Reihe (11) mit dem Reste in demselben liefert mir dann (in § 4.) die gewünschte strenge Ableitung der Fourier'schen Reihe.

§ 2.

Die Fourier'schen Integrale.

Das Integral

$$(1) \qquad \Phi(x,h) = \int_0^{h} y J^n(yx) J^n(y\xi)\, dy$$

hat nach (2) in § 1. den Werth:

$$(2) \quad \Phi(x,h) = \frac{h}{\xi^2 - x^2}\left\{\xi J^n(xh) J^{n+1}(\xi h) - x J^n(\xi h) J^{n+1}(xh)\right\},$$

und wir bestimmen nun den Werth von:

$$\int_{\xi}^{b} \Phi(x,h)\, dx = h \int_{\xi}^{b} \frac{\xi J^n(xh) J^{n+1}(\xi h) - x J^n(\xi h) J^{n+1}(xh)}{\xi^2 - x^2}\, dx$$

mit unendlich wachsendem (positiv reellem) h, indem wir dabei ξ, b als positive reelle Grössen, $b > \xi > 0$ und die Integration auf reellem Gebiete voraussetzen. Im Falle eines grossen h kann man die asymptotischen Werthe (in denen $\varrho = \frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2})$ gesetzt ist):

$$J^n(xh) = \sqrt{\frac{2}{\pi xh}} \cos(xh - \varrho)\,, \qquad J^{n+1}(\xi h) = \sqrt{\frac{2}{\pi \xi h}} \sin(\xi h - \varrho)$$

ebenso wie die entsprechenden Werthe für $J^n(\xi h)$, $J^{n+1}(\xi h)$ substituiren und findet so:

$$\int_{\xi}^{b} \Phi(x,h)\, dx = \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\left\{\int_{\xi}^{b} \frac{\sin(x-\xi)h}{x-\xi}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} + (-1)^{n+1}\int_{\xi}^{b} \frac{\cos(x+\xi)h}{x+\xi}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}}\left\{\int_{0}^{b-\xi} \frac{\sin yh}{y}\,\frac{dy}{\sqrt{y+\xi}} + (-1)^{n+1}\int_{2\xi}^{b+\xi} \frac{\cos yh}{y}\,\frac{dy}{\sqrt{y-\xi}}\right\}.$$

Wenn nun h unbegrenzt wächst, so können die Integrale nach bekannten Dirichlet'schen Sätzen bestimmt werden; ersteres nach (10) des § 1., letzteres nach dem Satze, dass

$$\lim \int_a^b F(y) \cos(hy)\, dy = 0,$$

wenn die Function $F(y)$ zwischen den Grenzen endlich bleibt, oder wenn sie unendlich wächst, doch in so geringem Grade, dass $\int F(y)\, dy$ endlich bleibt.

Es ergiebt sich also

$$\lim \int_\xi^b \Phi(x,h)\, dx = \frac{1}{2\xi}, \quad b > \xi > 0. \tag{3}$$

Ebenso findet man:

$$\int_0^\xi \Phi(x,h)\, dx = \frac{1}{\pi\sqrt{\xi}} \left\{ \int_0^{\xi-a} \frac{\sin hy}{y} \frac{dy}{\sqrt{\xi - y}} + (-1)^{n+1} \int_{a+\xi}^{2\xi} \frac{\cos hy}{y} \frac{dy}{\sqrt{y-\xi}} \right\}, \tag{4}$$

wenn $\xi > a > 0$ und somit:

$$\lim \int_a^\xi \Phi(x,h)\, dx = \frac{1}{2\xi}, \quad \xi > a > 0. \tag{5}$$

Wenn die untere Grenze im Integral Null ist, so ist vorstehender Beweis nicht mehr statthaft, da dann an derselben jene semiconvergenten Entwickelungen nicht mehr vorgenommen werden können. Um auch in diesem Falle den Grenzwerth von $\int_0^\xi \Phi(x,h)\, dx$ zu bestimmen, so sei a eine solche mit h unendlich abnehmende Grösse, dass zwar ah unendlich wächst, aber in geringerem Grade als $\sqrt{h}$. Dann kann man in $\int_0^\xi \Phi(x,h)\, dx$ die semiconvergente Entwickelung anwenden, und die Gleichungen (4), (5) benutzen, da allerdings in dem letzten Integrale in (4) die Function unter dem Integralzeichen wächst, jedoch in der Weise, dass $\int \frac{dy}{\sqrt{y-\xi}}$ endlich bleibt für $y = a + \xi$ und ein abnehmendes a. Es bleibt somit noch das Integral $\int_0^a$ zu bestimmen. Nun giebt aber der bekannte Mittelwerthsatz, wenn man ihn auf die Theile von $\Phi(x,h)$ anwendet:

$$\int_0^a \Phi(x,h)\,dx = ah\,\frac{J^n(\mu h)J^{n+1}(\xi h)}{\xi^2-\mu^2} - \tfrac{1}{2}a^2h\,\frac{J^{n+1}(\mu' h)J^n(\xi h)}{\xi^2-\mu'^2},$$

worin μ, μ' gewisse Mittelwerthe bezeichnen. Nun nimmt aber $J^n(\xi h)$, $J^{n+1}(\xi h)$ mit wachsendem h ab, wie $\frac{1}{\sqrt{h}}$; ah aber, wie vorausgesetzt, in niedrigerem Grade als $\sqrt{h}$, und es wird so, da die anderen Factoren jedenfalls nicht unendlich wachsen, vorstehendes Integral sich der Null nähern, so dass der Satz (5) auch für $a = 0$ bestehen bleibt.

Die Gleichungen (4) und (5) lassen sich nun in den Satz zusammenfassen: Wenn $b > a \geq 0$ ist, so ist:

$$\lim \int_a^b \Phi(x,h)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\xi}, \\ 0 \end{cases} \tag{6}$$

je nachdem ξ zwischen den Grenzen a, b liegt, oder ausserhalb. Fällt ξ mit einer der Grenzen zusammen, so ist der Werth $\frac{1}{2\xi}$, also das arithmetische Mittel aus den Sprungwerthen an dieser Stelle. Doch ist dabei, wie selbstverständlich, $\xi > 0$ angenommen und der Fall $\xi = 0$ ausgeschlossen.

Wenn es sich nun weiter um die Bestimmung des Grenzwerthes von dem Integrale

$$\int_a^b x\,f(x)\,\Phi(x,h)\,dx$$

handelt, wo $f(x)$ eine ganz beliebige stetige oder unstetige Function ist, so können hier die Principien angewandt werden, die Hr. du Bois-Reymond vor einiger Zeit in einer schönen Abhandlung*) gegeben hat und die wesentlich beruhen auf folgendem

Lemma: Wenn $F(x)$, $\varphi(x)$ endliche Functionen sind, $F(x)$ in dem Intervalle von a bis b entweder nur zu- oder nur abnimmt, so kann man

$$\int_a^b F(x)\,\varphi(x)\,dx = F(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + (F(b) - F(a))\,M$$

setzen, wo M zwischen dem kleinsten und grössten Werthe liegt, den $\int_\mu^b \varphi(x)\,dx$, wenn μ von a nach b variirt, annimmt und daher durch $\int_\mu^b \varphi(x)\,dx$, wo μ einen gewissen Mittelwerth zwischen a und b be-

*) Crelle's Journal Bd. 69, p. 82.

deutet, ersetzt werden kann, wenn $\int_{\mu}^{b} \varphi(x)\,dx$ eine stetige Function von μ ist.

Danach hat man, wenn ξ nicht in dem Intervall von a bis b liegt:

$$\int_a^b x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = af(a)\int_a^b \Phi(x,h)\,dx + \big(bf(b) - af(a)\big)\int_\mu^b \Phi(x,h)\,dx,$$

und da bei unendlich wachsendem h nach (6) die Integrale $\int_a^b$, $\int_\mu^b \Phi(x,h)\,dx$ verschwinden, so hat man:

$$\lim \int_a^b x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = 0. \tag{7}$$

Ebenso hat man:

$$\int_\xi^a x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = \xi f(\xi)\int_\xi^a \Phi(x,h)\,dx + \big(af(a) - \xi f(\xi)\big)M,$$

wo M zwischen dem grössten und kleinsten Werthe liegt, den $\int_\mu^a \Phi(x,h)\,dx$ annimmt, wenn μ von ξ bis a variirt. Mit unendlich wachsendem h wird der Werth, den dasselbe für $\mu = \xi$ annimmt, $\frac{1}{\xi}$, und sein Werth für $\mu > \xi$ die Null, so dass M jedenfalls endlich bleibt. Man hat somit:

$$\lim \int_\xi^a x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = \tfrac{1}{2} f(\xi) + \big(af(a) - \xi f(\xi)\big)\lim M.$$

Addirt man hinzu (7), so ist:

$$\lim \int_\xi^b x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = \tfrac{1}{2} f(\xi) + \big(af(a) - \xi f(\xi)\big)\lim M,$$

und somit alle Glieder von a unabhängig, ausser $\big(af(a) - \xi f(\xi)\big)\lim M$, das somit auch von a unabhängig sein muss, was nur möglich wird, wenn es ganz verschwindet. Somit hat man:

$$\lim \int_\xi^b x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = \tfrac{1}{2} f(\xi). \tag{8}$$

Mit (7) zusammen gelangt man so zu dem Satze: *Wenn* $b > a \geqq 0$, *so ist der Grenzwerth:*

$$\lim \int_a^b x f(x)\,\Phi(x,h)\,dx = \begin{cases} f(\xi) \\ 0 \end{cases}, \tag{9}$$

je nachdem ξ innerhalb des Intervalles a, b oder ausserhalb liegt. Fällt ξ mit einer der Grenzen zusammen, so ist der Werth des Integrales das arithmetische Mittel aus beiden Sprungwerthen, nämlich $\frac{1}{2} f(\xi)$.

Der Fall $\xi = 0$ ist hierbei bis jetzt ausgeschlossen, und es muss das Integral (9) in diesem einer besonderen Betrachtung unterworfen werden:

Ist $n > 0$, so wird nach (2): $\Phi(x, h) = 0$ und daher $\int_a^b x f(x) \Phi(x, h) dx = 0$.

Wenn aber speciell $n = 0$, so wird für $\xi = 0$: $\Phi(x,h) = h \frac{J^1(xh)}{x}$, also:

$$\int_a^b x f(x) \Phi(x, h) dx = h \int_a^b f(x) J^1(xh) dx .$$

Da nun nach (1) pag. 473: $h \int J^1(hx) dx = - J(hx)$, so hat man nach obigem Lemma:

$$h \int_a^b f(x) J^1(hx) dx = -f(a) \{J(hb) - J(ha)\} - \{f(b) - f(a)\} \{J(hb) - J(h\mu)\} .$$

Ist nun $a > 0$, so verschwindet die rechte Seite mit wachsendem h:

$$\lim h \int_a^b f(x) J^1(hx) dx = 0 .$$

Ist aber die untere Grenze Null, so wird:

$$h \int_0^a f(x) J^1(hx) = f(0) \{1 - J(ha)\} - \{f(a) - f(0)\} \{J(ha) - J(h\mu)\},$$

also mit unendlich wachsendem h:

$$\lim h \int_0^a f(x) J^1(hx) dx = f(0) - (f(a) - f(0)) \lim \{J(ha) - J(h\mu)\},$$

woraus man wie oben:

$$\lim h \int_0^a f(x) J^1(hx) dx = f(0)$$

ableiten kann.

Es ist also für $\xi = 0$ und $n = 0$

$$\int_a^b x f(x) \Phi(x, h) dx = \begin{cases} 0 \\ f(0) \end{cases}, \tag{10}$$

je nachdem $a > 0$ oder $a = 0$.

Setzt man nun in (9) statt $\Phi(x, h)$ seinen Werth aus (1), so findet man das Integral:

$$(11) \qquad \lim \int_a^b x f(x) \int_0^h y J^n(yx) J^n(y\xi)\, dy = f(\xi),$$

welches wir in § 1. vorläufig aufstellten, in strenger Ableitung. Man hat hierin die Integration nach y zunächst auszuführen und die variable Grenze h einzusetzen, dann nach x zu integriren, die Grenzen a, b einzusetzen und endlich h ins Unendliche wachsen zu lassen. Wenn $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles immer endlich ist, so kann man die Integrationsordnung umkehren und schreiben:

$$\int_0^\infty y J^n(y\xi)\, dy \int_a^b x f(x) J^n(yx)\, dx = f(\xi),$$

Es ist bis jetzt, wie es die Anwendung obigen Lemma's forderte, in dem Intervall von a bis b, $f(x)$ immer nur zu- oder nur abnehmend vorausgesetzt worden; es leuchtet aber ein, dass man das Integral sofort auch auf Functionen ausdehnen kann, welche beliebig oft vom Wachsen ins Abnehmen und umgekehrt übergehen. Auch wird $f(x)$ unstetig oder gar unendlich werden können, wenn nur $\int f(x)\, dx$ endlich bleibt. Alles dies kann dahin zusammengefasst werden:

Unter denselben Bedingungen, welche die Fourier'schen Integrale für Kreisfunctionen der Function auferlegen, *ist das Integral, in dem immer* $b > a \geq 0$, $\xi \geq 0$

$$(12) \qquad \int_0^\infty y J^n(y\xi)\, dy \int_a^b x f(x) J^n(yx)\, dx) = \begin{cases} f(\xi) \\ 0 \end{cases},$$

je nachdem ξ *innerhalb oder ausserhalb des Intervalles* a, b *liegt. Fällt* ξ *mit einer der Grenzen zusammen, so ist der Werth* $\frac{1}{2} f(\xi)$. *Nur wenn* $a = 0$, *findet hiervon eine Ausnahme statt, wenn* $\xi = 0$ *mit dieser Grenze zusammenfällt, und zwar ist das Integral dann* $= f(0)$, *wenn* $n = 0$, *dagegen* $= 0$, *wenn* $n > 0$.

Es theilt also für $n > 0$ das Integral (12) genau die Eigenschaften des gewöhnlichen Fourier'schen Integrales für Sinus, im Falle $n = 0$ die des Cosinusintegrales.

Es bedarf kaum der Bemerkung, dass man unsere Integrale in ganz analoger Weise weiter behandeln kann als die gewöhnlichen Fourier'schen Integrale:

$$\int_0^\infty \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (y\xi)\, dy \int_a^b f(x) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (yx)\, dx = \frac{\pi}{2} f(\xi),$$

nur dass eine der Formel

$$\int_0^\infty dy \int_a^b f(x) \cos y\,(x-\xi)\,dx = \pi f(\xi)$$

entsprechende Zusammenfassung jetzt nicht existirt.

An Stelle von Gleichung (12) kann man ein Paar reciproker Gleichungen schreiben: Wenn

$$\int_0^\infty x f(x) J^n(y\,x)\,dx = \varphi(y)$$

gesetzt wird, so ist umgekehrt:

$$\int_0^\infty y \varphi(y)\, J^n(y\,\xi)\,dx = f(x).$$

Nur Einer Anwendung unseres Integrales (12), die uns im Folgenden von Nutzen sein wird, mag hier gedacht werden. Man kann, wenn $0 < \xi < a$ die Gleichung:

$$\int_0^\infty y J^n(y\xi)\,dy \int_0^a x J^n(k\,x) J^n(y\,x)\,dx = J^n(k\,\xi), \tag{13}$$

welche für ein reelles k direct aus (12) folgt, auch, wie man leicht sieht, für ein beliebiges complexes k in Anspruch nehmen. Die Integration nach x kann nun mittels (4) in § 1. ausgeführt werden und liefert, wenn

$$\int_0^\infty \frac{y J^n(y\,a) J^n(y\,\xi)}{y^2 - k^2}\,dy = -f(a) \cdot J^n(k\,\xi)$$

gesetzt wird, aus (13) die Differentialgleichung:

$$J^n(ka)\,\frac{\partial f(a)}{\partial a} - \frac{\partial J^n(ka)}{\partial a} f(a) = \frac{1}{a}.$$

für $f(a)$, die man auflösen kann, wenn man sich der Relation*) zwischen den Cylinderfunctionen erster und zweiter Art

$$J^n(x)\,\frac{\partial Y^n(x)}{\partial x} - \frac{\partial J^n(x)}{\partial x}\,Y^n(x) = \frac{2}{x} \tag{14}$$

erinnert; denn danach erhält man:

$$f(a) = \tfrac{1}{2}\left\{Y^n(ka) + \text{Const.}\, J^n(ka)\right\},$$

wo Const. zunächst von a unabhängig ist, und es noch fraglich bleibt, ob und wie sie von den übrigen Parametern ξ und k abhängt. Um nun in:

*) S. vorstehende Abhandlung p. 458.

$$(15)\quad \int_0^\infty y\,\frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{y^2-k^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}\,J^n(k\xi)\left\{Y^n(ka) + \text{Const.}\,J^n(ka)\right\}$$

diese Const. weiter zu bestimmen, bemerke man, dass aus (12) unter der Voraussetzung $\xi < a$ auch:

$$(16)\quad \int_0^\infty y\,J^n(ya)\,dy \int_0^\xi x J^n(kx)J^n(yx)\,dx = 0$$

folgt, und wiederum durch Ausführung der Integration nach x:

$$\frac{\partial J^n(k\xi)}{\partial \xi}\int_0^\infty y\,\frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{y^2-k^2}\,dy - J^n(k\xi)\int_0^\infty y\,\frac{J^n(ya)\,\dfrac{\partial J^n(y\xi)}{\partial \xi}}{y^2-k^2}\,dy = 0,$$

woraus

$$\int_0^\infty y\,\frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{y^2-k^2}\,dy = \text{Const.}\,J^n(k\xi)$$

folgt und diese Const. von ξ unabhängig ist. Vergleicht man dies mit (15), so sieht man, dass die Const. in (15) nicht von ξ abhängen kann. Führt man in (15) $k\xi = \xi'$, $ka = a'$, $y = ky'$ ein, so verschwindet k ganz aus dieser Formel, und Const. muss daher auch von k ganz unabhängig eine numerische Const. sein, die wir in vorstehender Abhandlung (p. 463) auf andere Weise $= -\pi i$ bestimmt haben.

Neben (13) und (16) besteht noch die Gleichung:

$$(17)\quad \int_0^\infty y J^n(ya)\,dy \int_0^a x J^n(kx)\,J^n(yx)\,dx = \tfrac{1}{2}\,J^n(ka);$$

trotz dieser Unstetigkeit für $\xi = a$ bleibt doch die Gleichung (15) auch für $\xi = a$ bestehen, wie aus der absoluten Convergenz des Integrales und seiner daraus folgenden Stetigkeit hervorgeht. Die Unstetigkeit wirft sich ganz auf den Differentialquotienten dieses Integrales nach a*).

Wird k reell und eine Wurzel der Gleichung $J^n(ka) = 0$, so geht (15) vermöge (14) in:

$$(18)\quad \int_0^\infty y\,\frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{y^2-k^2}\,dy = -\tfrac{1}{2}\,J^n(k\xi)\,Y^n(ka) = -\frac{1}{ka}\,\frac{J^n(k\xi)}{J^{n+1}(ka)}$$

über — ein Integral, von dem wir im Folgenden einen wesentlichen Gebrauch machen werden.

*) Ausführlicher ist dies oben (in § 3. der vorhergehenden Abhandlung) auseinandergesetzt.

§ 3.

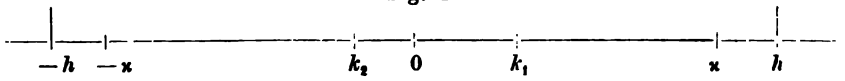
Entwickelung von $J^n(yx)$ in einer Reihe mit Rest.

Um die p. 475 besprochene Reihenentwickelung zu erhalten integriren wir:

$$\int \frac{J^n(tx)}{J^n(ta)} \frac{dt}{t-y}$$

auf complexem Gebiete t in positivem Sinne (d. h. umgekehrt wie der Zeiger der Uhr läuft) um ein Flächenstück, welches die Wurzeln $\pm k_1, \pm k_2, \cdots \pm \varkappa$ der Gleichung $J^n(ka) = 0$ und den Punkt $t = y$ umschliesst. Nehmen wir a und y als positive reelle Grössen an, so kann man als Integrationscurve etwa einen Kreis nehmen, der um $t = 0$ als Mittelpunkt beschrieben und so gross ist, dass er die Wurzeln $\pm \varkappa$ noch einschliesst, nicht aber die nächsten; sein Radius h soll zwischen $\varkappa$ und der nächstgrösseren liegen und von

Fig. 1.



beiden um ein Endliches verschieden sein. Ebenso nehmen wir zunächst an, dass y mit keiner Wurzel k zusammenfällt und $y < h$ ist. Dann haben wir nach den Principien der complexen Functionentheorie, wenn x von a verschieden ist, das Integral über den Kreis

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{J^n(tx)}{J^n(ta)} \frac{dt}{t-y} = \frac{J^n(yx)}{J^n(ya)} + \sum_{k}^{\pm\varkappa} \frac{J^n(kx)}{\frac{\partial J^n(ka)}{\partial k}} \frac{1}{k-y},$$

wo in der Summe alle positiven oder negativen Wurzeln von $J^n(ka)$ bis $k = \pm \varkappa$ zu substituiren sind, $k = 0$ aber *nicht* als Wurzel erscheint. Zieht man die Summenglieder für $\pm k$ zusammen, so findet man:

$$(1) \qquad J^n(yx) = \frac{2}{a} J^n(ya) \sum_{k}^{\varkappa} \frac{J^n(kx)}{J^{n+1}(ka)} \frac{k}{k^2 - y^2} + R_h,$$

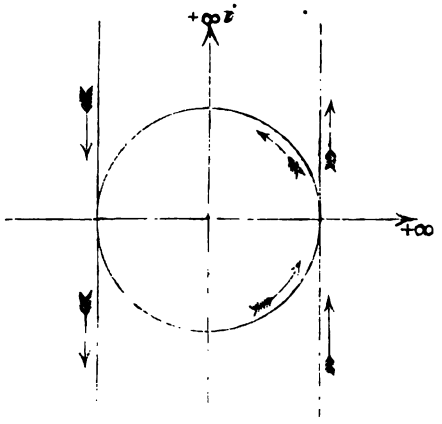
wo die $\sum$ über die positiven Wurzeln k bis $k = \varkappa$ auszudehnen und

$$R_h = \frac{J^n(ya)}{2\pi i} \int \frac{J^n(tx)}{J^n(ta)} \frac{dt}{t-y}$$

zu setzen ist. Letzteres Integral kann auf einen reellen Weg verlegt werden: Man kann nämlich jenen Kreis mit dem Radius h ersetzen durch das Integral über zwei der imaginären Axe parallele Gerade, welche die reelle Axe in den Punkten $\pm h$ schneiden. Das Integral,

welches im Unendlichen jene Geraden gewissermassen verbindet und dazu dient, um den Integrationsweg zu schliessen, verschwindet, wie

Fig. 2.



wie man aus dem asymptotischen Werthe von $J^n(\overline{h+zi}\,a)$ mit wachsendem z ersieht, der nach meinen Untersuchungen*)

$$J^n(\overline{h+zi}\,a) = \sqrt{\frac{2}{\pi a(h+zi)}}\, e^{-hai} e^{+za} e^{-\frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2})i}$$

beträgt; danach ist nämlich:

$$\frac{J^n(\overline{h+zi}\,x)}{J^n(\overline{h+zi}\,a)} = \sqrt{\frac{a}{x}}\, e^{+h(a-x)i} e^{z(x-a)}.$$

Wenn nun $x < a$, so nimmt dieser Quotient mit wachsendem z exponentiell ab; ist $x = a$, so bleibt er endlich. Beachtet man, dass für entgegengesetzte Werthe von t $\frac{J^n(tx)}{J^n(ta)}$ denselben Werth annimmt, so sieht man, dass für $x < a$:

$$R_h = \frac{J^n(ya)}{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J^n(\overline{h+zi}\,x)}{J^n(\overline{h+zi}\,a)} \frac{dz}{(h+zi)-y} + \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{J^n(\overline{-h+zi}\,x)}{J^n(\overline{-h+zi}\,a)} \frac{dz}{(-h+zi)-y}\right\}$$

gesetzt werden kann, oder, wenn man im letzten Integrale z durch $-z$ ersetzt:

$$R_h = \frac{1}{\pi} J^n(ya) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J^n(\overline{h+zi}\,x)}{J^n(\overline{h+zi}\,a)} \frac{(h+zi)\,dz}{(h+zi)^2-y^2}.$$

Dies Integral ist eine solche Function von h, welche sich nicht ändert, wenn h zwischen zwei Wurzeln k variirt, das aber plötzlich

*) S. diese Annalen Bd. I., p. 500.

seinen Werth ändert, wenn h über eine solche Wurzel hinweggeht, und zwar dabei um eines der Glieder der Reihe (1) wächst oder abnimmt. Ausserdem darf y dem Werthe h nicht unendlich nahe kommen, da das Integral sonst für $z = 0$ unendliche Elemente erhielte. Die Beschränkung aber, dass y auch keiner der Wurzeln k unendlich nahe kommen solle, kann ohne Weiteres aufgehoben werden, da in dem Integrale, welches den einen Factor von R_h bildet, in diesem Falle keine unendlichen Elemente auftreten und der andere Factor $J^n(ya)$ verschwindet. Es ist also $R_h = 0$ und es reducirt sich, wie man leicht sieht, die Reihe rechter Hand in (1) auf $J^n(yx)$. Endlich ist x als positive reelle Grösse vorausgesetzt, und zwar $x < a$, weil sonst das Integral an der oberen und unteren Grenze nicht convergiren würde. Zerlegen wir aber $\int_{-\infty}^{+\infty}$ in $\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}$ und vereinigen diese Integrale, so gestaltet sich R_h in die Form um:

$$(2)\quad R_h = \frac{1}{\pi} J^n(ya) \int_0^\infty \left\{ \frac{J^n(\overline{h+zi}\,x)}{J^n(\overline{h+zi}\,a)} \frac{h+zi}{(h+zi)^2-y^2} + \frac{J^n(\overline{h-zi}\,x)}{J^n(\overline{h-zi}\,a)} \frac{h-zi}{(h-zi)^2-y^2} \right\} dz,$$

welche einmal vor der obigen den Vorzug hat, dass die Function unter dem Integralzeichen eine reelle ist, andererseits auch für $x = a$ stetig und convergent bleibt, da sich dann das Integral auf:

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{h+zi}{(h+zi)^2-y^2} + \frac{h-zi}{(h-zi)^2-y^2} \right\} dz = 2h \int_0^\infty \frac{(h^2+z^2-y^2)\,dz}{(h^2-z^2-y^2)^2+4h^2z^2}$$

reducirt, in dem die Function an der oberen Grenze von zweiter Ordnung unendlich klein wird. Ausserdem kann noch in diesem Integrale $y = h$ gesetzt werden, da die unter dieser Voraussetzung für $z = 0$ entstehenden unendlichen Elemente sich in den beiden Gliedern der unter dem Integrale stehenden Summe gegenseitig compensiren.

Es gilt also diese Form des Restes, welche wir, die beiden conjugirten Werthe $h + zi = r$, $h - zi = r'$ setzend,

$$(3)\quad R_h = \frac{1}{\pi} J^n(ya) \int_0^\infty \left\{ \frac{J^n(rx)}{J^n(ra)} \frac{r}{r^2-y^2} + \frac{J^n(r'x)}{J^n(r'a)} \frac{r'}{r'^2-y^2} \right\} dz$$

schreiben wollen, unter den Bedingungen, dass $y \leqq h$, $x \leqq a$ und h zwischen x und der nächst grösseren Wurzel der Gleichung $J^n(ka) = 0$ liegt.

§ 4.

Entwickelung nach Cylinderfunctionen.

Wir bilden nun aus der für $x \leqq a$ gültigen Gleichung (1) des vorigen §:

$$(1)\quad \int_0^a x f(x) J^n(yx)dx = \frac{2}{a} J^n(ya) \sum^{\varkappa} \frac{k}{k^2-y^2} \frac{1}{J^{n+1}(ka)} \int_0^a x f(x)\, J^n(kx)dx + Q_h,$$

wo nach (3) desselben §:

$$(2)\quad Q_h = \frac{1}{\pi} J^n(ya) \int_0^{\infty} \left\{ \frac{r}{r^2-y^2} \frac{1}{J^n(ra)} \int_0^a x f(x) J^n(rx)dx + \frac{r'}{r'^2-y^2} \frac{1}{J^n(r'a)} \int_0^a x f(x) J^n(r'x)dx \right\}$$

zu setzen ist.

Es sind zunächst die hierin vorkommenden Integrale nach x in gewisse Grenzen einzuschlieszen, welche sich auf das Anwachsen des h beziehen. Dazu gehe man aus von dem Integrale

$$\int_0^a x f(x) \left\{ \sqrt{r}\, J^n(rx) + \sqrt{r'}\, J^n(r'x) \right\} dx,$$

dessen Elemente jedenfalls reell sind, und denke sich h, also auch r so gross, dass $J^n(rx)$, $J^n(r'x)$ durch ihre asymptotischen Werthe ersetzt werden können, und vorstehendes Integral demnach, wenn $\frac{1}{2}\pi(n+\frac{1}{2}) = \varrho$ gesetzt wird, in:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sqrt{x} f(x) \left\{ \cos(rx-\varrho) + \cos(r'x-\varrho) \right\} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sqrt{x} f(x) \left(e^{sx} + e^{-sx}\right) \cos(hx-\varrho)dx$$

übergeht. Man zerlege nun dies Integral in Intervalle von der Grösse $\frac{\pi}{h}$, so dass der $\cos(hx-\varrho)$ in jedem derselben sein Zeichen nicht ändert und genau dieselben, aber entgegengesetzten Werthe in auf einander folgenden Intervallen annimmt. Das Integral zerfällt so in $\frac{ah}{\pi}$ Intervalle von der Grösse $\frac{\pi}{h}$, deren Anzahl mit wachsendem h ins Unendliche wächst. Beachten wir jedoch, dass der Periodicität des $\cos(hx-\varrho)$ wegen die Integrale grösser oder kleiner sind, je nachdem $\sqrt{x} f(x) \left(e^{sx} + e^{-sx}\right)$ grösser oder kleiner ist, so wird die Summe aller jener Integrale kleiner sein als die Summe der Integrale, welche über diejenigen Intervalle $\frac{\pi}{h}$ erstreckt sind, in denen der letztere Factor sein Maximum erreicht. Wenn, wie vorausgesetzt werden soll, $f(x)$ innerhalb des Integrationsintervalles nur eine endliche Anzahl von

Maximis und Minimis besitzt, so ist dasselbe bei der Function $\sqrt{x}f(x)(e^{sx}+e^{-sx})$ der Fall, und es kann somit das obige Integral auf eine mit wachsendem h immer endlich bleibende Anzahl jener Intervalle $\frac{\pi}{h}$ reducirt werden. In jedem derselben kann man dann

$$\int_b^{b+\frac{\pi}{h}} x^n f(x)\left\{\sqrt{r}\,x^{-(n-1)}J^n(rx)+\sqrt{r'}\,x^{-(n-1)}J^n(r'x)\right\}dx,$$

weil der zweite Factor innerhalb des Integrationsintervalles sein Zeichen behält, nach dem gewöhnlichen Mittelsatze behandeln, und findet zufolge der Gleichung:

$$\int x^{-(n-1)}J^n(rx)\,dx=-\frac{1}{r}x^{-(n-1)}J^{n-1}(rx),$$

obiges Integral

$$=M\int_b^{b+\frac{\pi}{h}} x^{-(n-1)}\left\{\frac{J^{n-1}(rx)}{\sqrt{r}}+\frac{J^{n-1}(r'x)}{\sqrt{r'}}\right\}.$$

Dies Raisonnement ist jedoch nicht anwendbar auf die Elemente des obigen Integrales, welche der unteren Grenze nahe liegen, weil hier nicht die asymptotischen Werthe von $J^n(rx)$, $J^n(r'x)$ substituirt werden dürfen, und zwar wird dies so lange nicht geschehen dürfen, als xr mit wachsendem r endlich bleibt. Ist c eine endliche Grösse, so ist also das Integral:

$$\int_0^{\frac{c}{r}} xf(x)\left\{\sqrt{r}\,J^n(rx)+\sqrt{r'}\,J^n(r'x)\right\}dx$$

von dem obigen abzutrennen und besonders zu behandeln. Nach dem gewöhnlichen Mittelsatze aber hat man, da $\int_0^{\frac{c}{r}} x\,dx=-\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}$ jenes Integral

$$=-\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}f(\mu)\left\{\sqrt{r}\,J^n(r\mu)+\sqrt{r'}\,J^n(r'\mu)\right\},$$

wo μ einen Mittelwerth zwischen 0 und $\frac{c}{r}$ bezeichnet. Wie dieser nun auch beschaffen sein möge, es werden die beiden Glieder dieser Summe von der Ordnung $r^{-\frac{3}{2}}$ und daher für grosse r verschwindend gegen die Glieder von der Ordnung r^{-1} sein, in welche der andere Bestandtheil $\int_{\frac{c}{r}}^{a}$ zerlegt worden ist.

Man kann danach:

$$\int_0^a x f(x) \{\sqrt{r}\, J^n(rx) + \sqrt{r'}\, J^n(r'x)\}\, dx = \sum M \left\{ \frac{J^{n-1}(ra)}{\sqrt{r}} + \frac{J^{n-1}(r'a)}{\sqrt{r'}} \right\}$$

setzen, wo M ein mit wachsendem r jedenfalls nicht ins Unendliche wachsender Werth und die Summe über eine endliche Anzahl Glieder auszudehnen ist.

Ebenso würde sich

$$\int_0^a x f(x) \{\sqrt{r}\, J^n(rx) - \sqrt{r'}\, J^n(r'x)\}\, dx = \sum M' \left\{ \frac{J^{n-1}(ra)}{\sqrt{r}} + \frac{J^{n-1}(r'a)}{\sqrt{r'}} \right\}$$

ergeben und daher:

$$\int_0^a x f(x) J^n(rx)\, dx = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum \left\{ N \frac{J^{n-1}(ra)}{\sqrt{r}} + N' \frac{J^{n-1}(r'a)}{\sqrt{r'}} \right\},$$

wofür man auch, da $J^{n-1}(ra)$ niemals verschwinden kann (insofern, auch wenn $z = 0$, die Grösse $r = h$ doch keiner Wurzel $\varkappa$ gleich kommen soll), der Einfachheit wegen schreiben mag:

$$\int_0^a x f(x) J^n(rx)\, dx = \frac{J^{n-1}(ra)}{r} F(h, +zi),$$

wo $F(h, +zi)$ einen stets endlich bleibenden Ausdruck bezeichnet. Setzt man ferner

$$\int_0^a x f(x) J^n(r'x)\, dx = \frac{J^{n-1}(r'a)}{r'} F(h, -zi),$$

so unterscheidet sich $F(h, +zi)$ von $F(h, -zi)$ nur durch Vertauschung von r mit r', d. h. des Vorzeichens $+i$ mit $-i$.

Mittels dieser Werthe folgt jetzt aus (2):

$$(3)\quad Q_h = \frac{1}{\pi} J^n(ya) \int_0^\infty \left\{ \frac{J^{n-1}(ra)}{J^n(ra)} \frac{F(h, +zi)}{r^2 - y^2} + \frac{J^{n-1}(r'a)}{J^n(r'a)} \frac{F(h, -zi)}{r'^2 - y^2} \right\} dz,$$

Wir multipliciren nun Gleichung (1) mit $y J^n(y\xi)$ und integriren, wie dies erlaubt ist, zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = h$, so erhalten wir:

$$(4)\quad \int_0^h y J^n(y\xi)\, dy \int_0^a x f(x) J^n yx)\, dx$$

$$= \frac{2}{a} \sum_k^\varkappa \frac{k}{J^{n+1}(ka)} \int_0^h y \frac{J^n(ya) J^n(y\xi)}{k^2 - y^2} dy \cdot \int_0^a x f(x) J^n(kx)\, dx + S_h,$$

wo der Rest:

$$(5)\quad S_h = \frac{1}{\pi}\int_0^h dy \int_0^\infty \Big\{ \frac{J^{n-1}(ra)}{J^n(ra)}\, F(h, +zi)\cdot y\, \frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{r^2-y^2} + \frac{J^{n-1}(r'a)}{J^n(r'a)}\, F(h, -zi)\cdot y\, \frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{r'^2-y^2}\Big\} dz.$$

Lassen wir nun $\varkappa$ ins Unendliche wachsen, nicht stetig, sondern von einer Wurzel zur anderen springend, und entsprechend h, so dass etwa immer $(h-\varkappa)$ einer constanten Grösse gleich wird, so erhält die Summe in (4) $\varkappa$, also unendlich viele Glieder. Das Intetral linker Hand verwandelt sich dabei nach (12) in § 2. in $f(\xi)$ oder 0, je nachdem $\xi < a$ oder $\xi > a$.

Wir untersuchen nun zunächst den Rest (5). Ersetzen wir das Integral $\int_0^\infty$ nach z durch $\int_{z_0}^{z_\infty}$, wo wir z_0 schliesslich $= 0$, $z_\infty = \infty$ werden lassen, und betrachten, wie dies des unter den Integralzeichen vorkommenden h wegen nothwendig ist, auch h als eine endliche, zuletzt ins Unendliche wachsende Grösse, so ist ohne Zweifel die Umkehrung der Integrationsordnung erlaubt. Wir setzen dann, indem wir Gleichung (15) in § 2. benutzen, für $a > \xi > 0$:

$$(6)\quad \int_0^h y\, \frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{r^2-y^2}\, dy = \tfrac{1}{2}J^n(r\xi)\left\{Y^n(ra) - \pi i J^n(ra)\right\} + \int_h^\infty y\, \frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{y^2-r^2}\, dy,$$

und es handelt sich darum, letzteres Integral in Grenzen einzuschliessen: Wir können jedenfalls von Anfang an h so gross annehmen, dass sich in $\int_h^\infty$ die J-Functionen wesentlich auf ihre asymptotischen Werthe reduciren, so dass man:

$$\int_h^\infty y\, \frac{J^n(ya)J^n(y\xi)}{y^2-r^2}\, dy = \frac{1}{\pi\sqrt{a\xi}}\left\{\int_h^\infty \frac{\cos(a-\xi)y}{y^2-r^2}\, dy + (-1)^n \int_h^\infty \frac{\sin(a+\xi)y}{y^2-r^2}\, dy\right\}$$

erhält. Nun bemerke man, dass der positive und negative Theil des Integrales:

$$\int_h^\infty \frac{\sin}{\cos}(a\pm\xi)y\, \frac{}{\sqrt{y^2-(h+zi)^2}}\, dy$$

jedenfalls kleiner ist als:

$$\int_h^\infty \frac{\sin}{\cos}(a\pm\xi)y\, \frac{}{\sqrt{(y^2-h^2+z^2)^2+4h^2z^2}}\, dy,$$

in welchem Integrale statt $\{y^2-(h+zi)^2\}$ der Modul dieser Differenz gesetzt ist.

Man zerlege in letzteren Integralen das Intervall von h bis ∞ in einzelne Intervalle, von denen das erste, mit $y = h$ beginnend, bis zu dem nächsten Werthe von y reicht, für den der Zähler des betreffenden Integrales verschwindet. Von hier an zerlege man weiter das Integral in einzelne Intervalle, so dass der Zähler in jedem derselben einerlei Zeichens ist. Diese letzteren Integrale bilden eine regelmässig alternirende und (des zunehmenden positiven Nenners wegen) abnehmende Reihe, deren Gesammtsumme jedenfalls numerisch kleiner ist als das erste Glied. Dies erste Integral der regulären Reihe, zusammengenommen mit dem von h bis zum ersten Nullpunkte des Zählers erstreckten, wird aber jedenfalls numerisch kleiner sein als

$$\frac{1}{\sqrt{z^4+4h^2z^2}},$$

welches den Werth des grössten Moduls in dem ganzen Intervalle von h bis ∞ darstellt, multiplicirt mit einer gewissen endlichen Grösse, und wir können daher:

$$\int_h^\infty \frac{\sin}{\cos}(a\pm\xi)y \,\frac{}{\sqrt{(y^2-h^2+z^2)^2+4h^2z^2}} = \frac{c}{\sqrt{z^4+4h^2z^2}}$$

setzen, wo c eine unter allen Umständen endlich bleibende reelle Grösse bezeichnet.

Setzen wir nun auch in (6) statt des ersten Ausdruckes auf der rechten Seite den Modul seines asymptotischen Werthes, so kann man den Modul des Integrales für grosse h:

$$\text{(7)}\qquad \text{mod.}\int_0^h y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{r^2-y^2}\,dy = \frac{c}{z\sqrt{z^2+4h^2}}$$

setzen, wo c eine immer endlich bleibende Grösse bezeichnet.

Da nun in dem ersten Theile des Restes (5):

$$\text{(8)}\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^h dy\int_{z_0}^{z_\infty} dz\cdot\frac{J^{n-1}(ra)}{J^n(ra)}\,F'(h,+zi)\,y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{r^2-y^2}$$

die Grössen $\frac{J^{n-1}(ra)}{J^n(ra)}$, $F'(h,+zi)$, wie auch h ins Unendliche zunehmen möge, immer zwischen endlichen Grenzen schwanken, so können wir dies Integral

$$= M\int_0^h dy\int_{z_0}^{z_\infty} dz\,y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{r^2-y^2}$$

setzen, wo M eine jedenfalls endliche Grösse bezeichnet. Kehrt man hierin die Integration um und benutzt die Gleichung (7), so kann man das Integral (8)

$$= N \int_{z_0}^{z_\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+4h^2}}$$

setzen, wo auch N eine endlich bleibende Grösse ist.

Der Grenzwerth dieses Integrales ist aber leicht zu ermitteln; denn man hat:

$$\int_{z_0}^{z_\infty} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+4h^2}} = \frac{1}{2h}\log\{\sqrt{z_0^2+4h^2}+2h\} - \frac{1}{2h}\log z_0 - \frac{1}{2h}\log\frac{\sqrt{z_\infty^2+4h^2}+2h}{z_\infty}.$$

Was nun den letzten Logarithmus betrifft, so kann man ihn, wenn z_∞ schneller als h ins Unendliche wachsen soll:

$$\frac{1}{2h}\log\left\{\sqrt{1+\left(\frac{2h}{z_\infty}\right)^2}+\frac{2h}{z_\infty}\right\}$$

schreiben, welcher Ausdruck, wenn $2h : z_\infty$ endlich verschwindet, sich auf $\frac{1}{2h}\log 1$ reducirt und Null wird. Wenn sich h in demselben Grade ins Unendliche entfernt als z_∞, so dass sich $2h : z_\infty$ einem endlichen Grenzwerthe nähert, so wird vorstehender Ausdruck wenigstens durch das im Nenner stehende h verschwinden.

Wächst h schneller ins Unendliche als z_∞, so dass $\frac{z_\infty}{h}$ unendlich abnimmt, so kann man denselben Theil

$$\frac{1}{2h}\log\frac{\sqrt{1+\left(\frac{z_\infty}{2h}\right)^2}+1}{\frac{z_\infty}{2h}}$$

schreiben, der sich auf

$$\frac{1}{2h}\log\frac{4h}{z_\infty} = \frac{1}{2h}\log 4h - \frac{1}{2h}\log z_\infty$$

reducirt, und, wie man sieht, endlich auch verschwindet.

Ferner wird:

$$\frac{1}{2h}\log\{\sqrt{z_0^2+4h^2}+2h\},$$

was auch z_0 sei, mit unendlich wachsendem h verschwinden.

Es bleibt nur das Glied $\frac{1}{2h}\log z_0$ übrig, welches, wenn man z_0 eher zu Null abnehmen lässt, als h unendlich wachsen, dem Integrale unendliche Elemente zuzuführen scheint. Es rührt dieser Bestandtheil von dem Umstande her, dass in (8) für $y = h$ der Nenner den Factor z erhält. Wir haben aber schon oben p. 486 darauf hingewiesen, dass

sich diese unendlichen Elemente im ersten und zweiten Theile des Integrales (5) gegenseitig aufheben. Das aber wird jetzt ebenso der Fall sein und es werden sich die Glieder $-\frac{1}{2h}\log z_0$ in der Summe (5) ganz zerstören.

Diese Betrachtungen sind ohne Weiteres auch anwendbar auf den anderen Bestandtheil des Restes (5) und führen daher zu dem Resultat, *dass der Rest S_h mit wachsendem h unter alle Grenzen abnehmen wird, wenn $a > \xi > 0$.* Dieselbe Behauptung im Falle $\xi = 0$ wird durch eine Untersuchung des jetzt modificirten Integrales (6) ohne Schwierigkeit dargethan.

Unter denselben Voraussetzungen nähert sich daher die Summe in (4):

$$(9)\quad \frac{2}{a}\sum_{k}^{x}\frac{k}{J^{n+1}(ka)}\int_0^h y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{k^2-y^2}\,dy\cdot\int_0^a x f(x)J^n(kx)\,dx,$$

wenn $\xi < a$, mit wachsendem x und h unbegrenzt dem Werthe $f(\xi)$. Die Coefficienten aber können noch weiter bestimmt werden; denn mit Hülfe von (18) in § 2. hat man:

$$\int_0^h y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{k^2-y^2}\,dy = \frac{1}{ka}\,\frac{J^n(k\xi)}{J^{n+1}(ka)} + \int_h^\infty y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{y^2-k^2}\,dy.$$

Zur Bestimmung des letzteren Integrales kann man jetzt, wo k reell ist, ein ganz ähnliches Verfahren als vorhin für ein complexes r einschlagen und erhält so:

$$\int_h^\infty y\,\frac{J^n(ya)\,J^n(y\xi)}{y^2-k^2}\,dy = \frac{c}{h^2-k^2},$$

wo c jedenfalls eine endliche Grösse ist. Dadurch verwandelt sich die Summe in (9) in:

$$(10)\quad \frac{2}{a}\sum_{k}^{x}\frac{k}{J^{n+1}(ka)}\left\{\frac{1}{ka}\,\frac{J^n(k\xi)}{J^{n+1}(ka)}+\frac{c}{h^2-k^2}\right\}\int_0^a kf(x)J^n(kx)\,dx.$$

Man kann nun wie oben:

$$\int_0^a x f(x)J^n(kx)\,dx = \frac{J^{n-1}(ka)}{k}\,F(k)$$

setzen, wo $F(k)$ eine mit wachsendem k immer endlich bleibende Function ist, und hat daher:

$$(11)\quad \frac{2}{a}\sum_{k}^{\varkappa}\frac{k}{J^{n+1}(ka)}\,\frac{c}{h^2-k^2}\int_0^a xf(x)J^n(kx)\,dx=\frac{2}{a}\sum_{k}^{\varkappa}\frac{J^{n-1}(ka)}{J^{n+1}(ka)}\,\frac{cF(k)}{h^2-k^2}.$$

Vergleicht man nun diese Reihe mit der aus dem unendlichen Producte:

$$(ah)^{-n}J^n(ah)=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{h^2}{k^2}\right)$$

durch logarithmische Differentiirung nach h folgenden Reihe:

$$\frac{a}{2h}\,\frac{J^{n+1}(ah)}{J^n(ah)}=\sum_{k}^{\infty}\frac{1}{k^2-h^2},$$

die, wenn h, ohne je eine Wurzel k zu berühren, ins Unendliche wächst, zu Null abnimmt, so sieht man, dass ein Gleiches auch von der Reihe (11) gilt.

Aus (10) folgt nun, dass sich

$$\frac{2}{a^2}\sum_{k}^{\varkappa}\frac{J^n(n\xi)}{[J^{n+1}(ka)]^2}\int_0^a xf(x)J^n(kx)\,dx$$

mit wachsendem $\varkappa$ der Grenze $f(\xi)$ nähert, und es ist daher für jede Function $f(\xi)$ in dem Intervalle $a>\xi>0$ die Entwickelung:

$$(12)\qquad f(\xi)=2\sum{}'\frac{J^n(k\xi)}{[aJ^{n+1}(ka)]^2}\int_0^a xf(x)J^n(kx)\,dx$$

statthaft, worin die Function $f(\xi)$ in Bezug auf ihre zulässigen Unstetigkeiten ganz denselben Bedingungen unterliegt, unter denen Dirichlet die nach trigonometrischen Functionen fortschreitenden Fourier'schen Reihen erwiesen hat, nämlich, dass $f(x)$ in dem Intervalle von 0 bis a weder unendlich viele Unterbrechungen der Stetigkeit, noch unendlich viele Oscillationen hat, an den Unstetigkeitsstellen $f(\xi)$ das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerthe darstellt, denen sich $f(\xi\pm\delta)$ nähere, und nicht so unendlich wird, dass $\int f(x)\,dx$ zu convergiren aufhörte.

Für $\xi=a$ hört die Gleichung (12) zu gelten auf, indem sich die rechte Seite auf Null reducirt. Dasselbe findet für $\xi=0$ statt, wenn $n>0$. Im Falle $n=0$ aber stellt die Reihe für $\xi=0$ auch noch den Werth $f(0)$ dar.

Tübingen, 16. Mai 1869.

Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.

Zweiter Aufsatz*).

Von M. Nöther in Erlangen.

Seit der Veröffentlichung meines ersten Aufsatzes im II. Bande der Mathem. Annalen hat die Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Curven und Flächen von mehreren Seiten her Erweiterungen oder Ergänzungen erfahren. In diesem Aufsatze sollen nun dieselben, soweit sie in meiner in den Göttinger Nachrichten vom Februar 1873 enthaltenen Note**) gegeben sind, ausgeführt und ausserdem die Beziehungen zwischen den verschiedenen Arbeiten dargelegt werden.

Diese Arbeiten gehen nach zwei Richtungen hin: die einen beschäftigen sich mit der Aufstellung von *numerischen* Transformationsrelationen, in welche die Ordnungs- und Singularitätenzahlen der beiden auf einander bezogenen Gebilde eingehen, die andern untersuchen solche zu einem Gebilde gehörige *Functionen*, welche in Bezug auf das transformirte Gebilde in analog definirte Functionen übergehen. Wenn die letzteren Definitionen unter Umständen illusorisch werden können, in welchen die ersteren Relationen noch bestehen bleiben, so liefern dieselben dafür im Allgemeinen die *geometrische Bedeutung* der Zahlencombinationen, aus welchen sich diese Relationen zusammensetzen.

Von den Arbeiten der ersten Richtung sind zunächst die geometrischen Untersuchungen von Hrn. Zeuthen***) wichtig. Indem derselbe zwei sich entsprechende Curven in *eine* Ebene legt und durch Einführung einer Hülfscurve auf einander bezieht, gelingt ihm die Herstellung des Criteriums der Gleichheit des *Geschlechts* in der einfachsten

*) S. den ersten Aufsatz Mathem. Ann. II, p. 293.

**) p. 248: „Ueber die algebr. Functionen. Note V: Zwei neue Criterien des eindeutigen Entsprechens algebraischer Flächen."

***) Mathem. Ann. III, p. 150: „Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes", und Mathem. Ann. IV, p. 215 Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un."

Weise*). Die Abhandlung im IV. Bande der Annalen enthält die Verallgemeinerung desselben Gedankens auf *Flächen*, wobei sich nicht nur die numerische Gleichung, welche die Gleichheit des Flächengeschlechts ausdrückt, sondern noch eine zweite neue Gleichung ergiebt, in welche freilich ein scheinbar von den Transformationsausdrücken selbst abhängiges Glied eingeht.

Ferner hat Clebsch, wie mir Hr. Brill nach einem von Clebsch hinterlassenen Fragment eines Vorlesungsheftes über Abel'sche Functionen mitgetheilt hat, durch Betrachtung der Zerlegung einer Transformation in zwei successive einen einfachen Beweis des Geschlechtssatzes für Curven abgeleitet. Ich werde diesen Beweis, unter Ausdehnung auf höhere singuläre Punkte einer Curve, hier (§ 1.) mittheilen. Wenn man denselben in der hier gewählten Form darstellt, so bemerkt man, dass er nichts anderes als die *algebraische Formulirung* des Zeuthen'schen Beweises ist. Auch die Verallgemeinerung des algebraischen Beweises auf *Flächen*, die ich in den §§ 3.—6. durchführe, stimmt im Wesentlichen mit dem Zeuthen'schen Gedankengange überein, dessen Resultate, von anderer Seite betrachtet, hier wiedergefunden werden.

Der Grundgedanke dieses algebraischen Beweises des Satzes für Curven hat mich noch auf einen weitern solchen Beweis (§ 2.) geführt, der ebenfalls einfacher ist als der algebraische in dem Werke von Clebsch und Gordan.

Die zweite Richtung schliesst sich an den Geschlechtsbegriff an, welcher für *Curven* von Hrn. Brill und mir, Mathem. Ann. VII**), entwickelt worden ist. Dem Invariantencharakter der einer Curve n^{ter} Ordnung „adjungirten" Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung analog, existirt eine Beziehung für die Flächen $(n-4)^{ter}$ Ordnung, welche einer Fläche n^{ter} Ordnung „adjungirt" sind. Die Identität, welche diese Beziehung ausdrückt, ist dieselbe, auf welche ich auch in dem ersten Aufsatze geführt werde; wesentlich ist jedoch, dass diese Gleichung hier an die Spitze der Untersuchung tritt. Da der Beweis durch den in Mathem. Ann. VI***) gegebenen Satz, welcher auch hier als ein fundamentaler auftritt, wesentlich vereinfacht wird, und ferner einige aus dem Beweise der Gleichung folgende Verhältnisse zu betrachten sind, so habe ich deren Ableitung nochmals durchgeführt (§ 9).

---

*) Für Curven war derselbe Beweis auch von Bertini, Giorn. di Matem. VII, gegeben worden.

**) p. 269: „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie."

***) p. 351: „Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen."

Aus dieser Identität folgen ausser der Gleichheit des Flächengeschlechtes p für $p > 1$ noch zwei weitere Criterien, die Gleichheit zweier weiterer Zahlen $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$, zwischen denen jedoch eine *für alle Fälle gültige lineare Relation* besteht, so dass ich nur für die erstere Zahl eine Bezeichnung „Curvengeschlecht" wähle. Das durch $12p - p^{(1)}$ gegebene Criterium ist, numerisch ausgeführt, im Wesentlichen identisch mit der zweiten der oben erwähnten Zeuthen'schen Relationen. Ein Unterschied jedoch besteht darin, dass an Stelle des von den Transformationsausdrücken abhängigen Gliedes der letzteren ein Glied tritt, das sich auf „ausgezeichnete" Curven der Flächen, die sich im Voraus angeben lassen, bezieht. Diese zweite Relation hat also die merkwürdige Eigenschaft, sich, wie die erste, als ein Criterium der Transformirbarkeit auffassen zu lassen (§ 10.—12.).

Endlich giebt der § 13. eine Ausdehnung dieser Betrachtungen auf algebraische *Gebilde von 3 Dimensionen*, § 8. Untersuchungen über das Geschlecht einer *Raumcurve* durch Aufstellung von Flächen, welche derselben „adjungirt" sind.

---

§ 1.

Ueber Clebsch's Beweis des Geschlechtssatzes bei algebraischen Curven.

Clebsch hat für den Beweis des Satzes von der Erhaltung der Geschlechtszahl p bei eindeutiger Transformation einer Curve den folgenden einfachen Gedanken ausgesprochen:

Die Transformation der Gleichung $f(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, in der s bis zum n^{ten}, z bis zum m^{ten} Grade ansteigt, zerlege man in zwei successive, indem man zunächst eine rationale Function σ von s und z an Stelle von s, sodann in der resultirenden Gleichung $f'(\overset{n}{\sigma}, \overset{m'}{z}) = 0$ eine zweite rationale Function ζ von σ und z an Stelle von z einführt. Betrachtet man bei der ersten Transformation s, bezüglich σ, als Function von z, so bleibt die Zahl n, sowie die Anzahl ω der Verzweigungspunkte der über der z-Ebene ausgebreiteten Riemann'schen Fläche, welche s und σ darstellt, unverändert. Analoges findet für zwei Zahlen m', ω' bei der zweiten Transformation statt, wenn man z als Function von σ betrachtet. Man hat daher nur nachzuweisen, dass eine Combination der beiden Zahlen n, ω, welche der Auffassung von σ als Function von z zugehören, sich nicht ändert, wenn man statt dessen z als Function von σ auffasst, um in einer solchen Combination

$$\left(p = \frac{\omega}{2} - n + 1 = \frac{\omega'}{2} - m' + 1\right)$$

eine für die ganze Transformation invariante Zahl zu erkennen.

Ich führe hier diesen Gedanken in etwas anderer und verallgemeinerter Form durch. Die gegebene Curve habe, in homogenen Coordinaten, die Gleichung $f(x_1 x_2 x_3) = 0$, und diese gehe vermöge der Transformationsformeln und deren Umkehrung

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x),$$
$$x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(y) : \psi_2(y) : \psi_3(y)$$

über in $f_1(y_1 y_2 y_3) = 0$. Wir schalten in diese Transformation eine Curve $f'(z_1 z_2 z_3) = 0$ ein vermittelst:

$$z_1 : z_2 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x); \qquad z_2 : z_3 = x_2 : x_3,$$

so dass man auch für den Uebergang von $f'(z) = 0$ in $f_1(y) = 0$ die Formeln erhält:

$$z_1 : z_2 = y_1 : y_2; \qquad z_2 : z_3 = \psi_2(y) : \psi_3(y).$$

Bei der ersten Transformation, zwischen f und f', entsprechen sich der Schnitt von f mit dem Geradenbüschel $x_2 + \lambda x_3 = 0$ und der Schnitt von f' mit dem Geradenbüschel $z_2 + \lambda z_3 = 0$ eindeutig. Die Anzahl n der beweglichen Schnittpunkte einer Geraden des ersten Büschels ist also dieselbe wie die des zweiten Büschels.

Sei weiter ω die Anzahl aller derjenigen Geraden durch den Punkt $P(x_2 = x_3 = 0)$, welchen bei der Transformation Tangenten an f' entsprechen können; also die Anzahl der Geraden durch P, welche f entweder in einem nicht in P fallenden Punkte berühren oder durch einen nicht in P liegenden Rückkehrpunkt von f gehen. Wenn f einen höhern singulären Punkt ausserhalb P besitzt, so sind für diesen in ω so viele Geraden einzurechnen, als ihm bei einer Transformation überhaupt Tangenten entsprechen können; wobei an P unendlich nahe herangerückte vielfache Punkte auch als ausserhalb P liegend zu betrachten sind.

Sei nun ω' die analoge Zahl in Bezug auf f' und das Geradenbüschel durch $P'(z_2 = z_3 = 0)$. Die Eindeutigkeit der Transformation ergiebt

$$\omega' = \omega.$$

Aehnliches gilt für die Transformation von f' in f_1 und für die sich hierbei entsprechenden Geradenbüschel $z_1 + \mu z_2 = 0$ und $y_1 + \mu y_2 = 0$. Die betreffenden Zahlen seien n_1 und ω_1. Wir wollen zeigen, dass

$$\frac{\omega}{2} - n = \frac{\omega_1}{2} - n_1$$

ist, dass also die Zahl $\frac{\omega}{2} - n$, welche für f' dem Geradenbüschel durch P' zugehört, bei Verlegung des Scheitels des Büschels in einen beliebigen Punkt P_1' (oder, was dasselbe ist, für eine beliebig linear transformirte Curve f' ohne Aenderung des Geradenbüschels) unverändert bleibt.

P' sei ein i-facher, P_1' ein i_1-facher Punkt von f'. Nun ist die oben definirte Zahl ω für ein Büschel mit dem Scheitel in dem i-fachen Punkte P' um $2i$ kleiner, als für ein Büschel, dessen Scheitel ein ausserhalb der Curve gelegener Punkt ist. Dieses findet auch dann statt, wenn P' ein beliebig singulärer Punkt ist, wie eine einfache Transformation, welche den singulären Punkt P' auflöst, ergiebt*). Ist z. B. P' ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt, so modificirt derselbe die Zahl ω für die beiden Büschel nur wie ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Hieraus folgt für den Uebergang von P' zu P_1' die Beziehung

$$\omega_1 + 2i_1 = \omega + 2i$$

und da weiter

$$n_1 + i_1 = n + i,$$

so ergiebt sich die zu beweisende Relation.

Die Curve f' wird, wenn f, f_1 bez. von den Ordnungen n, n_1 und keine besonderen Coordinatensysteme zu Grunde gelegt waren, von der Ordnung $n + n_1$, mit einem n_1-fachen Punkte in P', n-fachen Punkte in P_1', die keine besondere Singularität zeigen. Diese Curve ist genau die Zeuthen'sche Hülfscurve, von der Zeuthen zum Beweise des Geschlechtssatzes auf doppelte Weise die Classe aufsucht, was mit unserem Verfahren im Wesentlichen übereinkommt. Unsere Modification des Zeuthen'schen Verfahrens lässt sich auch bei mehrdeutigem Entsprechen von Curven ebenso durchführen.

§ 2.

Neuer Beweis des Geschlechtssatzes bei Curven.

Die Betrachtung von Berührungscurven führt noch auf einen andern Weg zur Aufstellung des Satzes von der Erhaltung der Zahl p.

Wir vergleichen in Bezug auf die beiden Curven

$$f(x) = 0, \qquad f_1(y) = 0,$$

die wieder durch die Formeln

$$y_1 : y_2 : y_3 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x)$$

eindeutig auf einander bezogen seien, direct das Geradenbüschel

$$\Sigma \alpha_i y_i + \lambda \Sigma \beta_i y_i = 0$$

mit dem ihm entsprechenden Curvenbüschel

$$\Sigma \alpha_i \varphi_i + \lambda \Sigma \beta_i \varphi_i = 0,$$

indem wir die Berührungscurven beider Büschel aufsuchen, wobei wir aber die Zahl der „Berührungscurven" in demselben Sinne, wie in § 1.

*) S. die Note in den Gött. Nachr. vom 7. Juni 1871, p. 267.

die Zahl ω, auffassen, also eine durch einen Rückkehrpunkt gehende Gerade des ersten Büschels mit einzählen.

Seien die Ordnungen von f, f_1 bez. n und n_1; die φ_k, von der Ordnung s, mögen durch jeden i-fachen Punkt von f j-fach gehen und ausserdem α feste einfache Punkte auf f besitzen. Man hat dann zunächst

$$n_1 = sn - \Sigma ij - \alpha ,$$

und für die Zahl ω der Berührungsgeraden des ersten Büschels mit f_1, wenn man die vielfachen Punkte von f_1 als i_1-fache Punkte bezeichnet:

$$\omega = n_1(n_1 - 1) - \Sigma i_1(i_1 - 1).$$

Um die Berührungspunkte der f berührenden Curven des zweiten Büschels zu finden, hat man die Functionaldeterminante D der drei Functionen f, $\Sigma \alpha_i \varphi_i$, $\Sigma \beta_i \varphi_i$ aufzustellen und den, nicht in die festen Schnittpunkte von f mit allen φ fallenden Schnitt von $f = 0$, $D = 0$ aufzusuchen. Nun ist D von der Ordnung $n - 1 + 2(s-1)$, und $D = 0$, $f = 0$ treffen sich in jedem der α festen Punkte zweipunktig, in einem i-fachen Punkte von f, der j-facher Punkt für die φ ist, $i(i+2j-1)$-punktig, wie wir sogleich zeigen werden. Daher ist die Zahl der Berührungscurven

$$\omega = n(n + 2s - 3) - \Sigma i(i + 2j - 1) - 2\alpha .$$

Die drei hier gefundenen Beziehungen liefern durch Elimination von ω und $sn - \Sigma ij - \alpha$ sogleich die gesuchte Gleichung:

$$n(n-3) - \Sigma i(i-1) = n_1(n_1 - 3) - \Sigma i_1(i_1 - 1) .$$

Das Verhalten der Functionaldeterminante D in einem singulären Punkte von f erkennt man aber direct, indem man die Glieder niedrigster Ordnung von D für diesen Punkt bildet. Für einen solchen Punkt ($x_1 = x_2 = 0$) sei, nach aufsteigenden Potenzen von x_3 geordnet:

$$f \equiv x_3^{n-i} f_i(x_1 x_2) + \cdots ,$$
$$\Sigma \alpha_i \varphi_i \equiv x_3^{s-j} \psi_j(x_1 x_2) + \cdots ,$$
$$\Sigma \beta_i \varphi_i \equiv x_3^{s-j} \chi_j(x_1 x_2) + \cdots ,$$

wo f_i eine homogene Function i^{ter} Ordnung in x_1, x_2 bedeutet etc. Dann wird das Glied niedrigster Ordnung in x_1, x_2 für D:

$$\begin{vmatrix} x_3^{n-i} f_i'(x_1) & x_3^{n-i} f_i'(x_2) & (n-i) x_3^{n-i-1} f_i \\ x_3^{s-j} \psi_j'(x_1) & x_3^{s-j} \psi_j'(x_2) & (s-j) x_3^{s-j-1} \psi_j \\ x_3^{s-j} \chi_j'(x_1) & x_3^{s-j} \chi_j'(x_2) & (s-j) x_3^{s-j-1} \chi_j \end{vmatrix} ,$$

oder, indem man in der letzten Verticalreihe ψ_j, χ_j zerstört, proportional mit

$$(jn-is)f_i(x_1x_2)\cdot\{\psi_j'(x_1)\chi_j'(x_2)-\psi_j'(x_2)\chi_j'(x_1)\}\,.$$

Hieraus folgt, dass $D=0$ den Punkt $(x_1=x_2=0)$ zum $(i+2j-2)$-fachen Punkte hat, wobei i Tangentenrichtungen mit denen von $f=0$ zusammenfallen. In dem besondern Falle $jn-is=0$ erhält $D=0$ einen $(i+2j-1)$-fachen Punkt. In beiden Fällen treffen sich $D=0$, $f=0$ in $(x_1=x_2=0)$ $i(i+2j-1)$-punktig. Dies wird dadurch nicht geändert, dass mehrere der Tangentenrichtungen in dem i-fachen Punkte von f zusammenfallen können; wohl aber kann eine Modification eintreten, wenn bei f auch die Glieder höherer Ordnung in x_1, x_2, als der i^{ten}, Singularitäten zeigen. Man hat aber dann nur den singulären vielfachen Punkt von f aufzufassen als eine Reihe von (zusammengerückten) gewöhnlichen vielfachen Punkten, wie sie sich durch eine eindeutige Ebenentransformation ergeben, und die obige Zahl der Schnittpunkte auf jeden dieser vielfachen Punkte, als ob sie getrennt lägen, zu beziehen; denn bei einer eindeutigen Transformation gehen Berührungscurven in ebensolche, und eine Functionaldeterminante dreier Curven in eine solche der transformirten Curven über. Dieselbe Auffassung der singulären Punkte gilt in der bewiesenen Gleichung auch für das Glied $\Sigma i_1(i_1-1)$.

Die in § 1. durch die Formel

$$p=\frac{\omega}{2}-(n-1)$$

und in diesem § durch die Formel

$$p=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\Sigma i(i-1)$$

numerisch aufgestellte Zahl p für das Geschlecht der Curve f ist unabhängig von der *Lage* der vielfachen Punkte von f; sie stimmt daher überein mit derjenigen Zahl p, welche in dem Aufsatze von Hrn. Brill und mir*) durch den Zusammenhang der Curve f mit ihren „adjungirten" Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung definirt worden ist.

§ 3.

Flächentransformation.

Der Gedankengang des § 1., der auf Einführung von successiven Transformationen beruht, lässt sich direct auf algebraische *Flächen* ausdehnen.

Mögen die Flächen

$$f(x_1x_2x_3x_4)=0\,,\qquad f_1(y_1y_2y_3y_4)=0$$

eindeutig in einander übergeführt sein mittelst der Formeln:

*) Diese Annalen Bd. VII, p. 283.

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = \varphi_1(x) : \varphi_2(x) : \varphi_3(x) : \varphi_4(x) ,$$
$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1(y) : \psi_2(y) : \psi_3(y) : \psi_4(y) .$$

Wir ersetzen diese Transformation durch drei auf einander folgende, indem wir zwei neue Flächen

$$f_2(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4) = 0 , \qquad f_3(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4) = 0$$

mittelst der Formeln einschalten:

$$\xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = x_2 : x_3 : x_4 , \qquad \xi_1 : \xi_4 = \varphi_1(x) : \varphi_4(x) ;$$
$$\eta_1 : \eta_2 : \eta_4 = y_1 : y_2 : y_4 , \qquad \eta_3 : \eta_4 = \psi_3(y) : \psi_4(y) ,$$

woraus noch weiter folgt:

$$\eta_1 : \eta_3 : \eta_4 = \xi_1 : \xi_3 : \xi_4 , \qquad \eta_2 : \eta_4 = \varphi_2'(\xi) : \varphi_4'(\xi) ,$$
oder $$\xi_2 : \xi_4 = \psi_2'(\eta) : \psi_4'(\eta) .$$

Jede dieser 3 Transformationen $(x\xi)$, $(\xi\eta)$, (ηy), durch welche die gegebene (xy) ersetzt worden ist, hat nun die charakteristische Eigenschaft, dass immer ein *Ebenenbündel* existirt, welches in Bezug auf die transformirte Fläche wieder in ein solches, und zwar *linear*, übergeführt wird.

Hierbei wird also weiter der in dem ersten Bündel enthaltene Tangentenkegel an die Fläche linear in einen ebensolchen an die transformirte Fläche transformirt, und beide Kegel zeigen genau dieselben Singularitäten. Fügt man noch die Beziehungen hinzu, welche zwischen den Singularitätenzahlen zweier Tangentenkegel existiren, die von zwei verschiedenen Punkten aus an dieselbe Fläche gezogen werden, so erhält man Beziehungen zwischen den Singularitätenzahlen der beiden Flächen f, f_1 selbst, die aber noch von der Art der Transformation abhängen können.

Dies ist, in etwas anderer Form, der von Hrn. Zeuthen in Mathem. Annalen IV eingeschlagene Weg zur Aufstellung von Transformationsrelationen.

Insbesondere entsteht hier die Frage, ob sich allein aus den Plücker'schen Zahlen des Tangentenkegels einer Fläche Combinationen herstellen lassen, welche unverändert bleiben, wie man auch den Scheitel des Tangentenkegels verlegen mag; oder aber, wenn das nicht der Fall sein sollte, ob es doch zur Bildung von Transformationsrelationen genügt, eine einzige der speciellen Transformationen zu betrachten. Da eine solche Frage an sich von Interesse ist, werden wir von diesem Gesichtspunkte aus den Zeuthen'schen Entwickelungen in der citirten Abhandlung folgen. Wir verweisen dabei, um Wiederholungen zu vermeiden, direct auf einzelne Ausführungen dieser Arbeit, und beschränken uns auf den Fall, der zum Vergleich mit unsern

spätern Untersuchungen hinreicht, dass die Fläche keine Rückkehrcurve und keine vielfachen Knotenpunte mit besondern Singularitäten besitzt.

§ 4.

Beziehungen zwischen verschiedenen Tangentenkegeln einer Fläche.

Wir vergleichen in Bezug auf eine Fläche f von der n^{ten} Ordnung zwei *Tangentenkegel* mit einander, von denen der eine, K, seinen Scheitel in dem nicht auf f liegenden Punkte P, der andere, K_0, in einem i-fachen Punkte P_0 von f habe.

Für den i-fachen Punkt P_0 von f gelte Folgendes: eine durch P_0 gehende Gerade treffe f noch in n_0 weitern Punkten. Die Fläche enthalte vielfache (j-fache) Geraden G_j, welche von P_0 ausgehen; ferner möge auf einer Geraden G_j noch ein k-facher ($k>j$) Knotenpunkt P_k von f liegen, dessen die Fläche osculirender Kegel Q_k die Classe ν_k habe. Die Classe des in P_0 die Fläche osculirenden Kegels Q sei ν. Mit β_j bezeichnen wir die Anzahl der durch G_j gehenden Ebenen, welche die Fläche in zwei aufeinanderfolgenden, in G_j (nicht in dem i- oder k-fachen Punkte von f) gelegenen Punkten berühren; wobei vorausgesetzt sei, dass keine Ebene existirt, welche f längs G_j berührt.

Der von P_0 ausgehende Tangentenkegel K_0 an f hat die Eigenschaft, die Gerade G_j als vielfache Gerade zu besitzen. Die Tangentenebenen von K_0 längs G_j sind die β_j soeben bezeichneten Ebenen, ferner die $(\nu_k - 2j)$ Ebenen, welche den Kegel Q_k ausserhalb G_j berühren, und endlich die j Tangentenebenen, welche Q_k längs G_j besitzt, diese letztern doppelt genommen. G_j wird also $(\beta_j + \nu_k)$-fache Erzeugende von K_0, in welcher Vielfachheit j Rückkehrerzeugende eingeschlossen sind. — Dies ergiebt sich, indem man die erste Polare des Punktes P_0 in Bezug auf f mit f schneidet; denn diese Polare hat G_j zur j-fachen Geraden, den k-fachen Punkt P_k auf G_j zum $(k-1)$-fachen Punkt, aber mit denselben Tangentenebenen in G_j, wie Q_k. Man weiss ferner, dass diese Polare im Punkte P_0 denselben osculirenden Kegel Q, wie f hat, sowie dieselben in P_0 $(i+2)$-punktig schneidenden Geraden. Ein ganz analoges Verhalten zeigt auch die zweite Polare des Punktes P_0 in Bezug auf f.

Da man ebenso das Verhalten der Polaren eines beliebigen Punktes P kennt, so hat es keinerlei Schwierigkeit, ausser der Ordnung auch die Classe und die Anzahl der Rückkehrerzeugenden, und damit sämmtliche Plücker'sche Zahlen der beiden Tangentenkegel K und K_0 zu vergleichen. Ohne dass wir diese, etwas längere, Rechnung hier wiedergeben, dient uns die Uebereinstimmung des Resultats derselben mit dem im Folgenden auf einem anderen, directeren Wege durchgeführ-

ten Vergleiche als Beweis für die Richtigkeit gewisser Zahlencoefficienten, die auf diesem letzteren Wege nur durch Betrachtung specieller Fälle sich bestimmen würden.

Wir bezeichnen mit a, a_0 die *Ordnung* von K, bez. K_0; mit n', n_0' deren *Classen*, mit c', c_0' die Anzahlen ihrer *stationären Tangentenebenen* oder Wendeerzeugenden.

Man hat zunächst:

$$n = n_0 + i, \tag{1}$$

$$a = a_0 + \nu + 2i. \tag{2}$$

Um n' aus n_0' abzuleiten, bemerke man*), dass die Verbindungsgerade (PP_0) der beiden Punkte P und P_0 eine ν-fache Erzeugende des Kegels K ist. Daher ist $n' = 2\nu +$ der Anzahl der Ebenen, welche durch (PP_0) gehen und f in einem Punkte ausserhalb P_0 berühren. Diese Ebenen sind die n_0' Tangentenebenen an K_0, und die Ebenen durch (PP_0) und die Geraden G_j, welche letzteren, indem sie noch in ϱ_j Punkten von G_j berühren (wo $\varrho_j = (n-j) - (i-j) - (k-j) = n - i - k + j$ sein wird), für ϱ_j Tangenteneben zählen. Somit ergiebt sich:

$$n' = n_0' + 2\nu + \Sigma \varrho_j, \tag{3}$$

wo die Summe über alle j-fachen Geraden G_j zu nehmen ist.

c' ist die Anzahl der stationären Tangentenebenen von f, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen. Von den durch P_0 gehenden Ebenen dieser Art fallen aber einige in die in P_0 oder in den Geraden G_j singulär berührenden Ebenen von f**). Es sind dieses 1) die stationären Tangentenebenen des osculirenden Kegels Q, welche doppelt zählen, also $2 \cdot 3(\nu - i)$ Ebenen; 2) die Ebenen, welche Q längs der Erzeugenden berühren, die f $(i+2)$-punktig in P_0 treffen; Ebenen, in welche auch die j Tangentenebenen von Q längs G_j einzuschliessen sind; diese Ebenen zählen alle dreifach und liefern die Zahl $3(\nu+2i)$; 3) die β_j (man findet leicht, dass $\beta_j = 2j(n-i-k+j-1)$ ist) früher bezeichneten stationären Ebenen durch eine Gerade G_j, welche ebenfalls dreifach zählen; und 4) die j Tangentenebenen, welche den in dem Punkte P_k einer Geraden G_j osculirenden Kegel Q_k längs G_j berühren, Ebenen, deren Berührungsgeraden in der von den stationären Tangentenebenen von f eingehüllten Fläche ebenfalls durch P_0 gehen und die also doppelt zählen. Die übrigen stationären Ebenen durch P_0 sind die c_0' Ebenen dieser Art auf dem Tangentenkegel K_0. Daher hat man:

*) Vgl. die citirte Abh. Zeuthen's, Nr. 23.

**) Vgl. dieselbe Abh., Nr. 26.

$$c' = c_0' + 6(\nu - i) + 3(\nu + 2i) + 3\Sigma\beta_j + 2\Sigma j$$

oder

$$(4) \qquad c' = c_0' + 9\nu + 3\Sigma\beta_j + 2\Sigma j\,.$$

In Bezug auf diese letztere Formel ist zu bemerken, dass das letzte Glied $2\Sigma j$ sich nur über solche Gerade G_j erstreckt, auf welchen k-fache Punkte P_k liegen, für die $k > j$ ist.

Die Gleichungen (1) bis (4) liefern alle Relationen, welche zwischen zwei verschiedenen Tangentenkegeln einer Fläche existiren. Es lässt sich aus denselben keine Combination der Plücker'schen Zahlen eines Kegels K_0 und des zugehörigen n_0 ableiten, welche keine Singularitätenzahlen der Fläche in dem Scheitelpunkte des Kegels enthält und doch bei beliebiger Verlegung dieses Scheitels erhalten bleibt*).

*) Da es von Interesse ist, die Zahlen n' und c' einer Fläche f gerade für die Form, in welcher in diesen Untersuchungen die Singularitäten der Fläche auftreten, in ausgerechneter Gestalt zu kennen, so füge ich die Formeln hier an. Dieselben ergeben sich, indem man die in meinem Aufsatze „Sulle curve multiple di superficie algebriche" (Annali di Matem. ser. II, t. 5, p. 162) mitgetheilten Formeln auf den Schnitt der Fläche mit ihren Polaren anwendet.

Die Fläche n^{ter} Ordnung besitze j-fache Curven C_j von der Ordnung m_j und dem Range r_j; eine Curve C_j habe s_{jj} wirkliche Doppelpunkte und treffe eine Curve $C_{j'}$ in weiteren $s_{jj'}$ Punkten ($j \leqq j'$). Ferner besitze die Fläche k-fache Knotenpunkte P_k, durch welche eine Curve C_j mit h_{jk} Zweigen gehe und deren osculirender Kegel (ohne weitere vielfache Kanten) die Classe ν_k habe.

Die Classe der Fläche wird:

$$n' = n(n-1)^2 - \sum_j (j-1)\left\{(3j+1)n - 2j(j+1)\right\} m_j + \sum_j j^2(j-1) r_j$$
$$+ \sum_{jj'} (j-1)\left\{(3j+1)j' - j(j+1)\right\} s_{jj'} - \sum_k (k-1)\nu_k$$
$$+ \sum_{jk} (j-1)(2j+1)(k-j) h_{jk}\,;$$

die Classe der Enveloppe der stationären Tangentenebenen:

$$c' = 4n(n-1)(n-2) - \sum_j 2j(j-1)\left\{(3n-2j-2)2m_j - (2j-1)r_j\right\}$$
$$+ \sum_{jj'} 4j(j-1)(3j'-j-1) s_{jj'}$$
$$- \sum_k (4k-5)\nu_k + \sum_{jk} 8j(j-1)(k-j) h_{jk}\,,$$

wobei die $\sum_{jk}$ auf alle durch die Punkte P_k gehenden Zweige der Curven C_j, die $\sum_{jj'}$ auf alle ausserhalb der P_k liegenden Schnittpunkte je zweier Curven C_j oder wirklichen Doppelpunkte einer Curve C_j auszudehnen ist.

In Bezug auf Modificationen dieser Formeln in speciellen Fällen verweise ich auf meinen oben citirten Aufsatz.

§ 5.

Die specielle Flächentransformation.

Führen wir nun die Fläche f eindeutig in eine Fläche f_1 über, mittelst einer *speciellen* Transformation, in welcher dem Ebenenbündel durch den Punkt P_0 in Bezug auf f_1 das Ebenenbündel durch einen Punkt P_{01} *linear* entspricht. P_{01} sei ein i_1-facher Punkt von f_1. Auch die übrigen auf f bezüglichen Bezeichnungen behalten wir hier für f_1 bei, indem wir nur den Index 1 anfügen.

Die auf f gelegenen Fundamentalpunkte der Transformation seien die auf den Geraden G_j gelegenen k-fachen Punkte P_k, wobei übrigens auch $j = 0$ sein darf. Ausserdem wird noch P_0 ein Fundamentalpunkt. Den Punkten P_k werden auf f_1 vielfache Geraden G_{j_1} durch den Punkt P_{01} entsprechen. Einer Geraden G_j selbst entspricht alsdann ein auf G_{j_1} gelegener k_1-facher Punkt P_{k_1}. Ist $j = 0$, so existirt auf G_{j_1} kein Punkt P_{k_1}; umgekehrt wird auch $j_1 = 0$ sein, wenn der Punkt P_k nicht vorhanden ist.

Dem Ebenenbüschel durch die Gerade G_j entspricht hierbei das Ebenenbüschel durch die Gerade G_{j_1}; und zwar den Berührungspunkten von f mit einer Ebene des ersten Büschels auf G_j die Kantenrichtungen an dem f_1 osculirenden Kegel des Punktes P_{k_1}, welche in der entsprechenden Ebene durch G_{j_1} liegen. Daher ist (vgl. § 4.):

$$\varrho_j = k_1 - j_1 \quad , \qquad \varrho_{j_1} = k - j \quad ,$$
$$\beta_j = \nu_{k_1} - 2j_1 \, , \qquad \beta_{j_1} = \nu_k - 2j \, ,$$

und für $j = 0$: $\varrho_j = 0$, $\varrho_{j_1} = k$, $\beta_j = 0$, $\beta_{j_1} = \nu_k$ zu setzen. Der Tangentenkegel K_0 vom Punkte P_0 aus geht linear in den vom Punkte P_{01} aus an f_1 gehenden Tangentenkegel K_{01} über. Nun ist G_j für K_0 eine $(\beta_j + \nu_k)$-fache Erzeugende; G_{j_1} für K_{01} eine $(\beta_{j_1} + \nu_{k_1})$-fache Erzeugende, daher folgt

$$\beta_j + \nu_k = \beta_{j_1} + \nu_{k_1} \, .$$

Führt man hier die Werthe von β_j und β_{j_1} ein, so ist diese Gleichung erfüllt, *im Falle* $j = 0$ *oder* $j_1 = 0$ *ist. Andernfalls folgt:*

$$j = j_1 \, .$$

Den Gleichungen (1) bis (4) des § 4. entsprechen 4 ähnliche Gleichungen in Bezug auf f_1 für den Uebergang vom Punkte P_{01} zu einem beliebigen, ausserhalb f_1 gelegenen Punkte P_1, Gleichungen, in denen die Zahlen mit dem Index 0 dieselben bleiben, wie in denen des § 4.:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= n_0 + \quad i_1 , \\
a_1 &= a_0 + \quad \nu_1 + 2 i_1 , \\
n_1' &= n_0' + 2\nu_1 + \quad \Sigma \varrho_{j_1} , \\
c_1' &= c_0' + 9\nu_1 + 3\Sigma \beta_{j_1} + 2\Sigma j_1 ,
\end{aligned}
$$

wo wieder in der letzten Summe Σj_1 das auf G_{j_1} bezügliche Glied wegzulassen ist, wenn $j = 0$ $(k_1 = j_1)$ ist.

Verbindet man diese Gleichungen mit denen des § 4. und berücksichtigt die in diesem § aufgestellten Relationen, so ergeben sich folgende zwei Transformationsbeziehungen, welche unabhängig sind von den auf die Punkte P_0, P_{01} allein bezüglichen Zahlen:

(I) $\quad n_1' - 2a_1 + 3n_1 + \Sigma\mu_1 = n' - 2a + 3n + \Sigma\mu ,$

(II) $\quad c_1' - 12a_1 + 24n_1 + 3\Sigma\nu_1 = c' - 12a + 24n + 3\Sigma\nu .$

Hierbei ist $\Sigma\mu = i + \Sigma k$, und bedeutet also die Summe der Vielfachheiten *aller* auf f gelegenen Fundamentalpunkte, $\Sigma\nu$ die Summe der Classen ihrer osculirenden Kegel. In diese Summen können ferner, wie wir annehmen wollen, auch vielfache Knotenpunkte auf f, die nicht Fundamentalpunkte sind, einbegriffen werden. Aehnlich für $\Sigma\mu_1$, $\Sigma\nu_1$.

In einem *speciellen Falle*, den wir besonders erwähnen wollen, weil wir ihn auch noch später zu behandeln haben werden*), erleidet diese Formel (I) eine Modification. Sei P_μ ein Punkt, in welchem eine μ-fache und eine μ'-fache $(\mu > \mu')$ Curve von f, C und C', zusammentreffen, ohne weitere Singularität; und mögen die Transformationsflächen nur durch die μ'-fache Curve C', nicht auch durch C, hindurchgehen**). Von den μ Tangentenebenen von f im Punkte P_μ fallen μ' zusammen. Den Richtungen innerhalb der übrigen $\mu - \mu'$ Tangentenebenen in P_μ entsprechen die Punkte einer $(\mu - \mu')$-fachen Geraden G_{j_1} in f_1, für welche denn $\varrho_{j_1} = \mu - \mu'$ wird. Der Curve C entspricht in f_1 ebenfalls eine μ-fache Curve, welche die Gerade G_{j_1} in einem Punkte P_{μ_1} trifft; und in diesem Punkte existiren noch μ' nicht durch G_{j_1} gehende Tangentenebenen, den μ' zusammenfallenden Ebenen P_μ entsprechend. Aber dieser Punkt P_{μ_1} modificirt die Zahl $n_1' - n_0'$ nicht. Man hat also in Formel (I), von P_μ herrührend, in $\Sigma\mu$ das Glied $\mu - \mu'$ aufzunehmen. In Formel (II) tritt kein von P_μ oder P_{μ_1} herrührendes Glied auf.

---

*) S. § 9., l. c).

**) Da ein solcher Punkt keine Fundamentalrichtung (vgl. Zeuthen's Aufsatz p. 24, Nr. 7) hat, so ist er auch bei den Zeuthen'schen Betrachtungen zuzulassen, wo er als aus $\mu - \mu'$ einfachen getrennten Fundamentalpunkten bestehend aufzufassen ist, denen allen aber dieselbe Curve entspricht.

§ 6.

Die allgemeine Flächentransformation.

Gehen wir jetzt auf die 3 successiven speciellen Transformationen zurück, in welche im § 3. die *allgemeine* Flächentransformation zerlegt worden ist. Für jede dieser speciellen Transformationen gelten Relationen von der Form (I) und (II) des § 5. Aber die Gleichung (II) enthält kein Glied, das von der besondern Art der Transformation abhängig ist. Die eine Seite der Gleichung bleibt daher beim Uebergang durch die 3 Transformationen unverändert, d. h. die Relation (II) bleibt bestehen, durch welche Art von Transformation auch der Uebergang von f zu f_1 geschieht.

Die Gleichung (I) enthält das Glied $\Sigma\mu - \Sigma\mu_1$, das insoweit von der Transformation selbst abhängt, als es sich auf *einfache* Punkte von f oder f_1 als Fundamentalpunkte bezieht. Denkt man sich aber eine beliebige eindeutige Transformation (13) irgendwie ersetzt durch zwei successive Transformationen (12) und (23), und existiren bei der Transformation (13) μ_{13} Fundamentalpunkte in 1, μ_{31} solche in 3, welche einfache Punkte in 1, bez. 3 sind, ebenso bei der Transformation (12) bezüglich μ_{12} und μ_{21}, bei (23) bezüglich μ_{23} und μ_{32} solcher Punkte, so hat man die Beziehung:

$$(\mu_{12} - \mu_{21}) + (\mu_{23} - \mu_{32}) = \mu_{13} - \mu_{31},$$

denn jeder in μ_{13} auftretende Punkt muss auch entweder in μ_{12} oder in μ_{23} enthalten sein, jeder in μ_{31} auftretende Punkt entweder in μ_{21} oder in μ_{32}; die übrigen Fundamentalpunkte der Transformationen (12), (23) aber sind entweder in μ_{12} und μ_{32} oder in μ_{21} und μ_{23} enthalten, fallen also in der linken Seite der Gleichung hinweg. Dieselbe Relation gilt auch für die vielfachen Punkte irgend einer Ordnung der 3 Flächen.

Hieraus folgt sogleich, dass die Relation (I) zwischen den Zahlen zweier Flächen f und f_1 ebenfalls gültig ist, welcher Art auch die eindeutige Transformation zwischen diesen Flächen ist.

Auch die Bemerkung über den speciellen Fall am Ende des § 5. bleibt für die allgemeine Transformation bestehen.

Wir werden in § 12. auf die Formel (I) noch zurückkommen, indem wir nachweisen werden, dass sie ebenfalls, wie (II), ein *Criterium der Transformirbarkeit* zweier gegebenen Flächen f, f_1 in einander bietet, dass nämlich das Glied $\Sigma\mu - \Sigma\mu_1$ sich direct, ohne Kenntniss der Transformationsgleichungen selbst, angeben lässt.

§ 7.

Der Restsatz für Flächen. Adjungirte Flächen.

Indem wir jetzt die rein *algebraische* Behandlung des Transformationsproblems für Flächen in Angriff nehmen, bieten sich nach der Analogie der bei einer ebenen Curve angewandten Methoden zwei Wege dar. Man kann einmal die auf einer Fläche gelegenen *Curvenschaaren* auf eine ähnliche Weise untersuchen, wie es für die Schaaren von Punktgruppen einer Curve in dem Aufsatze von Hrn. Brill und mir, diese Annalen Bd. VII, geschehen ist. Oder man kann von dem Nachweise der *identischen Gleichung* ausgehen, auf welche auch die Untersuchung in meinem ersten Aufsatze (diese Annalen II, p. 314) führt.

In beiden Fällen hat man sich auf den Satz zu stützen, den ich in den Mathem. Ann. VI (p. 358) bewiesen habe, und der in der speciellen Form, wie er hier auftritt, so lautet:

„Wenn eine Fläche $C = 0$ durch den vollständigen Schnitt zweier Flächen $A = 0$, $B = 0$ so hindurchgeht, dass sie jede i-fache Curve von $A = 0$, die k-fache Curve von $B = 0$ ist, zur $(i+k-1)$-fachen Curve hat, so besteht eine Identität

$$C = \alpha A + \beta B ,$$

wo auch α und β ganze Functionen der Coordinaten sind. Hierbei ist das Verhalten von C in einzelnen singulären Punkten der Schnittcurven von A und B gleichgültig."

Aus diesem Satze folgt sogleich ein weiterer, der *Restsatz für Flächen**). Wir bezeichnen eine Fläche, welche jede j-fache Curve einer Fläche f zur $(j-1)$-fachen Curve hat, als eine *der Fläche f adjungirte Fläche*. Wenn der weitere Schnitt einer f adjungirten Fläche mit f in zwei Curven C_1 und C' zerfällt, so bezeichnen wir C' als *Residual-* oder *Restcurve* von C_1, und umgekehrt C_1 als Restcurve von C'. Irgend eine andere der Curve C_1 residuale Curve C'' auf f bezeichnen wir als der Curve C' *corresidual*. Man hat den Restsatz:

„Sind auf einer algebraischen Fläche die Curven $C', C'', \cdots$ einander corresidual in Bezug auf eine Curve C_1, so sind sie es auch in Bezug auf jede andere Curve $C_2, C_3, \cdots$, welche zu einer von ihnen (etwa C'') residual ist."

Es ist also dann auch C'', C_2 der vollständige Schnitt einer f adjungirten Fläche mit f etc. Geht durch C_1 eine ∞^q-Schaar von f adjungirten Flächen, welche eine ∞^q-Schaar von Curven C' aus f aus-

*) Vgl. die Abhandlung von Hrn. Brill und mir, Mathem. Ann. VII, p. 271.

schneidet, so kann man auch durch C_2 eine ∞^q-Schaar von f adjungirten Flächen legen, welche *dieselbe* Schaar von Curven C' aus f ausschneidet.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich wörtlich aus dem in der eben citirten Abhandlung für Curven geführten, weshalb wir denselben hier unterdrücken können.

Es mögen hier die weitern Bezeichnungen, von welchen im Folgenden Gebrauch gemacht werden wird, angefügt werden. Eine einer Fläche n^{ter} Ordnung, f, adjungirte Fläche $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche noch in jedem k-fachen Knotenpunkte von f einen $(k-2)$-fachen Punkt besitzt, sei als *der Fläche f adjungirte Fläche φ* oder als *Fläche φ_f* bezeichnet.

Ferner sei eine *Raumcurve* C als Schnitt zweier Flächen F_1, F_2 gegeben, welche sich noch in weitern Curven schneiden, und zwar sei jede solche j_1-fache Curve C_j von F_1 zugleich j_2-fache Curve von F_2; ein k_1-facher Knotenpunkt P_k von F_1 k_2-facher Punkt von F_2. Die Ordnungen von F_1, F_2 seien bez. n_1 und n_2. Wir bezeichnen die Flächen der Ordnung $n_1 + n_2 - 4$, welche jede der Schnittcurven C_j von F_1, F_2, ausser C selbst, zur $(j_1 + j_2 - 1)$-fachen Curve, einen Knotenpunkt P_k in solcher Vielfachheit besitzen, dass sie jeden der durch denselben gehenden Zweige von C in $(k_1 + k_2 - 2)$ Punkten treffen, und welche ausserdem durch einen etwaigen weitern Berührungspunkt von F_1, F_2 hindurchgehen, als *der Curve C adjungirte Flächen φ* oder als *Flächen φ_C*. Die Definition der Flächen φ_C ist also abhängig von der Erzeugungsart der Curve C. Ein specieller Fall sind die einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung, C, adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

§ 8.

Die einer Raumcurve adjungirten Flächen φ.

Als eine Anwendung des Restsatzes geben wir zunächst den Beweis des *Geschlechtssatzes für Raumcurven*, von dem wir weiterhin Gebrauch zu machen haben.

Nach der für ebene Curven in der vorher citirten Abhandlung angenommenen Auffassung handelt es sich dabei um die Frage: welches sind, bei der in § 7. gegebenen Erzeugung einer Raumcurve C, die Flächen, welche C in der ∞^{p-1}-Schaar von Gruppen von je $2p-2$ Punkten schneiden, und welche bei einer Transformation von C in eine ebene Curve, vom Geschlecht p und der Ordnung n, in die dieser adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung übergehen?

Wir werden zeigen, dass es die in § 7. definirten, der Curve C adjungirten Flächen φ_c sind.

Zunächst zeigen wir, dass, ohne Aenderung des Schnittes mit C, die in Bezug auf die gegebene Erzeugung von C definirten Flächen φ_C, bei beliebiger Abänderung der Erzeugung von C (also wenn man C durch andere Flächen ausschneidet), in solche Flächen übergehen, welche in Bezug auf die neue Erzeugung der Definition der φ_C genügen.

Man lege an Stelle von F_1 durch die Raumcurve C eine neue Fläche F_3, von der Ordnung n_3, welche auch durch den weitern Schnitt von F_1, F_2 geht, und zwar eine j_2-fache Curve C_j von F_2 noch zur j_3-fachen Curve hat, wobei indess auch $j_3 = 0$ sein darf. F_3 wird dann F_2 noch in einer weitern Curve C' schneiden. Man kann nun den beweglichen Schnitt von F_2 mit den in Bezug auf die erste Erzeugung $(F_1 F_2)$ definirten Flächen φ_C völlig ersetzen durch den Schnitt von F_2 mit den in Bezug auf die Erzeugung $(F_2 F_3)$ definirten Flächen φ_C. Denn man hat, wenn man die erstern Flächen mit φ_1 bezeichnet, eine Gleichung:

$$\varphi_1 F_3 = \varphi_2 F_1 + A F_2 ,$$

da $\varphi_1 F_3$ durch den vollständigen Schnitt von F_1 und F_2 in genügend hoher Vielfachheit geht. Aber $\varphi_1 F_3$ hat eine Curve C_j zur $(j_1+j_2+j_3-1)$-fachen Curve; daher verhalten sich die Flächen φ_2, welche von der Ordnung $n_2 + n_3 - 4$ werden, in Bezug auf F_2 wie Flächen, die C_j zur (j_2+j_3-1)-fachen Curve haben; ferner gehen die φ_2 durch die Curve C', durch einen Berührungspunkt von F_1, F_2, und treffen in einem Punkte P_k, der k_2-facher Punkt von F_2, k_3-facher Punkt von F_3 ist, die durch P_k gehenden Zweige von C noch (k_2+k_3-2)-punktig. Die φ_2 sind also für die Erzeugung $(F_2 F_3)$ C adj. Flächen φ_C, und sie sind in Bezug auf F_2 den Flächen φ_1 coresidual.

In der Schaar der φ_1 sind auch die Flächen

$$\Phi_2 F_1 + \Phi_1 F_2 = 0$$

enthalten, wo Φ_1 eine zu F_1 adjungirte Fläche φ der $(n_1-4)^{\text{ten}}$ Ordnung, Φ_2 eine solche zu F_2 adj. Fläche $(n_2-4)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellt. Für $F_2 = 0$ gehen diese Flächen $\Phi_2 F_1 = 0$ in die in den φ_2 enthaltenen Flächen $\Phi_2 F_3 = 0$ über. Solche Flächen aber, welche alle C selbst enthalten, seien aus der Schaar der φ_1 oder der φ_2 ausgeschlossen.

Wir denken uns nun die Veränderung der Erzeugung der Curve C weiter fortgesetzt, indem wir dieselbe aus F_3 an Stelle von F_2 durch eine Fläche F_4 ausschneiden. In Bezug auf F_3, also auch in Bezug auf die auf F_3 gelegene Curve C, kann man alsdann die Schaar der Flächen φ_2 durch die Schaar der C adjungirten Flächen φ_C, welche zur Erzeugung $(F_3 F_4)$ gehören, ersetzen.

Insbesondere wählen wir zu diesen beiden Flächen den von einem beliebigen Punkte P aus über C beschriebenen Kegel K, von der m^{ten} Ordnung, wenn m die Ordnung von C ist, und eine Fläche L von der n^{ten} Ordnung, welche durch C geht und in P einen $(n-1)$-fachen Punkt besitzt. Seien deren Gleichungen:

$$K = f_m = 0\,,$$
$$L = x_1 f_{n-1} + f_n = 0\,,$$

wo die f_i Functionen i^{ter} Ordnung von x_1, x_2, x_3 sind. Der vollständige Schnitt von K und L besteht, da eine Erzeugende des Kegels L nur in P und C trifft, aus den Geraden, in welchen sich $f_{n-1}=0$ und $f_n=0$ treffen, und von denen ein Theil von P aus nach den scheinbaren Doppelpunkten von C geht, die Doppelgeraden des Kegels K. Ausserdem treffen sich $f_m=0$, $f_{n-1}=0$ nicht mehr. Die nach einem wirklichen k-fachen Punkte von C, P_k, gehende Gerade wird eine k-fache Gerade von K werden, und sie sei l-fache Gerade von L oder f_{n-1}.

Die Flächen φ_C sind hier Flächen der Ordnung $m+n-4$, welche, ihrer Definition nach, durch den vollständigen Schnitt von f_m und f_{n-1} in solcher Vielfachheit gehen, dass eine Identität existirt:

$$\varphi_C = Bf_m + Af_{n-1}\,.$$

In Bezug auf $f_m=0$ lässt sich daher die Schaar der Flächen φ_C ersetzen durch die Flächen A, Flächen der Ordnung $(m+n-4)-(n-1)=m-3$, welche durch die Doppelgeraden von K noch einfach, durch eine k-fache Gerade (PP_k) noch $(k-1)$-fach gehen. Nur für einen Punkt P_k, für welchen $l=0$ ist, brauchen die Flächen A nicht durch die Gerade (PP_k), wohl aber durch P_k auch $(k-1)$-fach zu gehen.

Zu solchen Flächen A gehören insbesondere die Kegel $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, K_{m-3}, welche ihren Scheitel in P, und alle j-fachen Geraden des Kegels K als $(j-1)$-fache Gerade haben. Umgekehrt ist jede Fläche

$$K_{m-3}\cdot f_{n-1}$$

eine der Definition der φ_C genügende. Nun treffen die K_{m-3} die Curve C in einer ∞^{p-1}-Schaar von Gruppen von je $2p-2$ Punkten, wo p das Geschlecht von C ist. Und da alle Flächen A, welche auf C mit den K_{m-3} dieselben festen Punkte gemein haben, C in Gruppen von je $2p-2$ Punkten schneiden müssen, von denen überhaupt nur eine ∞^{p-1}-Schaar existirt, so gehen alle A vermöge der Gleichung

$$x_1 f_{n-1} + f_n = 0$$

in Flächen K_{m-3} über.

Wir haben somit unsern Satz bewiesen, dass die in Bezug auf

die erste Erzeugung $(F_1 F_2)$ von C definirten Flächen φ_C ohne Aenderung des Schnittes mit C durch die Flächen K_{m-3} ersetzt werden können.

Ein Theil dieses Satzes, nämlich dass C von den Flächen φ_C in Gruppen von je $2p-2$ Punkten getroffen wird, hätte im Voraus erkannt werden können. Denn diese Flächen verhalten sich in dem weitern Schnitt der C erzeugenden Flächen F_1 und F_2 der Vielfachheit nach genau wie eine Fläche

$$\Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{\partial F_2}{\partial x_4} = 0 .$$

Aber diese Fläche bestimmt durch ihren Schnitt mit C diejenigen Punkte von C, deren Tangenten eine Gerade mit den Coordinaten $\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i$ treffen, also die Classe r von C; die Flächen φ_O, deren Ordnung um 2 kleiner ist, als die dieser Fläche, treffen C somit in Gruppen von $r - 2m = 2p - 2$ Punkten.

Wie diese Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte mit C zu einer numerischen Formel für das Geschlecht p von C führt, so liefert auch die Berechnung der Mannigfaltigkeit der Schaar der Flächen φ_C, bei der die durch C gehenden Flächen von der Form

$$\Phi_2 F_1 + \Phi_1 F_2 = 0$$

nach dem Obigen auszuscheiden sind, eine Formel für p, welche mit der ersteren übereinstimmen muss. Dies muss auch dann noch gelten, wenn vermöge der den φ_C aufgelegten Bedingungen Φ_1 oder Φ_2 identisch verschwindet, also die zuletzt angegebene geometrische Bedeutung der *einzelnen* Glieder der numerischen Formel nicht mehr stattfindet. Man hat daher eigentlich dem Geschlecht p nur eine *geometrische* Beziehung zur Mannigfaltigkeit der Schaar der φ_C, der dafür aufgestellten *numerischen* Formel eine andere Beziehung, die zur Classe von C, zuzuschreiben.

Wir wollen hier noch beifügen, dass man auch einen auf Aufstellung einer *identischen Gleichung* beruhenden Beweis des Geschlechtssatzes für Raumcurven, dem zweiten der in § 7. erwähnten Wege analog, versuchen kann. Es mögen die Flächen F_1, F_2 mittelst einer Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Theta_1(y) : \Theta_2(y) : \Theta_3(y) : \Theta_4(y)$$

übergehen in

$$F_1 = M_1 f_1(y) + M_2 f_2(y) ,$$
$$F_2 = N_1 f_1(y) + N_2 f_2(y) ,$$

so, dass für $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ entweder auch $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ oder $M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0$ wird.

Sei D die Determinante der $\Theta_i(y)$ und $\Phi(x)$ eine in Bezug auf die Erzeugung $(F_1 F_2)$ von C genommene Fläche φ_C, so hat man zu zeigen, dass

$$D\Phi(\Theta) = A(M_1N_2 - M_2N_1) + B_1f_1 + B_2f_2 ,$$

wobei A eine in Bezug auf die Erzeugung (f_1f_2) der transformirten Curve C' genommene Fläche $\varphi_{C'}$ werden soll. Hierzu wäre im Allgemeinen nöthig, die Bedingungen zu kennen, welchen eine Fläche f zu genügen hat, damit, bei gegebenen Functionen f_1, f_2, f_3, ihre Gleichung die Form hat:

$$f = A_1f_1 + A_2f_2 + A_3f_3 ,$$

Bedingungen, die noch nicht festgestellt worden sind. Nur wenn f_2 eine Ebene wird, lässt sich der Beweis der Identität durchführen; und wenn hierdurch auch gezeigt ist, dass die φ_C zu der gesuchten Flächenschaar gehören, so würde doch der umgekehrte Nachweis, dass die φ_C auch diese Schaar erschöpfen, im Wesentlichen wieder den Gedankengang dieses § verlangen*).

§ 9.

Die einer Fläche adjungirten Flächen φ.

Zur Untersuchung der bei einer *Flächentransformation* auftretenden Relationen schlage ich hier den zweiten der in § 7. bezeichneten Wege ein.

Die in Bezug auf eine Fläche f definirten adjungirten Flächen φ_f haben eine ausgezeichnete Bedeutung, welche derjenigen analog ist, welche in dem Aufsatz von Hrn. Brill und mir (diese Annalen VII) für die einer ebenen Curve adjungirten Curven $(n-3)^{ter}$ Ordnung algebraisch nachgewiesen worden ist: sie haben ebenfalls für jede eindeutige Transformation von $f = 0$ in eine Fläche $f_1 = 0$ *Invarianteneigenschaft.* D. h. *bei einer solchen Transformation gelt der bewegliche*

*) Der Beweis der obigen Identität wäre auch für die Normirung der Integrale erster Gattung für Raumcurven in der Clebsch'schen Abhandlung im 63. Bande von Borchardt's Journal auszuführen.

Ich benutze diese Gelegenheit zu einer Bemerkung über die in dieser Abhandlung von Clebsch angeführte Erzeugung einer Raumcurve (p. 219). Daselbst wird die Definition des *theilweisen* Schnittes zweier Flächen durch successive Einführung von Flächen niedrigerer Ordnung, die jeweils durch die Restschnittcurve hindurchgelegt werden, auf die Definition einer *vollständigen* Schnittcurve zweier Flächen zurückgeführt. Man kann diese Definition nicht so auffassen, dass sie alle existirenden Raumcurven liefert. Dies folgt z. B. aus einem Satze des Hrn. Halphen, Comptes Rendus, t. 70, p. 381, oder aus leicht anzugebenden speciellen Fällen. So giebt es zweierlei Raumcurven 8^{ter} Ordnung, vom Geschlecht 5, welche der theilweise Schnitt zweier Flächen 4^{ter} Ordnung sind; wobei sich denn auch die beiden Flächen noch in einer Raumcurve derselben Art schneiden. Durch die erste Art von Raumcurven kann man noch eine Fläche 3^{ter} Ordnung legen, durch die zweite jedoch keine Fläche von niedrigerer Ordnung als der vierten.

Schnitt von f mit den Flächen φ_f in den beweglichen Schnitt von f_1 mit Flächen φ_{f_1} über, welche der für die φ gegebenen Definition in Bezug auf f_1 entsprechen.

Denn möge die Fläche $f(x) = 0$ vermöge der Transformation

$$x_i = \vartheta_i(y) \quad \cdots \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

in eine Fläche $f_1(y) = 0$ übergehen, indem man erhalte

$$f(\vartheta(y)) = M_1 f_1(y) . \tag{1}$$

Sei D_1 die Functionaldeterminante der Transformationsausdrücke $\vartheta(y)$ nach den Coordinaten y. Zum Beweise des ausgesprochenen Satzes genügt der Nachweis, dass eine Identität

$$\varphi(\vartheta(y)) \cdot D_1 = \varphi_1 M_1 + \psi_1 f_1 \tag{2}$$

existirt, in welcher, wenn $\varphi(x)$ eine Fläche φ_f ist, $\varphi_1(y)$ eine Fläche φ_{f_1} und ψ_1 ebenfalls eine ganze Function der Coordinaten wird.

Nach § 7. besteht eine Identität (2), wenn $\varphi(\vartheta) \cdot D_1$ durch jede j_1-fache Curve C_{j_1} von f_1, die j_1'-fache Curve von M_1 ist, $(j_1 + j_1' - 1)$-fach geht. Alsdann folgt schon, dass die φ_1 Flächen der Ordnung $n_1 - 4$ (wo n_1 die Ordnung von f_1 ist) werden, welche C_{j_1} zur $(j_1 - 1)$-fachen Curve besitzen.

Nun folgt das Verhalten von M_1 aus der Gleichung (1), sowie aus der durch Differentiation aus (1) folgenden Gleichung:

$$f_1 \frac{\partial M_1}{\partial y_k} + M_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} = \sum_i \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} \cdot \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_k} , \tag{3}$$

und deren Umkehrung:

$$D_1 \frac{\partial f(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = M_1 \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \frac{\partial D_1}{\partial \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_k}} + f_1 \sum_k \frac{\partial M_1}{\partial y_k} \frac{\partial D_1}{\partial \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_k}} . \tag{4}$$

Zunächst zeigt (4), dass in der Nähe jedes Punktes einer einfachen oder vielfachen Schnittcurve von $M_1 = 0$, $f_1 = 0$ entweder $\frac{\partial f(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = 0$ ist oder aber D_1 schon die Form $\alpha M_1 + \beta f_1$ hat. Das Letztere kann insbesondere im Falle eines einfachen Fundamentalpunktes auf f eintreten, ein Fall, auf den wir noch zurückkommen werden. Einer weitern Behandlung bedarf hier nur der Fall, dass zugleich

$$\frac{\partial f(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = 0 \quad (\text{für } i = 1, 2, 3, 4) .$$

Hierbei sind wieder zwei Fälle zu betrachten:

I. $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$;

II. $\vartheta_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$.

Bei I. wird man auf die Curve von f_1 geführt, welche *vielfache Punkte oder Curven von* f abbilden. Daher hat man hier die folgenden drei Unterfälle:

I. a) Die Abbildung eines Fundamental*punktes* P_j, der j-facher Punkt von f sei, geschehe durch Ausdrücke der Form:

$$x_1 = A \cdot \chi_1(y), \quad x_2 = A \cdot \chi_2(y), \quad x_3 = A \cdot \chi_3(y), \quad x_4 = \vartheta_4(y).$$

In der Abbildung erhält dann M_1 eine j-fache. D_1 eine 2-fache, $\varphi(\vartheta)$ eine $(j-2)$-fache Curve, f_1 eine einfache Curve, und die Bedingung für die Identität (2) ist erfüllt.

Für $j = 1$ haben M_1, f_1 die Abbildung zur einfachen, D_1 dieselbe zur Doppelcurve; woraus folgt, *dass auch die Flächen* φ_1 *durch diese Abbildung des einfachen Fundamentalpunktes hindurchgehen müssen.*

I. b) Die Abbildung einer j-fachen *Curve* von f, eine einfache Curve von f_1, ist für $\varphi(\vartheta)$ eine $(j-1)$-fache, für D_1 eine einfache oder 0-fache, für M_1 nach (4) eine j-fache, bez. $(j-1)$-fache Curve, so dass hier ebenfalls die Identität (2) bestehen kann.

I. c) Die Abbildung eines j-fachen *Punktes* P_j von f geschehe durch Ausdrücke der Form:

$$x_i = y_1 \chi_i(y) + y_2 \chi_i'(y) \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$x_4 = \vartheta_4(y),$$

Ausdrücke, welche wir in der vorliegenden Form betrachten wollen, auch wenn sie mit Hülfe von $f_1 = 0$ auf die von I. a) reducirt werden können. Es entspricht hier dem Punkte P_j $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ eine Gerade G_1 $(y_1 = y_2 = 0)$ von $f_1 = 0$, und zwar im Allgemeinen *mehrdeutig.* Damit dieses eintritt, müssen die umgekehrten Transformationsausdrücke Θ_k, aus den Formeln:

$$\varrho y_k = \Theta_k(x),$$

für P_j die Eigenschaft haben, dass ihre Glieder niedrigster Ordnung in x_1, x_2, x_3, die im Allgemeinen 2 Parameter haben, nur *einen* veränderlichen Parameter besitzen, oder diese Glieder niedrigster Ordnung müssen die Form haben:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = A(x_1 x_2 x_3), \quad y_4 = B(x_1 x_2 x_3).$$

Wenn die Fläche $f(x) = 0$ im Punkte P_j von diesen Transformationsflächen $\Theta_k = 0$, oder $A(x) + \lambda B(x) = 0$, in je j_1 (wobei $j_1 \leqq j$ sei) beweglichen Richtungen geschnitten wird, so entsteht auf $f_1(y) = 0$ eine j_1-fache Gerade G_1; wobei einer solchen Gruppe von j_1 Richtungen in P_j die j_1 Tangentenebenen eines Punktes der j_1-fachen Geraden von f_1 entsprechen.

Bei dieser Transformation erhält nun D_1 die Gerade G_1 zur einfachen Geraden. Die linke Seite von (4) hat also G_1 zur j-fachen

Geraden für $i = 1, 2, 3$. Man kann weiter zeigen, dass das Glied der rechten Seite

$$\sum_k \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \frac{\partial D_1}{\partial \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y_k}}$$

für $i = 1, 2, 3$ G_1 zur j_1-fachen Geraden hat, obwohl $\frac{\partial f_1}{\partial y_k}$ nur $(j_1 - 1)$-fach für $k = 1, 2$ verschwindet. Denn es ist, in der Nähe von G_1:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & \chi_1' & 0 & 0 \\ \chi_2 & \chi_2' & 0 & 0 \\ \chi_3 & \chi_3' & 0 & 0 \\ \frac{\partial \vartheta_4}{\partial y_1} & \frac{\partial \vartheta_4}{\partial y_2} & \frac{\partial \vartheta_4}{\partial y_3} & \frac{\partial \vartheta_4}{\partial y_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Daher wird für $i = 1$ das obige Glied zu

$$(\chi_2 \chi_3' - \chi_3 \chi_2') \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_3} \frac{\partial \vartheta_4}{\partial y_4} - \frac{\partial f_1}{\partial y_4} \frac{\partial \vartheta_4}{\partial y_3} \right),$$

worin $\frac{\partial f_1}{\partial y_3}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y_4}$ aber j_1-fach längs G_1 verschwinden. Hierdurch folgt sogleich aus (4), dass M_1 die Gerade G_1 in nicht höherer Vielfachheit, als zur $(j - j_1)$-fachen Curve besitzen kann.

Beachtet man noch, dass, für $j > 1$, $\varphi(\vartheta)$ G_1 zur $(j-2)$-fachen Geraden hat, so findet sich auch hier wieder die Bedingung der Identität (2) erfüllt, wobei noch ausserdem die Flächen $\varphi_1(y)$ die j_1-fache Gerade G_1 von f_1 zur $(j_1 - 1)$-fachen Geraden erhalten.

Für $j = 1$, $j_1 = 1$ wird G_1 eine einfache Gerade der $\varphi_1(y)$, und man findet auch hier, wie in I. a), *dass die Flächen φ_1 eine einfache Curve von f_1, welche die Abbildung eines Fundamentalpunktes, der einfacher Punkt von f ist, darstellt, zur einfachen Curve haben.*

Wenn schon im Allgemeinen dieser Fall I. c) durch zwei successive Transformationen sich auf den in I. a) behandelten hätte zurückführen lassen, so war doch dessen Betrachtung für einen besondern Fall nothwendig, der auch schon im § 5. angeführt worden ist. Wir haben nicht ausgeschlossen, dass die vielfachen Curven von f mit einzelnen Zweigen durch den Punkt P_j hindurchgehen. Insbesondere mag P_j ein Punkt einer j-fachen Curve C_j sein, von welchem noch eine j'-fache Curve von f, $C_{j'}$ ausgeht $(j > j')$; und die Transformationsflächen mögen durch $C_{j'}$ einfach, nicht durch C_j, gehen. Die dem Punkte P_j entsprechende Gerade G_1 von f_1 wird wieder eine $j_1 = (j - j')$-fache. Da aber nun die $\varphi(x)$ die Curve C_j, also die $\varphi(\vartheta)$ die Gerade G_1 zur $(j-1)$-fachen Curve besitzen, so folgt, *dass eine solche j_1-fache Gerade von f_1 auch j_1-fache Gerade aller Flächen φ_1 ist.*

Hierbei wird derjenige Punkt von G_1, welcher den j' zusammenfallenden Ebenenrichtungen im Punkte P_j entspricht, kein Fundamental-

punkt. Hätte man hier zwei successive Transformationen anwenden wollen, indem man zunächst die Transformationsflächen durch C_j und $C_{j'}$ gehen liesse, so würde man bei der zweiten Transformation doch einen dem obigen Punkt P_j analogen Fundamentalpunkt erhalten haben.

II. Für den Fall II. können wir annehmen, dass die Ausdrücke $\vartheta_k(y)$ längs einer Curve von f_1 in der ersten Ordnung verschwinden. Sei diese eine j_1-fache Curve, einer einfachen Curve von f entsprechend.

Hier folgt sogleich aus Gleichung (1), dass M_1 die Curve als $(n-j_1)$-fache hat. D_1 hat dieselbe zur 3-fachen*), $\varphi(\vartheta)$ zur $(n-4)$-fachen Curve.

Hiermit ist die Existenz der Identität (2) vollständig bewiesen.

Die in derselben auftretenden Flächen φ_1 verhalten sich in Folge dessen in jeder vielfachen Curve von f_1 schon wie Flächen φ_{f_1}. Dass dieses Verhalten auch in vielfachen Punkten von f_1 stattfindet, folgt daraus, dass in einem j_1-fachen Punkte von f_1, in welchem alle $\vartheta_k(y)$ einfach verschwinden, M_1 nach (1) einen $(n-j_1)$-fachen, D_1 einen zweifachen*), $\varphi(\vartheta)$ einen $(n-4)$-fachen Punkt, also φ_1 einen (j_1-2)-fachen Punkt hat.

Wir haben in dieser Entwicklung keinen Gebrauch von der Annahme gemacht, dass die Transformation

$$x_i = \vartheta_i(y)$$

mit Hülfe von $f_1 = 0$ eindeutig umkehrbar sein soll. Auch wenn diese Annahme nicht erfüllt ist, besteht die Identität (2) für alle Flächen φ, welche zu f gehören; dieselben gehen ebenfalls in Flächen φ_{f_1} über. Dagegen braucht umgekehrt nicht mehr jede Fläche φ_{f_1} sich in eine Fläche φ_f zu transformiren, und die Schaar der φ_{f_1} kann eine grössere Mannigfaltigkeit besitzen, als die der φ_f. Ich bemerke noch, dass die in der Identität (2) auftretende Fläche ψ_1 sich als eine zu M_1 adjungirte Fläche φ_{M_1} auffassen lässt.

§ 10.

Invariante Elemente der eindeutigen Transformation.

Wir haben in § 9. eine zu $f=0$ gehörige Schaar von Functionen φ_f aufgestellt, welche die Eigenschaft hat, bei eindeutiger Transformation von f in f_1 in eine in Bezug auf $f_1 = 0$ analog definirte Schaar von Functionen φ_{f_1} überzugehen, indem vermöge $f_1=0$ Relationen der Form existiren:

*) S. den ersten Aufsatz, diese Annalen II, p. 310.

$$\varphi^{(i)} = \frac{M_1}{D_1}\,\varphi_1{}^{(i)}.$$

Der bei dieser Transformation nach Gleichung (2), § 9. auftretende Factor $\frac{M_1}{D_1}$, welcher die Transformationsconstanten enthält, hat die Bedeutung, dass $M_1 = 0$ ebenfalls $f = 0$; aber mehrdeutig, entspricht, und durch die übrigen Basispunkte der in den $\vartheta(y)$ enthaltenen Bündel, von denen ein Basispunkt die Fläche $f_1 = 0$ durchläuft, erzeugt wird, also die Abbildung der vielfachen Gebilde von f liefert.

Insofern nun die Schaar der Functionen φ_f und die der φ_{f_1}, welche eindeutig in einander übergehen, sich durch dieselben eindeutigen algebraischen Operationen, einmal auf f, ein anderes Mal auf f_1 angewandt, völlig bestimmt definiren lassen, hat man eine solche Schaar als eine *invariante* zu bezeichnen. Aber es folgt zugleich, dass eine grosse Reihe von weiteren Functionen, welche Eigenschaften des Schnittes von $f = 0$ mit der Schaar $\varphi_f = 0$ darstellen, die bei eindeutiger Transformation dem Begriffe derselben gemäss erhalten bleiben, ebenfalls den *invarianten Charakter bei eindeutiger Transformation* besitzen; wobei nur vorausgesetzt ist, dass diese Functionen durch algebraische Operationen definirt sind*).

Dieses gilt selbstverständlich schon für eine *ebene Curve* f und die derselben adjungirte Schaar φ_f. Functionen der bezeichneten Art erhält man alsdann z. B., indem man aus einem Theil dieser Schaar:

$$\sum_{i=1}^{i=\varrho} \alpha_i \varphi^{(i)}(x) \tag{1}$$

zunächst die Function bildet

$$\sum \pm \varphi^{(1)}(x^{(1)})\varphi^{(2)}(x^{(2)}) \cdots \varphi^{(\varrho)}(x^{(\varrho)}), \tag{2}$$

wo $x^{(1)}, \cdots x^{(\varrho)}$ Werthsysteme sind, für welche auch

$$f(x^{(1)}) = 0\,, \cdots f(x^{(\varrho)}) = 0\,. \tag{3}$$

Die Function (2) liefert, mit (3) verbunden, die Bedingung, dass die ϱ Punkte $x^{(i)}$ auch einer Curve der Schaar (1) angehören. Nimmt man insbesondere die Werthsysteme der $x^{(i)}$, ganz oder theilweise, unendlich wenig von einander verschieden an, so ergeben sich aus (2) Functionen, welche zu besondern Berührungscurven aus der Schaar (1) führen. Bei einer Transformation dieser Functionen erhält man ana-

*) Eine *Darstellung* einer solchen Function durch die in f enthaltenen Coefficienten kann im Allgemeinen nicht gefordert werden, so wenig als es bei den Moduln einer Classe von algebraischen Functionen einer Variabeln geschieht. Vgl. Brill u. Nöther, algebr. Functionen, Mathem. Ann. VII, p. 300; sowie eine auf das ganze Gebiet der Invarianten bezügliche Bemerkung von Hrn. Kronecker, Monatsber. der Berl. Akad., Juni 1874.

loge Functionen für f_1, wobei immer nur eine Potenz von $\frac{M_1}{D_1}$ als Factor auftritt.

So findet sich als einfachster Fall, für $\varrho = 2$, die Functionaldeterminante von f, $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$:

$$\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3}$$

und als Factor der Transformation $\frac{M_1^3}{D_1^3}$. Für $\varrho = 3$ und die 3-punktige Berührung einer Curve φ_f mit f lässt sich die Function aus dem von Hrn. Brill, Mathem. Ann. III, p. 460, gegebenen Ausdrucke entnehmen.

In Bezug auf eine *Fläche* f hat man im einfachsten Fall, für eine einfach unendliche Schaar (1), $\varrho = 2$, die Werthsysteme von $f = 0$, für welche zugleich alle in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_4} \end{vmatrix}$$

enthaltenen 3-reihigen Determinanten verschwinden; denn für die entsprechenden Werthsysteme verschwindet das in Bezug auf f_1 analog definirte Determinantensystem.

Für $\varrho = 3$ ergiebt sich die Function

$$\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi^{(3)}}{\partial x_4},$$

während für $\varrho = 4$ die Functionen erhalten werden können, welche die Curve der stationären Berührung oder der Berührungspunkte von Doppelberührungsflächen aus der Schaar (1) mit f liefern.

Von den invarianten *Zahlen*, auf welche diese Functionen führen, sind vor Allem diejenigen von Bedeutung, welche von den allgemeinen Functionen φ_f selbst abhängen. Wir bezeichnen die *Anzahl der linear von einander unabhängigen Flächen* φ_f als das *Flächengeschlecht* p der Fläche f, *das Geschlecht der beweglichen Schnittcurve* $(f\varphi)$ *von* f *mit einer allgemeinen Fläche* φ_f als das *Curvengeschlecht* $p^{(1)}$ von f. Zu diesen beiden Zahlen tritt noch eine dritte, ebenfalls für jede eindeutige Transformation invariante Zahl, *die Anzahl* $p^{(2)}$ *der beweglichen Schnittpunkte* $(f\varphi\varphi)$ *von* f *mit zwei allgemeinen Flächen* φ_f.

Man kann jedoch zeigen, dass diese letztere Zahl kein neues Criterium der Transformation liefert, dass sie vielmehr linear *abhängig* ist von den beiden übrigen Zahlen.

Das Geschlecht $p^{(1)}$ einer allgemeinen Schnittcurve $(f\varphi)$ bestimmt sich nämlich, nach § 8., durch den Schnitt von $(f\varphi)$ mit den zur Raumcurve $(f\varphi)$ adjungirten Flächen φ, oder den Flächen $\varphi_{(f\varphi)}$, indem dieser Schnitt aus $2p^{(1)}-2$ Punkten besteht. Nun sind diese $\varphi_{(f\varphi)}$ die Flächen der Ordnung $2n-8$, welche jede j-fache Curve von f zur $(2j-2)$-fachen Curve, jeden j-fachen Knotenpunkt von f zum $(2j-4)$-fachen Punkt haben. Unter diesen Flächen sind auch die Flächen

$$\Sigma\, \alpha_{ik}\varphi^{(i)}\varphi^{(k)}$$

enthalten, wo die $\varphi^{(i)}$, $\varphi^{(k)}$ irgend welche Flächen φ_f bedeuten, oder noch specieller die zerfallenden Flächen von der Form $\varphi^{(i)}\varphi^{(k)}$. Die Anzahl $2p^{(1)}-2$ der beweglichen Schnittpunkte der Raumcurve $(f\varphi)$ mit einer Fläche der Schaar der $\varphi_{(f\varphi)}$ ist also das Doppelte der Anzahl der Schnittpunkte der Curve $(f\varphi)$ mit einer Fläche φ_f, also $=2p^{(2)}$; und man hat die Relation:

[I] $$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

Dieser Satz verliert in nur einigen Fällen seine Gültigkeit, oder doch der Beweis desselben seine Anwendbarkeit. Das Erstere tritt für $p=0$ und $p=1$ insofern ein, als hierbei $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ ihre Bedeutung verlieren. Für $p=2$ existirt kein beweglicher Schnitt des Büschels $\varphi+\lambda\varphi^{(1)}=0$ mit der Curve $(f\varphi)$, woraus $p^{(2)}=0$ folgt; und weiter, da $\varphi^{(1)}\cdot\varphi^{(1)}$ eine Fläche $\varphi_{(f\varphi)}$ vorstellt, kein beweglicher Schnitt von Flächen $\varphi_{(f\varphi)}$ mit $(f\varphi)$, aber $p^{(1)}=1$; und die Relation ist erfüllt. Ferner verliert $p^{(1)}$ seine Bedeutung, wenn *sämmtliche* Curven $(f\varphi)$ in mehrere bewegliche Curven zerfallen; die Flächengattung, welche diese Eigenschaft besitzt, wird sogleich näher behandelt werden. — Endlich ist der Beweis des Satzes nicht anwendbar, wenn auf der Fläche f eine *ausgezeichnete* j-fache Curve existirt, welche die sämmtlichen Flächen φ_f ebenfalls zur j-fachen Curve besitzen (wo auch $j=1$ sein kann); denn es ist nicht ohne Weiteres klar, wie sich die Flächen $\varphi_{(f\varphi)}$ in einer solchen Curve verhalten. Wenn man aber diese Fläche f durch eine Transformation nach Art der in § 9., I. c) behandelten in eine Fläche F überführt, so erhält diese Fläche, der ausgezeichneten Curve von f entsprechend, nur einen Fundamentalpunkt, in dem F keine besondere Singularität besitzt. Die obige Relation [I] gilt daher für die Fläche F, folglich auch, bei der Invarianteneigenschaft der Zahlen $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, für die Fläche f.

§ 11.

Untere Grenze für das Curvengeschlecht einer Fläche. Besondere Flächengattungen. Beispiele.

Innerhalb eines jeden durch einen Werth von p charakterisirten Geschlechts von Flächen existirt *eine* weitere Eintheilung nach dem

Curvengeschlecht $p^{(1)}$. Man findet jedoch für alle Flächen f, für welche nicht sämmtliche Curven $(f\varphi)$ in mehrere bewegliche Curven zerfallen, eine *untere Grenze**) der Reihe von Werthen, welche $p^{(1)}$ bei gegebenem p annehmen kann:

[II] $$p^{(1)} > 2p - 3 .$$

Wir betrachten nämlich die irreducible Schnittcurve $(f\varphi)$ von f mit einer allgemeinen der Flächen φ_f. Dem Schnitt von $(f\varphi)$ mit den übrigen φ_f entsprechend, existirt auf der Curve $(f\varphi)$, vom Geschlecht $p^{(1)}$, eine ∞^{p-2} Schaar von Gruppen von je $p^{(1)} - 1$ beweglichen Punkten.

Zunächst folgt hieraus**), dass die Curve $(f\varphi)$, sobald $p^{(1)}$ eine gewisse Grösse nicht übersteigt, keine solche mit allgemeinen Moduln sein kann; sobald nämlich nicht

$$p^{(1)} - 1 \geq \frac{(p-2)(p+p^{(1)}-1)}{p-1} ,$$

d. h.

$$p^{(1)} \geq (p-1)^2 .$$

Wird $p^{(1)}$ kleiner, so muss die Curve $(f\varphi)$ eine speciellere werden. Wird dieselbe insbesondere eine „hyperelliptische" Curve, so existiren auf derselben ∞^{p-2} Gruppen von je $p-2$ beweglichen Punktepaaren, so dass alsdann $p^{(1)} - 1 = 2(p-2)$ sein kann. In diesem Falle wird also die Fläche f von sämmtlichen Schnittcurven $(\varphi\varphi')$ je zweier Flächen φ_f nur in *Punktepaaren*, und zwar in je $p-2$ Paaren, getroffen.

Man kann nun leicht zeigen, dass $p^{(1)}$ nicht noch weiter sinken kann, ohne dass $(f\varphi)$ zerfällt; oder dass auf einer irreducibeln ebenen Curve C, also auch auf einer Raumcurve, vom Geschlecht $p^{(1)}$ nicht $\infty^{\frac{p^{(1)}}{2}}$ Gruppen von je $p^{(1)} - 1$ beweglichen Punkten existiren. Denn nach dem Riemann-Roch'schen Satze***) würden die C adjungirten Curven φ_σ, welche durch eine solche Gruppe G gehen, wieder eine $\infty^{\frac{p^{(1)}}{2}}$-Schaar bilden und C in Gruppen von je $p^{(1)} - 1$ beweglichen Punkten treffen. Seien diese durch G gehenden Curven φ_C:

$$\varphi + \sum_{i=1}^{i=\frac{p^{(1)}}{2}} \alpha_i \varphi^{(i)} = 0 ,$$

ferner alle durch die Gruppe G', in welcher C von φ noch weiter geschnitten wird, gehenden Curven φ_C:

---

*) Die Existenz einer *obern* Grenze für $p^{(1)}$ bleibt zweifelhaft; wonach eine Bemerkung in meiner Note, Gött. Nachr. 1873, p. 252, zu berichtigen ist.

**) S. Brill u. Nöther, Mathem. Ann. VII, p. 292, (E').

***) S. ebenda, p. 280.

$$\varphi + \sum_{i=1}^{i=\frac{p^{(1)}}{2}} \beta_i \psi^{(i)} = 0 .$$

Jede der in der Schaar $\Sigma \beta_i \psi^{(i)}$ enthaltenen Curven ist verschieden von irgend einer Curve der Schaar $\Sigma \alpha_i \varphi^{(i)}$; denn während die erstern Curven sämmtlich durch G' gehen, gilt dies für keine der Curven der zweiten Schaar. Daher bilden die Curven

$$\varphi + \sum_{i=1}^{i=\frac{p^{(1)}}{2}} \alpha_i \varphi^{(i)} + \sum_{i=1}^{i=\frac{p^{(1)}}{2}} \beta_i \psi^{(i)} = 0$$

eine ∞^{p_1}-Schaar linear von einander unabhängiger Curven φ_C, was für eine irreducible Curve vom Geschlecht p_1 nicht existirt.

Noch weniger kann $p - 2 > \frac{p^{(1)}}{2}$ sein. Es folgt zugleich, dass der Fall $p^{(1)} = 2$ überhaupt nicht vorkommt, da diese Zahl für $p = 2$ zu 1, für $p > 2$ aber > 2 wird.

Wir haben in diesem § oben derjenigen Flächenart, für welche die untere Grenze $2p - 3$ von $p^{(1)}$ erreicht wird, Erwähnung gethan. Die Curven $(f\varphi)$ werden hyperelliptische, die beweglichen Punktsysteme $(f\varphi\varphi)$ bestehen aus je $(p-2)$ Punktepaaren; von solchen Paaren liegen überhaupt ∞^2 auf der Fläche f. Die Flächen φ_f selbst sind daher nicht in einer ∞^3-Schaar zu einer *eindeutigen* Transformation von f zu benutzen; verbindet man aber eine ∞^2-Schaar derselben mit einer beliebigen weitern Fläche zur Transformation von f, so ergiebt sich, dass der *Typus* dieser Flächenart die *Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkte* ist.

Es giebt auch eine Flächenart, für welche die Punktsysteme $(f\varphi\varphi)$ nur aus *Punktetripeln* bestehen, von denen eine ∞^2-Schaar existiren wird; wobei denn $p^{(1)} - 1 = 3(p-2)$ wird, und die Flächen φ_f nicht mehr zu eindeutiger Transformation zu verwenden sind. In diesen und analogen weitern Fällen, die z. B. für $p = 3$ bei nicht zerfallenden Curven $(f\varphi)$ immer eintreten, bleiben die Relationen [I] und [II] bestehen.

Anders aber verhält sich die *besondere Flächengattung*, deren sämmtliche Curven $(f\varphi)$ zerfallen. Man kann zeigen, *dass dieselben nur in $p-1$ Curven, je vom Geschlecht 1, zerfallen können.*

Betrachten wir irgend eine ∞^1-Schaar von Flächen, welche aus der zu einer solchen Fläche f gehörigen Schaar von Flächen φ_f genommen und durch einen beliebigen einfachen Punkt P von f gelegt ist. Von den Curven, welche die Flächen der ∞^1-Schaar aus f ausschneiden, kann immer nur je eine durch P gehen, und diese bilden

zusammen eine Fläche, welche einen Theil von f ausmacht, ohne die nicht durch P gehenden Curven des Schnittes der Schaar mit f zu enthalten. Die Fläche f würde also zerfallen.

Dies wird nur dann anders, wenn die Flächen φ_f, sobald sie durch den Punkt P gelegt werden, in Folge dessen durch eine ganze durch P bestimmte Curve hindurch gehen. Und da man eine Fläche φ_f durch $p-1$ beliebig gewählte Punkte von f gehen lassen kann, so folgt sogleich, dass f von den Flächen φ_f in je $p-1$ beweglichen Curven getroffen wird. Da weiter durch einen Punkt P nur eine einzige solcher Curven auf f bestimmt sein kann, so kann auch auf f nur *eine* ∞^1-Schaar solcher Curven liegen, welche von irgend einer ∞^1-Schaar von Flächen φ_f, die man durch $p-2$ beliebige der Curven gelegt hat, ausgeschnitten werden kann.

Sei $\varphi + \lambda\varphi^{(1)} = 0$ ein solches Büschel durch $p-2$ beliebige der Curven. Irgend eine der Curven der Schaar, die Restschnittcurve von f mit φ, wird von keiner Fläche des Büschels und ebensowenig von einer ihr adjungirten Fläche $\varphi_{(f\varphi)}$ in beweglichen Punkten getroffen. Das Geschlecht derselben ist daher nicht grösser als 1; da aber doch eine solche adjungirte Fläche $\varphi_{(f\varphi)}$ existirt, nämlich $\varphi^{(1)} \cdot \varphi^{(1)}$, so wird es *gleich* 1.

Da man für die vorliegende Flächengattung $p^{(3)} = 0$ hat, so kann man also auch für sie die Relation [I] noch als gültig annehmen, wenn man nur dieselbe auf jede einzelne Curve des zerfallenden Schnittes $(f\varphi)$ bezieht.

In diesem Falle kann man zu einer eindeutigen Transformation einer solchen Fläche f auch keine ∞^2-Schaar der Flächen φ_f mehr verwenden. Benutzt man dagegen eine ∞^1-Schaar derselben, in Verbindung mit zwei beliebigen weiteren Flächen, so erhält man eine Fläche mit einer vielfachen Geraden; insbesondere entsteht als *Typus* dieser besondern Flächengattung *die Fläche n^{ter} Ordnung mit $(n-3)$-facher Geraden.* Das Verhalten dieser ganzen Flächengattung in Bezug auf ihre Flächen φ_f ist dem der *hyperelliptischen Curven* in Bezug auf deren Curven φ völlig analog, insofern eine solche Curve, vom Geschlecht p, von ihren Curven φ in je $p-1$ Punktepaaren geschnitten wird.

Die speciellen hier angegebenen Flächenarten ausgenommen, lässt sich für jede Fläche f, deren $p > 3$ ist, eine ihr adjungirte ∞^3-Schaar von Flächen φ_f finden, welche man zur eindeutigen Transformation von f verwenden kann. Man kann die ∞^3-Schaar aus der allgemeinen Schaar der φ_f dadurch ausscheiden, dass man dieselben noch durch $p-4$ beliebige feste Punkte von f gehen lässt. Die Fläche f wird mittelst einer solchen Schaar eindeutig in eine Fläche f_1 transformirt, für welche die Ordnung

$$n_1 = p^{(1)} - p + 3 ,$$

die Classe des ebenen Schnittes

$$a_1 = 4p^{(1)} - 2p + 4$$

wird, da $p^{(1)}$ das Geschlecht dieses Schnittes ist. Für eine solche „Normalfläche" des Systems $[p, p^{(1)}]$ werden wir im nächsten § noch zwei weitere Zahlen angeben können.

Um die in dem vorigen und in diesem § gegebenen Eigenschaften der Flächen an Beispielen bestätigen zu können, füge ich einige für die einfachsten Systeme $[p, p^{(1)}]$ an. Dabei soll f_n eine Fläche n^{ter} Ordnung, C_n eine Raumcurve n^{ter} Ordnung bedeuten.

$$p = 2 , \quad p^{(2)} = 0$$

1. f_6 mit doppelter Geraden und einem diese nicht schneidenden doppelten Kegelschnitt.

2. f_5 mit zwei dreifachen Punkten; wobei die Verbindungsgerade der beiden Punkte eine *ausgezeichnete* Gerade von f_5 ist, insofern als sie auch den φ_f angehört.

3. f_6 mit doppelter C_4 (erster Species).

4. f_6 mit doppelter C_3 und 3-fachem Punkt P; wobei die von P ausgehende Sehne von C_3 ausgezeichnet ist.

5. f_7 mit doppelter C_6 (vom Geschlecht 1, Classe 12); wobei drei 4-punktige Sehnen von C_6 ausgezeichnet sind.

$$p = 3 , \quad p^{(1)} = 3 .$$

6. f_6 mit doppelter C_3.

7. f_7 mit doppelter C_6 (vom Geschlecht 2); wobei die 4-punktige Sehne von C_6 ausgezeichnet ist.

$$p = 3 , \quad p^{(1)} = 4 .$$

8. f_6 mit doppelter ebener Curve 3^{ter} Ordnung und 3-fachem conischen Punkt.

$$p = 4 , \quad p^{(1)} = 5 .$$

9. f_6 mit zwei sich nicht schneidenden Doppelgeraden.

10. f_7 mit doppelter C_4 (erster Species) und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden.

$$p = 4 , \quad p^{(1)} = 6 .$$

11. f_5.

12. f_7 mit 3-fachem Kegelschnitt und 3-fachem Punkte; wobei die Gerade, in welcher f_7 von der Ebene des Kegelschnitts noch getroffen wird, eine ausgezeichnete ist.

13. f_7 mit doppelter C_6 (vom Geschlecht 3).

14. f_7 mit doppelter C_5 (Geschlecht 0); wobei die 4-punktige Sehne von C_5 ausgezeichnet ist.

$$p = 4\,, \quad p^{(1)} = 7\,.$$

15. f_6 mit doppelter ebener Curve 3ter Ordnung.

$$p = 4\,, \quad p^{(1)} = 8\,.$$

16. f_7 mit einer 3-fachen Geraden und zwei doppelten Kegelschnitten, welche in durch diese Gerade gehenden Ebenen liegen.

Bei den Flächen 6., 7., 9., 10. bilden die Punktsysteme $(f\varphi\varphi)$ nur *Punktepaare*, bei 8. nur *Punktetripel*. 11., 15. und 16. haben die oben bezeichnete Eigenschaft von „Normalflächen", indem die Ebenen des Raumes zu ihren Flächen φ_f gehören.

§ 12.

Numerische Transformationsrelationen.

Wir haben in den vorhergehenden §§ 9—11. die Zahlen p und $p^{(1)}$, welche bei einer eindeutigen Transformation einer Fläche f erhalten bleiben, *geometrisch*, durch den Zusammenhang mit den Flächen φ_f, definirt. Was nun die *numerischen Ausdrücke* dieser Zahlen betrifft, so könnten dieselben sehr wohl in verschiedenen speciellen Fällen auch auf verschiedene Weise von den zur Fläche f gehörigen Singularitätenzahlen abhängen. In der That wird z. B. der numerische Ausdruck, im Falle eine „ausgezeichnete" Curve auf f existirt, im Allgemeinen offenbar eine Modification des gewöhnlichen zeigen.

Berechnet man nach der geometrischen Definition die numerischen Formeln für p und $p^{(1)}$, für einen allgemeineren Fall, in dem aber keine ausgezeichnete Curve auf f vorhanden ist*), und vergleicht dieselben mit den rechten Seiten der Ausdrücke (I) und (II) der §§ 5. und 6., so findet sich

$$\begin{aligned} c' - 12\,a + 24\,n + 3\,\Sigma\nu &= 24\,(p+1)\,, \\ n' - \;2\,a + \;3\,n + \;\Sigma\mu &= 12\,(p+1) - (p^{(1)} - 1)\,, \end{aligned}$$

*) Man findet in den Bezeichnungen der Anmerkung zu p. 505:

$$\begin{aligned} p = {} & \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - \tfrac{1}{6}\sum_j j(j-1)\left\{(3n-2j-5)m_j - \tfrac{1}{2}(2j-1)r_j\right\} + \\ & + \tfrac{1}{6}\sum_{jj'} j(j-1)(3j'-j-1)s_{jj'} - \\ & - \tfrac{1}{6}\sum_k (k-2)\nu_k + \tfrac{1}{6}\sum_{jk} j(j-1)(k-j)h_{jk}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^{(1)} = {} & n(n-4)^2 + 1 - \sum_j (j-1)\left\{(3j-1)n - 2j(j+3)\right\} m_j + \sum_j j(j-1)^2 r_j + \\ & + \sum_{jj'} (j-1)\left\{(3j-1)j' - j(j+1)\right\} s_{jj'} - \\ & - \sum_k \left\{k + (k-3)\nu_k\right\} + \sum_{jk} (j-1)(2j-1)(k-j)h_{jk}\,. \end{aligned}$$

vorausgesetzt, dass man die $\Sigma\mu$ hier *nicht* auf *einfache* Punkte der Fläche f, welche als Fundamentalpunkte einer Transformation auftreten, ferner nicht auf einfache Schnittpunkte zweier vielfacher Curven von f ausdehnt. Die Relationen zwischen zwei Flächen f, f_1, welche eindeutig in einander überführbar sind:

$$(1) \qquad p = p_1\,, \quad p^{(1)} = p_1^{(1)}\,,$$

stimmen daher im Wesentlichen überein mit den numerischen Relationen (I), (II) des § 6. Während aber die Relation (I) in $\Sigma\mu$ noch die Fundamentalpunkte der Transformation, insbesondere solche, welche einfache Punkte der Flächen f, f_1 sind, enthält, also *nicht* als ein Criterium der Transformirbarkeit von f in f_1 erscheint, ist unsere Relation $p^{(1)} = p_1^{(1)}$ von der Art der Transformation ganz *unabhängig*, und in demselben Sinne ein Criterium der Transformirbarkeit, wie die Relation $p = p_1$.

Die Erklärung dieses verschiedenen Charakters der Relationen (1) dieses § und der des § 6. folgt aus den Untersuchungen des § 9., I. a) und I. c). Hiernach entsteht, sobald auf f ein einfacher Punkt als Fundamentalpunkt auftritt, *zu gleicher Zeit* auf f_1 eine *ausgezeichnete* Curve, durch welche alle Flächen φ_{f_1} hindurchgehen; und Analoges tritt für einen Fundamentalpunkt ein, der Schnittpunkt zweier vielfacher Curven von f ist. Bezeichnet man also die rechte Seite von (II), § 6. mit π, die von (I) mit $\pi^{(1)}$, wobei also

$$(2) \qquad \pi = \pi_1\,, \quad \pi^{(1)} = \pi_1^{(1)}$$

wird, so hat man, wenn keine solche Fundamentalpunkte und ausgezeichnete Curven vorhanden sind:

$$(3) \quad \pi^{(1)} = 12\,(p+1) - (p^{(1)}-1)\,, \quad \pi_1^{(1)} = 12\,(p_1+1) - (p_1^{(1)}-1)\,;$$

wenn jedoch solche Punkte auf f existiren, so wird hierdurch $\pi^{(1)}$ um ein additives Glied modificirt, nicht aber $p^{(1)}$, sondern $p_1^{(1)}$, dessen Modification vermöge der ausgezeichneten Curve von f_1 *denselben* Betrag haben muss, wie diejenige von $\pi^{(1)}$. Dagegen erleiden π, π_1, p, daher auch p_1 keine Aenderung. Wir haben also das von der Transformation selbst abhängige Glied der rechten Seite der Gleichung (II), § 6., auf die andere Seite gestellt und dann als abhängig von einer der Fläche f_1 zugehörigen, im Voraus anzugebenden Eigenschaft aufgefasst.

Es ist nicht schwer, in den einzelnen Fällen auch den Betrag der numerischen Modification von $p^{(1)}$ vermöge einer ausgezeichneten Curve von f zu verfolgen. So sei G eine solche einfache Gerade auf f, entsprechend einem einfachen Punkte P_1 von f_1. Die Gerade G trifft eine j-fache Curve von f in soviel Punkten, als die Abbildung dieser vielfachen Curve Zweige in P_1 besitzt; diese Zahl sei s_j. G trifft

ferner einen k-fachen Punkt von f, wenn dessen Abbildung durch P_1 geht. Nach § 9., I. a) und I. b) stellt $\frac{M_1}{D_1}$ die Abbildung der vielfachen Gebilde von f dar, geht aber $(j-1)$-fach durch die der j-fachen Curve, $(k-2)$-fach durch die des k-fachen Punktes; ferner verschwindet dieser Ausdruck in der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung (wo n die Ordnung von f) in P_1, man hat also:

$$\sum_j (j-1)s_j + \Sigma'(k-2) = n-3\,, \tag{4}$$

wo $\Sigma'(k-2)$ auf diejenigen k-fachen Punkte von f auszudehnen ist, durch welche G geht.

Nun haben die Flächen φ_f diese k-fachen Punkte zu $(k-2)$-fachen Punkten, die j-fache Curve zur $(j-1)$-fachen Curve; sie treffen daher G, nach Formel (4), in $n-3$ Punkten, und müssen, als von $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die Gerade ganz enthalten, ohne dass in dem numerischen Ausdruck von p eine Modification stattfindet.

Die Modification der Anzahl der Schnittpunkte von f mit zweien der Flächen φ_f vermöge der Geraden G ergiebt sich ebenfalls aus Formel (4). Die Gerade G absorbirt*)

$$(3n-10) - \sum_j (3j-3)s_j - \Sigma'(3k-6)$$

Schnittpunkte der drei Flächen f, φ, $\varphi^{(1)}$, also nach (4)

$$(3n-10) - 3(n-3) = -1\,;$$

d. h. die Anzahl der Schnittpunkte $(f\varphi\varphi)$, also auch das Geschlecht $p^{(1)}$ von $(f\varphi)$ wird um 1 grösser, als wenn die ausgezeichnete Gerade G nicht vorhanden wäre. Um ebensoviel aber ändert sich in diesem Falle auch die Zahl $\pi_1^{(1)}$; an Stelle von (3) hat man daher hier:

$$\pi^{(1)} = 12(p+1) - (p^{(1)}-1) + 1, \quad \pi_1^{(1)} - 1 = 12(p_1+1) - (p_1^{(1)}-1).$$

Nach dem Gesagten kann man von den auf f liegenden Curven im Voraus beurtheilen, in welchem Sinne sie in irgend einer Transformation Fundamentalpunkten einer Fläche f_1 entsprechen können. Nur wenn eine solche j-fache Curve ausgezeichnet ist, indem die Flächen φ_f dieselbe ebenfalls als j-fache Curve besitzen, kann derselben entweder ein einfacher Punkt einer Fläche f_1 oder ein Punkt einer vielfachen Curve von f_1 (in den man verschiedene einfache Fundamentalpunkte gerückt denken muss) entsprechen.

Ausser diesem allgemeinen Falle könnte die Verschiedenheit der Definitionen noch in speciellen Fällen Unterschiede in den Relationen (1) und (2) hervorbringen. Insbesondere muss dieses eintreten, sobald

*) Vgl. meinen Aufsatz in den Annali di Matem. ser. II, t. V, p. 162, no. 4 u. 6.

$\pi \gtrless 0$ wird. Denn p kann seiner Definition nach nicht unter 0 herabsinken. Die Gleichung $p = p_1$ wird alsdann immer zu $0 = 0$, die Gleichung $p^{(1)} = p_1^{(1)}$ verliert ihre Bedeutung, während die Gleichungen (2) noch immer weitere Transformationsrelationen liefern. So wird für eine Kegelfläche $\frac{1}{24}\pi - 1$ gleich dem Geschlecht der ebenen Schnittcurve des Kegels, negativ genommen*); $\pi^{(1)} - \frac{1}{6}\pi$ gleich der Summe der auf dem Kegel gelegenen Fundamentalpunkte einer Transformation, den Scheitelpunkt ausgenommen**). Hierbei lässt sich aber die zweite Formel $\pi^{(1)} = \pi_1^{(1)}$ nicht mehr als eine von der Transformation unabhängige auffassen; denn mit der Nichtexistenz der Flächen φ_f verliert auch die Definition der „ausgezeichneten" Curven einer Fläche ihre Bedeutung.

Für die in § 11. erwähnte „Normalfläche" f_1 eines Systems $[p, p^{(1)}]$, welche $p - 4$ ausgezeichnete Gerade enthalten wird, ergeben sich mit den dort gefundenen Werthen von n_1 und a_1 aus den Beziehungen zwischen den Zahlen p, $p^{(1)}$, π, $\pi^{(1)}$ auch die beiden weiteren Bestimmungen:

$$c_1' + 3\,\Sigma\nu_1 = 24\,(p + p^{(1)}),$$
$$n_1' + \Sigma\mu_1 = 4\,(3p + p^{(1)} + 2),$$

wo in $\Sigma\mu_1$ einfache Punkte von f_1 auszuschliessen sind.

§ 13.

Die algebraischen Gebilde von drei Dimensionen.

Die in den vorhergehenden §§ für Flächen angestellten Betrachtungen lassen sich auch auf *algebraische Functionen von mehr als zwei Variabeln* ausdehnen. Zur Orientirung in diesem höheren Gebiete werde ich die wesentlichen Eigenschaften des Gebildes von 3 Dimensionen, das durch eine homogene Gleichung zwischen 5 Variabeln, $f = 0$, gegeben ist, in Kürze ableiten. Unter einem $\Gamma^{(i)}$ sei hierbei „ein Gebilde von i Dimensionen" verstanden.

Zunächst ist klar, dass der erste Weg, welcher bei Flächen zur Aufstellung von Transformationsrelationen gedient hat, hier nicht eingeschlagen werden kann. Denn man kennt die zu einem $\Gamma^{(3)}$ gehörigen Singularitätengleichungen nicht; die bisher über diesen Gegenstand angestellten Untersuchungen, welche sich auf Liniencomplexe beziehen,

*) Für den Kegel ist $c' + 3\,\Sigma\nu = 0$ anzunehmen. Die Bemerkung von Hrn. Cayley, dass die Relation $\pi = \pi_1$ für $p = 0$ noch gilt (Mathem. Ann. III, „On the deficiency of certain surfaces"), wird durch die erste Formel (2) *bewiesen*.

**) Für den speciellen Fall $\pi = 24$, $p = 0$, d. h. für die auf eine *Ebene* abbildbaren Flächen, war diese zweite Formel (2) schon von Hrn. Cayley (Mathem. Ann. III, „On the transformation of unicursal surfaces") gefunden worden.

sind, der Natur der hierbei auftretenden Schwierigkeiten gemäss, als Grundlage einer Transformationstheorie ungenügend.

Dagegen steht die Betretung des zweiten Wegs offen. Wir definiren die $f=0$ *adjungirten Gebilde* φ_f als solche $\Gamma^{(3)}$ von der $(n-5)^{ten}$ Ordnung (wo n die Ordnung von f ist), welche jede j-fache Fläche ($\Gamma^{(2)}$) von f zur $(j-1)$-fachen Fläche, j-fache Curve ($\Gamma^{(1)}$) zur $(j-2)$-fachen Curve, j-fachen Punkt zum $(j-3)$-fachen Punkt besitzen.

Transformirt man nun durch eine eindeutige Transformation

$$x_i = \vartheta_i(y) \cdot \cdot \ (i = 1, \cdot \cdot 5) ,$$

deren Determinante D_1 sei, $f(x)$ in ein Gebilde $f_1(y)$, wobei

$$f(\vartheta) = M_1 f_1$$

werde, so erhält man eine der Gleichung (2), § 9., analoge Gleichung:

$$\varphi_f(\vartheta) \cdot D_1 = \varphi_{f_1} M_1 + \psi_1 f_1 ,$$

in welcher φ_{f_1} ein dem Gebilde f_1 adjungirtes Gebilde φ vorstellt, ψ_1 eine ganze Function der Coordinaten.

Der Beweis dieser Identität kann ganz ähnlich, wie der des § 9., geführt werden. Aus derselben folgt zugleich, dass auf f, Fundamentalpunkten und -Curven von f_1 entsprechend, *ausgezeichnete* Flächen liegen können; nämlich 1) Flächen, durch welche die Gebilde φ_f *einfach* gehen, einem doppelten Punkte oder einfachen Curve von f_1 entsprechend, und 2) Flächen, durch welche die φ_f *doppelt* gehen, einem einfachen Punkte von f_1 entsprechend; ferner 3) noch Flächen, singulären Punkten verschiedener Art von f_1 entsprechend, z. B. einem j_1-fachen Punkte von f_1, durch welchen eine (j_1-1)-fache Fläche von f_1 geht. Durch diese letzteren ausgezeichneten Flächen gehen die φ_f ebenfalls *einfach*; denn der entsprechende j_1-fache Punkt wird für die φ_{f_1} ein (j_1-2)-facher, nicht ein (j_1-3)-facher Punkt.

Vermöge der obigen Identität entsprechen sich der Schnitt von f mit den Gebilden φ_f und der Schnitt von f_1 mit den Gebilden φ_{f_1} eindeutig; und *diese Invarianteneigenschaft der Gebilde* φ_f geht auf eine Reihe von denselben abhängiger Functionen und Zahlen über.

Sei insbesondere p die Anzahl der linear von einander unabhängigen Functionen φ_f, das Raumgeschlecht von f; sei ferner in Bezug auf eine allgemeine Schnittfläche $(f\varphi)$ das Flächengeschlecht hier mit $p^{(1)}$, das Curvengeschlecht (s. § 10.) mit $p^{(2)}$ bezeichnet; in Bezug auf eine Schnittcurve $(f\varphi\varphi)$ von f mit zwei allgemeinen der Gebilde φ_f mit $p^{(3)}$; endlich die Anzahl $(f\varphi\varphi\varphi)$ der beweglichen Schnittpunkte von f mit dreien der allgemeinen φ_f mit $p^{(4)}$ bezeichnet. *Diese sämmtlichen Zahlen sind für jede eindeutige Transformation von f invariant.*

Indessen existiren zwischen diesen Zahlen wieder *lineare Relationen*, von denen man eine auf folgende Art erhalten kann:

Beachten wir zunächst, dass die Schnittcurven $(f\varphi\varphi)$ auf f mit einer ausgezeichneten Fläche dieses Gebildes bewegliche Schnittpunkte besitzen können. Dies wird von den oben erwähnten Arten von ausgezeichneten Flächen von f bei 1) und 2) nicht eintreten, weil die $(f_1\varphi_1\varphi_1)$ nicht durch die entsprechenden Fundamental-Punkte und -Curven von f_1 hindurchgehen; kann aber bei 3) stattfinden. Sei nun ϱ die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte einer Curve $(f\varphi\varphi)$ auf einer ausgezeichneten Fläche $A^{(1)}$ von f, die einfache Fläche der φ_f ist, σ die auf einer solchen Fläche $A^{(2)}$, die doppelte Fläche der φ_f ist. f enthalte keine solche singuläre Punkte, denen ausgezeichnete Flächen der dritten Art auf f_1 entsprechen können.

Um die zu einer Schnittfläche $(f\varphi)$ adjungirten Gebilde φ, $\varphi_{(f\varphi)}$, zu erhalten, hat man, wie sich aus Betrachtungen, welche denen des § 8. analog sind, ergiebt, die Gebilde $(2n-10)^{\text{ter}}$ Ordnung aufzustellen, welche durch jede j-fache Fläche, Curve, Punkt von f bezüglich $2(i-1)$-, $2(i-2)$-, $2(i-3)$-fach gehen, durch eine ausgezeichnete Fläche einfach oder zweifach, je nachdem diese einfache $(A^{(1)})$ oder zweifache $(A^{(2)})$ Fläche der φ_f ist. Zu diesen Gebilden gehört auch jedes zerfallende Gebilde $\varphi\cdot\varphi'$, wo φ, φ' Gebilde φ_f vorstellen; diese haben aber eine $A^{(1)}$ als doppelte, eine $A^{(2)}$ als vierfache Fläche.

Nun ist, nach [I], § 10., $p^{(2)}-1$ gleich der Anzahl der beweglichen Schnittpunkte einer Fläche $(f\varphi)$ mit zweien ihrer adjungirten $\varphi_{(f\varphi)}$; also gleich der Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von $(f\varphi)$ mit zwei Gebilden $\varphi\cdot\varphi'$, $\varphi''\cdot\varphi'''$, plus $2\varrho+4\sigma$. Denn zu dem beweglichen Schnitt von $(f\varphi)$ mit $\varphi\cdot\varphi'$, $\varphi''\cdot\varphi'''$ tritt noch der Schnitt der $(f\varphi)$ und $\varphi\cdot\varphi'$ angehörigen Flächen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ mit φ'' und mit φ''' einfach, bez. zweifach hinzu. Nach der Bedeutung von $p^{(4)}$ folgt daher

$$p^{(2)}-1=4p^{(4)}+2\varrho+4\sigma.$$

Um ferner die zu einer Schnittcurve $(f\varphi\varphi)$ adjungirten Gebilde φ, $\varphi_{(f\varphi\varphi)}$, zu erhalten, hat man die Gebilde $(3n-15)^{\text{ter}}$ Ordnung aufzustellen, welche durch jede j-fache Fläche, Curve, Punkt von f bezüglich $3(j-1)$-, $3(j-2)$-, $3(j-3)$-fach, durch eine ausgezeichnete Fläche $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ zweifach, bezüglich vierfach gehen. Der bewegliche Schnitt dieser $\varphi_{(f\varphi\varphi)}$ mit der Curve $(f\varphi\varphi)$ beträgt dann $2(p^{(3)}-1)$ Punkte.

Zu diesen Gebilden gehören auch die zerfallenden der Form $\varphi\cdot\varphi'\cdot\varphi'$; dieselben haben aber $A^{(1)}$ als dreifache, $A^{(2)}$ als sechsfache Fläche. Der bewegliche Schnitt von $\varphi\cdot\varphi'\cdot\varphi'$ mit $(f\varphi\varphi)$, $+\varrho+2\sigma$, ist also gleich der Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von $\varphi_{(f\varphi\varphi)}$ mit $(f\varphi\varphi)$; d. h.

$$2p^{(3)}-2=3p^{(4)}+\varrho+2\sigma.$$

Aus diesen beiden Relationen ergiebt sich endlich eine nur die Zahlen $p^{(i)}$ enthaltende:

$$p^{(2)} = 4p^{(3)} - 2p^{(4)} - 3.$$

Diese Relation bleibt auch bestehen, wenn f solche singuläre Punkte enthält, denen auf f_1 ausgezeichnete Flächen der Art 3) entsprechen; denn man hat alsdann unsere Betrachtung nur auf f_1 anzuwenden, um die für f eintretende Modification zu erkennen.

Die speciellen Gebilde, welche bisher von mir untersucht werden konnten und von denen ich einen Theil hier folgen lasse, genügen noch einer zweiten Relation, die ebenfalls, wenn auch deren geometrische Bedeutung unbekannt ist, allgemeine Gültigkeit zu haben scheint:

$$p^{(1)} - 2p = p^{(3)} - p^{(4)} - 4.$$

Es existiren also für Gebilde von 3 Dimensionen 3 von einander unabhängige invariante Zahlen.

Als Material zur Bestätigung des Vorhergehenden füge ich folgende Gebilde von 3 Dimensionen (wobei f_i ein solches i^{ter} Ordnung bezeichnet), welche die wesentlichen der genannten Eigenschaften aufzeigen, mit den zugehörigen Zahlen in der Ordnung p, $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, $p^{(3)}$, $p^{(4)}$ an.

1. f_5 . . . . . Zugeh. Zahlen: 1, —, —, —, —.
2. f_6 . . . . . Zugeh. Zahlen: 5, 10, 25, 10, 6.
3. f_6 mit einem 4-fachen Punkte . . . . . 4, 6, 9, 4, 2.
4. f_6 mit einer doppelten Ebene . . . . . 2, 1, —, —, —.
5. f_6 mit einer dreifachen Geraden . . . . 3, 3, 1, 1, 0.
6. f_7 . . . . . 15, 55, 225, 85, 56.

Tritt bei f_7 noch ein 4-facher Punkt ein, so vermindern sich die Zahlen genau wie von Fall 2. zu 3.

7. f_7 mit 5-fachem Punkte . . . . . 10, 25, 65, 25, 16.
8. f_7 mit doppelter Ebene . . . . . 9, 26, 89, 34, 22.
9. f_7 mit doppelter Ebene E und mit 5-fachem Punkte P.

Die adjungirten φ_f haben noch eine feste Fläche (5^{ter} Ordnung) gemein, in welcher f_7 von dem ebenen Gebilde erster Ordnung, das durch E und P geht, geschnitten wird. Diese ausgezeichnete Fläche trifft die Curven $(f\varphi\varphi)$ nicht in beweglichen Punkten. Die zugehörigen Zahlen sind dieselben wie bei 3. . . . . 4, 6, 9, 4, 2.

10. f_7 mit 3-facher Geraden . . . . . 12, 41, 161, 61, 40.
11. f_7 mit 4-facher Geraden . . . . . 6, 9, 1, 1, 0.
12. f_7 mit 3-facher Ebene . . . . . 3, 1, —, —, —.

Hierbei zerfallen sämmtliche Schnitte $(f\varphi)$. Man kann aber die zugehörigen Zahlen auf einen irreducibeln Theil des Schnittes beziehen,

wie es ähnlich schon in den Fällen 4., 5., 11. für einige der Zahlen zu geschehen hat.

13. f_7 mit doppelter Fläche 2^{ter} Ordnung . . 6, 14, 41, 16, 10.

14. f_7 mit doppelter (ebener) Fläche 3^{ter} Ordnung; der ebene Raum derselben schneidet f_7 noch in einer ausgezeichneten Ebene, welche einfache Fläche für alle φ_f ist und von den Curven $(f\varphi\varphi)$ noch in je einem beweglichen Punkte getroffen wird, so dass $\varrho = 1$ wird . . . . . 5, 11, 31, 12, 7.

15. f_n. Für das allgemeine Gebilde n^{ter} Ordnung findet sich:

$$p = \tfrac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

$$p^{(1)} = \tfrac{1}{24}(2n-6)(2n-7)(2n-8)(2n-9) - \tfrac{1}{24}(n-6)(n-7)(n-8)(n-9) - \tfrac{1}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

$$p^{(2)} = 4n(n-5)^3+1, \qquad p^{(3)} = \tfrac{3}{2}n(n-5)^3+1, \qquad p^{(4)} = n(n-5)^3.$$

Zur Untersuchung einiger complicirterer der Gebilde 7^{ter} Ordnung, wie von 8. und 13., kann man die Bemerkung benutzen, dass sich die ihnen zugehörigen Gebilde φ, von der 2^{ten} Ordnung, auf den ebenen Raum von 3 Dimensionen eindeutig abbilden lassen.

Heidelberg, im October 1874.

Ueber Systeme von Curven und Flächen.

Von A. Brill in München.

Sind μ und ν die Charakteristiken eines einfach unendlich ebenen Curvensystems, d. h. gehen durch jeden Punkt der Ebene μ Curven und berühren jede Gerade ν Curven des Systems, so sagt ein bekannter von Chasles aufgestellter Satz aus (der zuerst wohl von Herrn Zeuthen*) allgemein bewiesen worden ist), dass die Anzahl derjenigen Curven des Systems, welche eine gegebene feste Curve von der Ordnung m und der Classe n berühren, bloss von den Zahlen m und n und den Charakteristiken des Systems abhängt, nämlich gleich:

$$m\nu + n\mu$$

ist; welche Singularitäten im Uebrigen auch die feste Curve und das Curvensystem besitzen mögen. Dieser wegen seiner unbeschränkten Gültigkeit für die Theorie der Charakteristiken merkwürdige Satz wurde von Jonquières auf Flächensysteme ausgedehnt; er bemerkte nämlich (Comptes rendus tt. 58, 61), dass, wenn eine Fläche von der Ordnung m, Classe n und dem Range (Ordnung des Tangentenkegels) r gegeben ist, dieselbe von:

$$m\nu + n\mu + r\varrho$$

Flächen eines einfach unendlichen Flächensystems mit den Charakteristiken μ, ν, ϱ berührt wird, d. h. eines Systems von Flächen, von welchen μ durch jeden Punkt des Raumes gehen, ν jede Ebene und ϱ jede Gerade des Raumes berühren. Ob auch dieser Satz unbeschränkte Gültigkeit besitzt, wie der vorstehende, ist von Jonquières nicht weiter erörtert worden; denn er führt seinen Beweis nur für den Fall einer Fläche ohne Singularitäten. Sturm, der bei dem Beweise des nämlichen Satzes diese Specialisirung fallen gelassen hat**), beschränkt sich dafür andererseits auf ein System von Flächen 2. Ordnung. Im Nachfolgenden gedenke ich diese Frage zu beantworten,

*) Diese Annalen Bd. III, p. 153.

**) Ibid. Bd. VII, p. 578.

indem ich einen von beschränkenden Voraussetzungen unabhängigen Beweis der beiden oben angeführten Sätze mittheile. Derselbe stützt sich auf das Chasles'sche Correspondenzprincip und auf einen Satz über Entsprechen von Punkten in einer Ebene, welcher in dem Appendix IV der Salmon'schen geometry of 3 dimensions ausgesprochen*) ist und mit Hülfe jenes Principes leicht bewiesen werden kann.

Aber den eben genannten beiden Theoremen stellen sich zwei analoge (dualistisch sich entsprechende) Sätze über Systeme von *Raumcurven* an die Seite, die, obgleich durch einfache Uebertragung jener anderen Sätze leicht herstellbar, doch bisher wohl noch nicht bemerkt worden sind**). Dieselben mögen gleichfalls weiter unten formulirt und bewiesen werden.

1. Wir beginnen mit dem Problem in der Ebene: die Anzahl der eine feste ebene Curve C berührenden Curven eines einfach unendlichen Curvensystems zu bestimmen. — Wir nehmen in der Ebene eine beliebige Gerade G an, legen von einem Punkte x derselben die n Tangenten an die feste Curve C und construiren in jedem Berührungspunkt die Tangenten an die μ Curven des Systems, welche durch ihn hindurchgehen. Dieselben schneiden die Gerade G in $n\mu$ Punkten y, die dem Punkt x entsprechen. Es wird die Anzahl der Coincidenzen von Punkten x und y auf G gesucht. Nun entspricht umgekehrt jedem Punkt y als Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die man durch y an sämmtliche Curven des Systems legen kann, eine Curve von der Ordnung $\mu + \nu$, die in y einen μ-fachen Punkt besitzt. Dieselbe schneidet C in $m(\mu + \nu)$ Punkten; zieht man in diesen die Tangenten an C, so sind deren Schnittpunkte mit der Geraden G die dem Punkt y entsprechenden Punkte x. Zwischen x und y besteht also eine Correspondenz $(n\mu, m(\mu + \nu))$. Zu den Coincidenzpunkten derselben gehören die m Punkte, in welchen die Gerade G von der festen Curve C getroffen wird, und zwar ist, wie man sofort erkennt, jeder μ-fach zu rechnen. Diese $m\mu$ Coincidenzen rühren nicht von dem Zusammenfallen entsprechender Tangenten *in ihrer ganzen Ausdehnung* her, sondern nur von einem zufälligen Schnitt von solchen auf der Geraden T. Die übrigen:

$$n\mu + m(\mu + \nu) - m\nu = m\nu + n\mu$$

Punkte entsprechen dann denjenigen Tangenten an die feste Curve,

*) Fast gleichzeitig mit dem Erscheinen der 3. Aufl. dieses Werkes hat Herr Zeuthen in den Comptes rendus vom Juni 1874 denselben Satz bewiesen und weiter ausgedehnt.

**) Vermuthungsweise sprach dieselben Herr Schubert in einer brieflichen Mittheilung mir gegenüber aus.

welche, bei übereinstimmenden Berührungspunkten, zugleich Tangenten an Curven des Systems sind. Q. e. d.

2. Ganz ähnlich kann man verfahren, um *die Anzahl der Flächen eines Systems, die eine gegebene Fläche berühren, zu bestimmen.*

Man nehme irgend eine Ebene E an, lege durch eine beliebige Gerade x derselben die n Tangentialebenen an die feste Fläche, construire in den Berührungspunkten derselben je die Tangentialebenen an die μ Flächen des Systems, die durch jeden Berührungspunkt hindurchgehn; dann schneiden diese die Ebene E in zusammen $n\mu$ Geraden y, welche der Geraden x entsprechen. Umgekehrt entspricht jeder Geraden y eine Raumcurve von der Ordnung $\varrho + \nu$ (Salmon, three dimensions, Art. 637, 6), nämlich der Ort der Berührungspunkte der durch y gehenden Ebenen mit Flächen des Systems. Diese Curve schneidet die feste Fläche in $(\varrho + \nu)m$ Punkten, die ebenso viele Tangentialebenen liefern. Die Schnittgeraden der Letzteren mit der Ebene E sind die den Geraden y entsprechenden Geraden x. Zwischen den Geraden x und y der Ebene E besteht also eine Correspondenz:

$$(n\mu, (\varrho + \nu)m).$$

Der Tangentenkegel, welcher an die feste Fläche von einem beliebigen Punkt P der Ebene E aus gelegt werden kann, berührt dieselbe längs einer Raumcurve, die, wie man sich leicht überzeugt, von der Ordnung r ist. Andererseits entspricht dem Punkt P der Ort der Berührungspunkte der Tangenten von P an Flächen des Systems, eine Fläche (Salmon, Art. 637, 5) von der Ordnung $(\mu + \varrho)$, welche jene Raumcurve in $(\mu + \varrho)r$ Punkten schneidet. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit P berühren in demselben Punkt je die feste Fläche und eine Fläche des Systems und liefern ebenso viele Paare von Tangentialebenen einerseits an die feste Fläche, andererseits an eine Fläche des Systems, deren Schnittlinien mit E ebensoviele einander entsprechende Strahlen x und y durch den Punkt P darstellen.

Nun lautet aber der Eingangs erwähnte Satz über Entsprechen von Punkten in einer Ebene (Salmon, three dimensions, Art. 638) in dualistischer Uebertragung auf *Gerade* einer Ebene folgendermassen: Hat man in einer Ebene zwei Systeme von Geraden, welche eine Correspondenz (α, α') bilden, und gehen durch jeden Punkt der Ebene β Paare von einander entsprechenden Geraden, so ist die Zahl der Geraden, welche mit den ihnen entsprechenden coincidiren, gleich:

$$\alpha + \alpha' + \beta.$$

Dieser Satz, auf die Correspondenz der Geraden x und y in der Ebene E angewendet, liefert:

$$n\mu + (\varrho + \nu)m + (\mu + \varrho)r$$

zusammenfallende Paare von entsprechenden Geraden. Unter diesen befinden sich indess auch Paare, die nicht von solchen Tangentialebenen herrühren, die in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen, sondern von solchen, die sich zufällig auf der Ebene E schneiden. Es sind dies diejenigen $m\varrho + r\mu$ Tangenten an die Durchschnittscurve E mit der festen Fläche, in welchen, nach dem oben bewiesenen Satz über ebene Curvensysteme, diese Curve von den Schnittcurven des Systems mit der Ebene E berührt wird. Zieht man diese ab, so bleiben:

$$n\mu + (\varrho + \nu)m + (\mu + \varrho)r - (m\varrho + r\mu) = m\nu + n\mu + r\varrho$$

zusammenfallende Paare, d. h.: Tangentialebenen an die feste Fläche, welche mit Tangentialebenen an Flächen des Systems, die denselben Berührungspunkt besitzen, zusammenfallen. Q. e. d.

3. Zu den Charakteristiken eines einfach unendlichen Systems von *Raumcurven* sind, ebenso wie die Zahlen μ, ϱ, welche die Anzahl der Curven des Systems angeben, die eine gegebene Gerade treffen, bezw. eine Ebene berühren, auch die dualistisch entsprechenden: ν und σ zu rechnen, die bezw. die Anzahl der Schmiegungsebenen durch eine Gerade und die der Tangenten durch einen Punkt angeben*).

Die ersteren beiden genügen indess, wenn es sich um die Aufstellung der *Anzahl der Curven des Systems handelt, die eine gegebene Fläche* (m, n, r wie oben) *berühren*. Um zu beweisen, dass diese Anzahl

$$= \mu r + \varrho m$$

ist, schneiden wir die Fläche μ. Ordnung, welche von der Gesammtheit der Curven gebildet wird, mit der gegebenen Fläche, und erhalten eine Schnittcurve C μm^{ter} Ordnung; in jedem Punkt derselben möge die Tangente an die durch ihn gehende Curve des Systems gelegt werden. Diese Tangenten bilden dann eine windschiefe Fläche von der Ordnung $m(\mu + \varrho)$. Denn lässt man eine Ebene um eine beliebige Gerade des Raumes sich drehen, so ist der geometrische Ort der Berührungspunkte von Curven des Systems und dieser Ebene eine Raumcurve von der Ordnung $\varrho + \mu$, welche F in $m(\varrho + \mu)$ Punkten trifft, deren jeder eine Tangente nach der angenommenen Geraden entsendet. — Construirt man andrerseits in jedem Punkt der Schnittcurve C die Tangentialebene an F, so erhält man eine abwickelbare Fläche von der Classe $r\mu$. Denn durch einen beliebigen Punkt des Raumes lässt sich ein Tangentialkegel r^{ter} Ordnung legen, welcher F in einer Raumcurve r^{ter} Ordnung berührt, die von $r\mu$ Curven des Sy-

*) Da weiter unten von den Zahlen $\mu\ \nu\ \varrho\ \sigma$ nur je zwei benutzt werden, so kann die Frage nach einer etwaigen Beziehung zwischen diesen vier Grössen hier unerörtert gelassen werden.

stems getroffen wird. — Jeder Ebene der so entstandenen abwickelbaren Fläche entspricht eine Erzeugende der windschiefen Fläche und umgekehrt. Dies Verhältniss überträgt sich auf die Schnitte dieser Fläche mit einer beliebigen Ebene E, in welcher die Punkte der einen Schnittcurve $m(\mu+\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung den Geraden der anderen $r\mu^{\text{ter}}$ Classe eindeutig entsprechen. Nach einem bekannten Satz (diese Annalen VII, p. 621) ereignet es sich alsdann im Ganzen: $[m(\mu+\varrho)+r\mu]$-mal, dass ein Punkt in die ihm entsprechende Gerade fällt. Zu diesen Punkten gehören indess auch die μm Schnittpunkte der Ebene E mit der Curve C. Es giebt daher:

$$m(\mu+\varrho)+r\mu-m\mu=m\varrho+r\mu$$

Tangentialebenen der gegebenen Fläche, für welche die Tangente an die durch den Berührungspunkt gehende Curve des Systems in die Tangentialebene hereinfällt. Q. e. d.

Aus dem Princip der Dualität folgt dann noch der Satz: Dass es $n\sigma+r\nu$ Punkte der Fläche giebt, in welchen eine Schmiegungsebene einer Curve des Systems berührt, während zugleich die Curventangente durch den Berührungspunkt hindurchgeht.

Darmstadt, im December 1874.

Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen.

Von M. Krause in Heidelberg.

Das allgemeine Problem der Transformationstheorie der elliptischen Functionen besteht bekanntlich darin, wenn die Differentialgleichungen:

$$dw = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

$$dw = \frac{a\,dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$$

gegeben sind, den Multiplicator a und den transformirten Integralmodul k so zu bestimmen, dass die aus der zweiten Gleichung herzuleitenden elliptischen Functionen sich rational durch die der ersten ausdrücken. Dann muss, wenn wir den Modul der zugehörigen Thetafunctionen mit τ, respective τ' bezeichnen,

$$\tau' = \frac{\beta_0 - \alpha_0\tau}{\alpha_1\tau - \beta_1} \tag{1}$$

sein, wobei:

$$\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = n$$

eine positive ganze Zahl, der Grad der Transformation ist. Solcher Zahlensysteme $\alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1$, welche obenstehender Gleichung genügen, giebt es unendlich viele, doch lassen dieselben sich immer in eine endliche Anzahl von Classen eintheilen. Eine jede solcher Classen enthält zwar wieder eine unendlich grosse Anzahl von Transformationszahlen, doch nur solche, die durch lineare Transformation in einander übergehen.

Nehmen wir an, dass n eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist — eine Annahme, die im Folgenden beibehalten werden soll, — d. h. setzen:

$$n = a_0 \cdot \cdots \cdot a_p\,,$$

so ist die Zahl der Classen:

$$(a_0+1)(a_1+1)\cdot\cdots\cdot(a_p+1)\,,$$

überdies können als Repräsentanten einer jeden derselben Zahlen der Form gewählt werden:

$$\delta,\ 0,\ 16\,\xi,\ \delta_1,$$

wobei $\xi = 0,\ 1 \cdots \delta_1 - 1$, $\delta\delta_1 = n$ und δ einen jeden Theiler von n bedeutet.

Ferner ist bekannt, dass, wenn wir eine Grösse q definiren, durch:

$$q = e^{\pi\tau i}$$

die vierte Wurzel aus dem Integralmodul c als eindeutige Function von τ durch den Ausdruck gegeben ist:

$$\sqrt[4]{c} = u = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{q}\ \frac{(1+q^2)(1+q^4)\cdots}{(1+q)(1+q^3)\cdots} = \varphi(\tau). \tag{2}$$

Alsdann ergiebt sich für die vierte Wurzel desjenigen transformirten Integralmoduls, welcher den Transformationszahlen

$$\delta,\ 0,\ 16\xi,\ \delta_1,$$

entspricht, vorausgesetzt, dass ihr Vorzeichen auf eine gewisse eindeutige Weise bestimmt ist,

$$\sqrt[4]{k} = v = \left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi}{\delta_1}\right). \tag{3}$$

Lassen wir hierin δ, δ_1, 16ξ alle den obigen Bedingungen genügenden Werthe annehmen, so werden die entsprechenden v Grössen Lösungen einer algebraischen Gleichung, der Modulargleichung, die in Bezug auf v vom

$$(a_0 + 1) \cdots (a_p + 1)^{\text{ten}}$$

Grade ist und deren Coefficienten ganze Functionen von u sind.

Die Discriminante derselben hat die Form:

$$D = u^N(u^8 - 1)^{N'}(a_0 + a_1 u^8 + \cdots a_r u^{8r}),$$

wenn:

$$N = nS'(n) - S(n) + 2\Delta(n),$$
$$N' = nS'(n) - S(n) + 2\Delta'(n),$$
$$4\nu = S(n)^2 - S(n) - N - 4N'$$

ist.

Dabei haben die auf den rechten Seiten vorkommenden Grössen folgende Bedeutung. Es ist $S(n)$ gleich der Summe der Divisoren der Zahl n, $S'(n)$ gleich der Anzahl dieser Divisoren, ferner

$$\Delta(n) = \Sigma tt',$$

wenn t und t' alle die Divisoren von n bedeuten, für welche

$$tt' < n,$$

endlich

$$\Delta'(n) = \Sigma t_1 t_1',$$

wenn $t_1 t_1'$ dieselbe Bedingung wie tt' erfüllen und überdies noch:

$$\left(\frac{2}{t_1}\right)\left(\frac{2}{t_1'}\right) = 1\ ^*).$$

*) Siehe in Bezug auf die hier angeführten Sätze das Werk meines hochverehrten Lehrers, Herrn Prof. Koenigsberger, „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen", Leipzig 1874.

Die Discriminante gleich Null gesetzt, giebt diejenigen u Werthe, für welche zwei der v Werthe einander gleich werden. Wir bezeichnen letztere mit:

$$v_1 = \left(\frac{2}{\delta}\right) \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right),$$

$$v_2 = \left(\frac{2}{u}\right) \varphi\left(\frac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}\right).$$

Nun gilt allgemein der Satz, dessen Beweis unmittelbar klar ist, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei φ Functionen von verschiedenen Argumenten:

$$\varphi(\tau_1) \text{ und } \varphi(\tau_2),$$

abgesehen von achten Einheitswurzeln, einander gleich werden, ist:

$$\tau_1 = \frac{b_0 - a_0\tau_2}{a_1\tau_2 - b_1}, \tag{4}$$

wobei die Zahlen $a_0 b_0 a_1 b_1$ zum ersten Fall der linearen Transformation gehören (siehe das oben citirte Werk II$^{\text{ter}}$ Theil p. 112) und je nach der Wahl der achten Einheitswurzel verschiedene Bedingungen erfüllen. Wir werden diese Bedingungen später für den Fall zweier dieser achten Einheitswurzeln, nämlich ± 1 ausführlich aufstellen.

Setzen wir nun:

$$\tau_1 = \frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}; \qquad \tau_2 = \frac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1},$$

so folgt: die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) \varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1}\right) = \left(\frac{2}{u}\right) \varphi\left(\frac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}\right)$$

werde, ist:

$$\frac{\delta\tau - 16\,\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\dfrac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1}}{a_1\dfrac{u\tau - 16\,\xi_2}{u_1} - b_1},$$

wobei also $a_0 b_0 a_1 b_1$ später noch aufzustellenden Bedingungen genügen müssen.

Wie wir sehen, erhalten wir auf diese Weise eine quadratische Gleichung in τ:

$$P\tau^2 + 2\,Q\tau + R = 0, \tag{5}$$

deren eine Lösung mindestens die Eigenschaft hat, dass für die ihr entsprechende $\varphi(\tau)$ Function zwei Wurzeln der Modulargleichung einander gleich werden.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden, denen die P, Q, R genügen müssen, damit für die einer oder beiden Lösungen τ entsprechenden Functionen $\varphi(\tau)$ zwei Wurzeln der Modulargleichung, die zu einer rationalen

Transformation n^{ten} Grades gehört, einander gleich werden, vorausgesetzt, dass n eine unpaare Zahl ohne quadratischen Theiler ist.

Wir fanden:

$$\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1} = \frac{b_0 - a_0\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)}{a_1 \frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1} - b_1}.$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung:

$$\alpha_1\tau^2 + (\alpha_0 - \beta_1)\tau - \beta_0 = 0,$$

wenn:

$$\alpha_0 = u(a_0\delta_1 - 16\xi_1 a_1),$$
$$\alpha_1 = a_1\delta u,$$
$$\beta_0 = b_0\delta_1 u_1 + 16\xi_2 a_0\delta_1 - 16\xi_1 b_1 u_1 - 16^2\xi_1\xi_2 a_1,$$
$$\beta_1 = \delta(b_1 u_1 + 16\xi_2 a_1),$$

und daher

$$\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = n$$

ist.

Die Determinante dieser Gleichung hat die Form:

$$\Delta = (a+n)(a-n),$$

wenn:

$$a = \frac{\alpha_0 + \beta_1}{2}$$

ist.

Nun muss wegen der Convergenz der ϑ Functionen der reelle Theil von $\frac{\tau}{i}$ positiv sein. Daraus folgt unmittelbar, dass Δ negativ sein muss, ferner dass nur diejenige der beiden τ Wurzeln gebraucht werden kann, für welche der Coefficient von i positiv ist.

Wir wollen zunächst das Verhalten von a in Bezug auf den Modul 16 untersuchen, oder, näher präcisirt, zusehen, welche Werthe r in:

$$a \equiv rn \bmod 16$$

annehmen kann.

Dazu ist es nöthig, die schon vorhin angedeuteten Bedingungen aufzustellen, denen die Grössen $a_0 b_0 a_1 b_1$ genügen. Dieselben lauten:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1.$$

1) $a_0 = 8A + 1$; $b_1 = 8B + 1$; $a_1 \equiv 0 \bmod 2$; $b_0 \equiv 0 \bmod 16$;
$A + B \equiv 0 \bmod 4$;

2) $a_0 = 8A + 7$; $b_1 = 8B + 7$; $a_1 \equiv 0 \bmod 2$; $b_0 \equiv 0 \bmod 16$;
$A + B \equiv 2 \bmod 4$;

3) $a_0 = 8A + 3$; $b_1 = 8B + 3$; $a_1 \equiv 0 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 1 \bmod 4$;

*) Hermite, Sur la théorie des équations modulaires etc. Paris 1859. p. 33.

4) $a_0 = 8A + 3$; $b_1 = 8B + 3$; $a_1 \equiv 2 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 3 \bmod 4$;

5) $a_0 = 8A + 5$; $b_1 = 8B + 5$; $a_1 \equiv 0 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 1 \bmod 4$;

6) $a_0 = 8A + 5$; $b_1 = 8B + 5$; $a_1 \equiv 2 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 3 \bmod 4$.

II. $\left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1$.

1) $a_0 = 8A + 1$; $b_1 = 8B + 1$; $a_1 \equiv 0 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 0 \bmod 4$;

2) $a_0 = 8A + 1$; $b_1 = 8B + 1$; $a_1 \equiv 2 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 2 \bmod 4$;

3) $a_0 = 8A + 7$; $b_1 = 8B + 7$; $a_1 \equiv 0 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 2 \bmod 4$;

4) $a_0 = 8A + 7$; $b_1 = 8B + 7$; $a_1 \equiv 2 \bmod 4$; $b_0 \equiv 8 \bmod 16$;
$A + B \equiv 0 \bmod 4$;

5) $a_0 = 8A + 3$; $b_1 = 8B + 3$; $a_1 \equiv 0 \bmod 2$; $b_0 \equiv 0 \bmod 16$;
$A + B \equiv 1 \bmod 4$;

6) $a_0 = 8A + 5$; $b_1 = 8B + 5$; $a_1 \equiv 0 \bmod 2$; $b_0 \equiv 0 \bmod 16$;
$A + B \equiv 1 \bmod 4$.

Man findet diese Bedingungen unmittelbar, wenn man die an der citirten Stelle aufgestellten Relationen für die beiden achten Einheitswurzeln ± 1 näher untersucht.

Es ist nun:

$$2a = \alpha_0 + \beta_1 = u\,[a_0\delta_1 - 16\xi_1 a_1] + \delta\,[b_1 u_1 + 16\xi_2 a_1],$$

d. h.

$$2a \equiv u a_0 \delta_1 + u_1 b_1 \delta \bmod 32.$$

Es ist also die Congruenz zu untersuchen:

$$u a_0 \delta_1 + u_1 b_1 \delta \equiv 2rn \bmod 32;$$

a_0 und b_1 haben die Formen $8A + s$; $8B + s$, daraus folgt:

$$u a_0 \delta_1 + u_1 b_1 \delta \equiv 8\,[u\delta_1 A + u_1 \delta B] + s\,[u\delta_1 + u_1 \delta] \bmod 32.$$

Wir untersuchen zunächst:

$$u\delta_1 + \delta u_1 \equiv 2rn \bmod 32.$$

Es ergeben sich hierbei folgende Fälle:

$$\text{I. } \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1 .$$

1) $u = 8p_0 + k$; $u_1 = 8p_1 + k_1$; $\delta = 8p_2 + k$; $\delta_1 = 8p_3 + k_1$;
$r = +1$;

2) $u = 8p_0 + k$; $u_1 = 8p_1 + k_1$; $\delta = 8p_2 - k$; $\delta_1 = 8p_3 - k_1$;
$r = -1$.

$$\text{II. } \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1 .$$

1) $u = 8p_0 + k$; $u_1 = 8p_1 + k_1$; $\delta = 8p_2 + k_1$; $\delta_1 = 8p_3 + k$;
$r = \pm 9$, je nachdem $k \mp k_1 \equiv 0 \bmod 4$;

2) $u = 8p_0 + k$; $u_1 = 8p_1 + k_1$; $\delta = 8p_2 - k_1$; $\delta_1 = 8p_3 - k$;
$r = \mp 9$, je nachdem $k \mp k_1 \equiv 0 \bmod 4$;

3) $u = 8p_0 + k$; $u_1 = 8p_1 + k$; $\delta = 8p_2 + k_1$; $\delta_1 = 8p_3 + k_1$;
$r = +9$, je nachdem $k \mp k_1 \equiv 0 \bmod 4$;

4) $u = 8p_0 + k$; $u_1 = 8p_1 - k$; $\delta = 8p_2 + k_1$; $\delta_1 = 8p_3 - k_1$;
$r = \pm 9$, je nachdem $k \mp k_1 \equiv 0 \bmod 4$.

Weitere Fälle sind nicht möglich. Die Richtigkeit der Behauptungen folgt aus einer näher eingehenden Rechnung. Wir zeigen die Art derselben an dem Falle II, 2. Für diesen ist die Congruenz aufzulösen

$$(8p_0+k)(8p_3-k) + (8p_1+k_1)(8p_2-k_1) \equiv ruu_1 + r\delta\delta_1 \bmod 32,$$

oder

$$8[(p_3-p_0) - r(p_1-p_2)](k-k_1) - (k+k_1)^2 - 2(r-1)kk_1 \equiv 0 \bmod 32.$$

Sei nun:

$$k - k_1 \equiv 0 \bmod 4,$$

mithin

$$k + k_1 \equiv 2 \bmod 4,$$

so folgt daraus unmittelbar als einzige Lösung:

$$r = -9 .$$

Wir können die soeben gefundenen Resultate übersichtlicher darstellen:

Sei $u = 8p_0 + k$; $\delta = 8p_2 + k_1$; so ist, wenn:

(7)
$$\begin{cases} \text{I. } \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1, \\ r = +1, \text{ je nachdem } k \pm k_1 \equiv 0 \bmod 4, \text{ wenn} \\ \text{II. } \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1, \\ r = \mp 9, \text{ je nachdem } k \pm k_1 \equiv 0 \bmod 4. \end{cases}$$

Untersuchen wir jetzt die Congruenz:

$$2a \equiv 2rn \bmod 32,$$

so ergiebt sich vermöge Rechnungen genau derselben Art für die in Formel (6) aufgestellten zwölf Fälle respective:

(8)
$$\left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \\ 1)\ a \equiv \mp n \bmod 16; & 2)\ a \equiv \pm n \bmod 16; \\ 3)\ a \equiv \pm 9n \bmod 16; & 4)\ a \equiv \pm n \bmod 16; \\ 5)\ a \equiv \mp 9n \bmod 16; & 6)\ a \equiv \mp n \bmod 16. \\ \text{II.} & \\ 1)\ a \equiv \mp 9n \bmod 16; & 2)\ a \equiv \mp n \bmod 16; \\ 3)\ a \equiv \pm 9n \bmod 16; & 4)\ a \equiv \pm n \bmod 16; \\ 5)\ a \equiv \pm n \bmod 16; & 6)\ a \equiv \mp n \bmod 16. \end{array}\right.$$

Dabei ist in allen zwölf Fällen das obere oder das untere Zeichen zu nehmen, je nachdem

$$k \pm k_1 \equiv 0 \bmod 4.$$

Wie wir sehen, zeigt sich das merkwürdige Resultat, dass a nur:

$$a \equiv \pm n \bmod 8$$

sein kann.

Je nachdem nun:

$$a \equiv \pm 9n \bmod 16$$

oder

$$a \equiv \pm n \bmod 16$$

ist, nimmt die Determinante eine der beiden Formen an:

(9)
$$\left\{\begin{array}{l} \Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta), \\ \Delta' = -32\delta(n - 8\delta). \end{array}\right.$$

Also finden wir: Damit eine Lösung von

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

unseren früher aufgestellten Bedingungen genüge, ist eine nothwendige Bedingung, dass die Determinante der Gleichung sich in eine der beiden Formen bringen lässt:

$$Q^2 - PR = \Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta)$$

oder

$$Q^2 - PR = \Delta' = -32\delta(n - 8\delta)$$

und negativ ist.

Es fragt sich jetzt, welchen weiteren Bedingungen die Coefficienten genügen müssen.

Es ergab sich für τ die Gleichung:

$$\alpha_1\tau^2 + (\alpha_0 - \beta_1)\tau - \beta_0 = 0$$

oder

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0\,,$$

wenn:

$$P = a_1\delta u\,,$$
$$2\,Q = u\,[a_0\delta_1 - 16\xi_1 a_1] - \delta\,[b_1 u_1 + 16\xi_2 a_1]\,,$$
$$R = 16^2\xi_1\xi_2 a_1 + b_1 16\xi_1 u_1 - 16\,\xi_2 a_0\delta_1 - b_0\delta_1 u_1\,.$$

Sei zunächst

$$\Delta = 16(3n - 8\delta)\,(n - 2\delta)\,,$$

so zeigt die in (6) aufgestellte Tabelle, dass in allen diesen Fällen

$$a_1 \equiv 0 \bmod 4\,; \quad b_0 \equiv 8 \bmod 16$$

ist, mithin auch:

$$P \equiv 0 \bmod 4\,; \quad R \equiv 8 \bmod 16\,.$$

Es bleibt übrig Q zu betrachten und zwar untersuchen wir es nach dem Modul 8. Es ist:

$$2Q \equiv ua_0\delta_1 - u_1 b_1\delta \bmod 16 \equiv ua_0\frac{n}{\delta} - \frac{n}{u}b_1\delta \bmod 16 \equiv \frac{n}{\delta u}[u^2a_0 - \delta^2 b_1] \bmod 16.$$

Die Rechnung zeigt nun, dass:

$$u^2a_0 - \delta^2 b_1$$

in allen möglichen vorkommenden Fällen congruent ist:

$$u^2a_0 - \delta^2 b_1 \equiv 8 \bmod 16.$$

Wir zeigen die Art derselben an einem Beispiele und wählen dazu Formel (6) II, 1). Dafür wird:

$$u^2a_0 - \delta^2 b_1 \equiv 8\,[k^2A - k_1{}^2B] + k^2 - k_1{}^2 - k^2 - k_1{}^2 \bmod 16\,.$$

Nun ist aber in diesem Falle

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = -1\,,$$

mithin

$$k^2 - k_1{}^2 \equiv 8 \bmod 16\,,$$

also auch

$$u^2a_0 - \delta^2 b_1 \equiv 8 \bmod 16$$

q. e. d.

Hieraus folgt unmittelbar, dass auch

$$2\,Q \equiv 8 \bmod 16$$

oder

$$Q \equiv 4 \bmod 8$$

sein muss.

Aehnliche Resultate ergeben sich für:

$$\Delta' = -32\,\delta\,(n - 8\,\delta)\,.$$

Man hat hierfür zwei Fälle zu unterscheiden, wie aus den aufgestellten Tabellen unmittelbar ersichtlich ist:

a) $P \equiv 2 \bmod 4\,; \quad Q \equiv 4 \bmod 8\,; \quad R \equiv 8 \bmod 16\,;$

b) $P \equiv 0 \bmod 2\,; \quad Q \equiv 0 \bmod 8\,; \quad R \equiv 0 \bmod 16\,.$

Fassen wir die letzten Resultate zusammen, so ergiebt sich:
Die nothwendigen Bedingungen, damit zu einer Lösung τ von:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\varphi(\tau)$ gehöre, die Wurzel der oben aufgestellten Discriminante

$$D = 0$$

ist, sind:

(10)
1) Die Determinante der Gleichung muss sich in eine der beiden Formen:

$$\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta)$$

oder

$$\Delta' = -32\delta(n - 8\delta)$$

bringen lassen und negativ sein.

2) Falls

$$\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta) \text{ ist,}$$

muss sein:

$$P \equiv 0 \bmod 4\,; \quad Q \equiv 4 \bmod 8\,; \quad R \equiv 8 \bmod 16.$$

Falls

$$\Delta' = -32\delta(n - 8\delta) \text{ ist,}$$

muss sein:

$$P \equiv 2 \bmod 4\,; \quad Q \equiv 4 \bmod 8\,; \quad R \equiv 8 \bmod 16,$$

oder

$$P \equiv 0 \bmod 2\,; \quad Q \equiv 0 \bmod 8\,; \quad R \equiv 0 \bmod 16.$$

Wir zeigen, dass diese aufgestellten Bedingungen auch die hinreichenden sind.

Dazu muss bewiesen werden, dass, falls sie gelten, $a_0 b_0 a_1 b_1 u u_1 \delta \delta_1 \xi_1 \xi_2$ so bestimmt werden können, dass sie allen Bedingungen Genüge leisten.

Wir fanden:

$$P = a_1 \delta u\,,$$
$$2Q = u[a_0\delta_1 - a_1 16\xi_1] - \delta[b_1 u_1 + a_1 16\xi_2]\,,$$
$$R = 16^2\xi_1\xi_2 a_1 + b_1 u_1 16\xi_1 - a_0\delta_1 16\xi_2 - b_0\delta_1 u_1\,,$$
$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1\,.$$

Setzen wir

$$Q^2 - PR = \Delta\,,$$

so ergeben sich hieraus für a_0 und b_1 die Gleichungen:

$$n^2\delta^2 b_1^2 + 2n\delta b_1[Qu + 16\xi_2 P] = u^2\Delta + u^2 n^2 - (Qu + 16\xi_2 P)^2,$$
$$n^2 u^2 a_0^2 - 2nu a_0[Q\delta + 16\xi_1 P] = \delta^2\Delta + \delta^2 n^2 - (Q\delta + 16\xi_1 P)^2,$$

mithin, da

$$n^2 + \Delta = a^2,$$

(11)
$$\begin{cases} n\delta b_1 = -(Qu + 16\xi_2 P) \pm au\,, \\ nu a_0 = +(Q\delta + 16\xi_1 P) \pm a\delta\,, \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass vermöge der ersten Bedingung a eine bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte ganze Zahl ist.

Ferner ist a_1 bestimmt durch:

$$P = a_1 u \delta$$

und b_0 entweder aus

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

oder

$$R = 16^2 \xi_1 \xi_2 a_1 + 16 \xi_1 b_1 u_1 - 16 \xi_2 a_0 \delta_1 - b_0 \delta_1 u_1 .$$

Es handelt sich darum zunächst zu zeigen, dass $a_0 b_0 a_1 b_1$ sich als ganze Zahlen ausdrücken lassen.

Zu verfügen haben wir innerhalb gewisser Grenzen über $u \delta \xi_1 \xi_2$. Wir weisen nach, dass dieselben so gewählt werden können, dass $a_0 a_1 b_0 b_1$ zu ganzen Zahlen werden. In bestimmter, später ersichtlicher Weise geordnet sei:

$$n = a_1 \cdots a_f a_{f+1} \cdots a_g a_{g+1} \cdots a_h a_{h+1} \cdots a_k ,$$

ferner:

$$P = a_1 \cdots a_f a_{f+1} \cdots a_g a_{g+1}^{\nu_{g+1}} \cdots a_h^{\nu_h} P' ,$$

wobei P' relativ prim zu n ist und

$$\nu_s \geq 2 , \quad {\scriptstyle s = g+1, \ldots h.}$$

Nun ist:

$$\Delta = Q^2 - PR = a^2 - n^2 ,$$

mithin:

$$(Q + a)(Q - a) = RP - n^2 .$$

Hieraus folgt, dass sämmtliche gemeinsamen Theiler von P und n in

$$(Q + a)(Q - a)$$

enthalten sind. Schliessen wir daher den Fall aus, dass P, Q, R einen gemeinsamen Theiler haben, der zugleich Theiler von n ist, so können wir setzen:

$$Q + a = a_1^{\lambda_1} \cdots a_f^{\lambda_f} a_{g+1}^{\lambda_{g+1}} \cdots a_h^{\lambda_h} Q' ,$$

$$Q - a = a_{f+1}^{\lambda_{f+1}} \cdots a_g^{\lambda_g} a_{g+1}^{\lambda'_{g+1}} \cdots a_h^{\lambda'_h} Q'' ,$$

wobei Q' und Q'' relativ prim zu P sind und überdies:

$$\lambda_s \geq 1 ; \quad {\scriptstyle s=1 \ldots g} \qquad \lambda_s + \lambda'_s \geq 2 . \quad {\scriptstyle s=g+1 \ldots h}$$

Alsdann setzen wir:

$$u = a_1 \cdots \cdots a_f a_{g+1}^{\mu_{g+1}} \cdots a_h^{\mu_h} ,$$

$$\delta = a_{f+1} \cdots a_g a_{g+1}^{\mu'_{g+1}} \cdots a_h^{\mu'_h} .$$

wenn $\mu_{g+1} \cdots \mu_h$, respective $\mu'_{g+1} \cdots \mu'_h$ die Werthe Eins oder Null haben, je nachdem das zugehörige λ respective λ' in $Q + a$ respective $Q - a$ von Null verschieden ist oder nicht.

Offenbar erfüllen dann u und δ die Bedingung, dass sie Theiler von n sind.

Wir zeigen, dass unter dieser Festsetzung aus:

$$n\delta b_1 = -(Qu + 16\xi_2 P) \pm au,$$
$$nua_0 = (Q\delta + 16\xi_1 P) \pm a\delta$$

a_0 und b_1 sich als ganze Zahlen bestimmen lassen. Es wird dieses möglich sein, wenn zwei ganze Zahlen $\xi_1 \xi_2$ so gewählt werden können, dass sie kleiner als δ_1 resp. u_1 sind und den Congruenzen genügen:

$$16\xi_2 P_1 \delta + Q \mp a \equiv 0 \bmod \delta u_1,$$
$$16\xi_1 P_1 u + Q \pm a \equiv 0 \bmod \delta_1 u,$$

wenn

$$P = P_1 u\delta.$$

Es ist zunächst klar, dass nur die oberen Zeichen gewählt werden können, da u. A. $Q - a$ durch δ und $Q + a$ durch u theilbar ist. Es bleibt dieses auch dann richtig, wenn sowohl Q wie a durch $u\delta$ theilbar sind.

Also lauten die Congruenzen:

$$16\xi_2 P_1 \equiv \frac{-Q+a}{\delta} \bmod u_1,$$

$$16\xi_1 P_1 \equiv \frac{-Q-a}{u} \bmod \delta_1,$$

wobei

$$\frac{Q-a}{\delta} = a_{f+1}^{\lambda_{f+1}-1} \cdots a_g^{\lambda_g - 1} a_{g+1}^{\lambda'_{g+1} - \mu'_{g+1}} \cdots a_h^{\lambda'_h - \mu'_h} Q',$$

$$\frac{Q+a}{u} = a_1^{\lambda_1 - 1} \cdots a_f^{\lambda_f - 1} a_{g+1}^{\lambda_{g+1} - \mu_{g+1}} \cdots a_h^{\lambda_h - \mu_h} Q'.$$

Die Congruenz

$$16\xi_2 P_1 \equiv \frac{-Q+a}{\delta} \bmod u_1$$

wird lösbar sein, wenn alle Theiler von P_1 und u_1 zu gleicher Zeit Theiler von $\frac{-Q+a}{\delta}$ sind. Nun sind diese sämmtlich enthalten unter den Grössen

$$a_{g+1}, \cdots a_h$$

und deren Combinationen.

Eine beliebige dieser Grössen wird Theiler von u_1 sein, falls das zugehörige λ in $Q + a$ gleich Null ist. Dann ist aber das entsprechende λ' in $Q - a$ grösser oder gleich 2, d. h. $\frac{Q-a}{\delta}$ ist auch durch dieselbe Grösse theilbar. Damit ist das Verlangte bewiesen.

Was von der Congruenz:

$$16\,\xi_2 P_1 \equiv \frac{-Q+a}{\delta} \bmod u_1$$

gilt, gilt auch von

$$16\,\xi_1 P_1 \equiv \frac{-Q-a}{u} \bmod \delta_1 .$$

Sei nun der grösste gemeinsame Theiler von P_1 und u_1: q, von P_1 und δ_1: p, so werden wir q Lösungen ξ_2 resp. p Lösungen ξ_1 erhalten, welche nach dem Modul u_1 respective δ_1 incongruent sind. Einer jeden derselben werden ganzzahlige a_0, b_1 entsprechen. Es fragt sich, ob alle oder, wenn nicht alle, welche von den Lösungen $\xi_1 \xi_2$ zu gebrauchen sind.

Untersuchen wir dazu, welches die Bedingungen sind, unter denen sich b_0 als ganze Zahl bestimmen lässt. Wir fanden für b_0 die Gleichungen:

$$b_0 = -\frac{R - 16\,[b_1 \xi_1 u_1 - a_0 \xi_2 \delta_1] - 16^2 \xi_1 \xi_2 P_1}{\delta_1 u_1}$$

und

$$b_0 = -\left(\frac{1 - a_0 b_1}{P_1}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dass b_0, falls es keine ganze Zahl ist, als Nenner höchstens die Grösse pq haben kann. Es fragt sich, ob nicht in jedem Falle $\xi_1 \xi_2$ so gewählt werden können, dass der Nenner fortfällt, d. h. dass:

$$R - 16\,[b_1 \xi_1 u_1 - a_0 \xi_2 \delta_1] - 16^2 \xi_1 \xi_2 P_1 \equiv 0 \bmod pq \tag{12}$$

wird.

Wir schicken die Bemerkung voraus, dass P_1, u_1, δ_1 keinen gemeinsamen Theiler haben können.

In der That, wir haben gesetzt:

$$P = u\,\delta\,P_1 ,$$

wo P_1, wenn anders es überhaupt Factoren von n enthält, nur solche enthält, die schon in u und δ enthalten sind.

Nun sei:

$$\delta = b_0 \cdots b_p c_0 \cdots c_r ,$$
$$u = b_0 \cdots b_p d_0 \cdots d_s ,$$

dann ist

$$\delta_1 = d_0 \cdots d_s \delta_1' ,$$

wo δ_1' relativ prim zu P_1 ist, ferner

$$u_1 = c_0 \cdots c_r u_1' ,$$

wo u_1' wiederum relativ prim zu P_1 ist. Hieraus folgt die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar, da $c_0 \cdots c_r$ verschieden sind von $d_0 \cdots d_s$.

Vermöge dieses Satzes können wir die Congruenz schreiben:

$$R - 16\,[b_1\xi_1 u_1 - a_0\xi_2\delta_1] \equiv 0 \bmod pq\,,$$

oder, indem wir die Werthe von a_0 und b_1 einsetzen:

$$R - 16\left[\left(\frac{-Q+a}{\delta} - 16\,\xi_2 P_1\right)\xi_1 - \left(\frac{Q+a}{u} + 16\,\xi_1 P_1\right)\xi_2\right] \equiv 0 \bmod pq,$$

oder

$$16\,\frac{-Q+a}{\delta}\,\xi_1 \equiv R - 16\,\frac{Q+a}{u}\,\xi_2 \bmod pq\,,$$

Nun hat, wie bewiesen, $\frac{-Q+a}{\delta}$ den Theiler q, damit diese Congruenz möglich sei, muss also sein:

$$R - 16\,\frac{Q+a}{u}\,\xi_2 \equiv 0 \bmod q\,.$$

Für ξ_2 haben sich q Lösungen der Form ergeben:

$$\xi_2' + \frac{ku_1}{q} \qquad k = 0 \ldots q-1\,,$$

wobei

$$\xi_2' < \frac{u_1}{q}$$

ist, mithin erhalten wir für k die Congruenz:

$$16\,\frac{Q+a}{u}\,\frac{ku_1}{q} \equiv R - 16\,\frac{Q+a}{u}\,\xi_2' \bmod q\,. \tag{13}$$

Diese Congruenz hat aber stets eine und nur eine Lösung, die kleiner als q ist, da, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar folgt, $\frac{Q+a}{u}$ sowohl wie $\frac{u_1}{q}$ keinen gemeinsamen Theiler mit q hat.

Also giebt es nur einen Werth von ξ_2, der kleiner als u_1 ist und der Congruenz genügt:

$$R - 16\,\frac{Q+a}{u}\,\xi_2 \equiv 16\,\frac{-Q+a}{\delta}\,\xi_1 \bmod pq\,,$$

und ebenso wird es nur einen hierzu gehörigen Werth ξ_1 geben, der kleiner als δ_1 ist.

Wählt man diese Werthe für ξ_1 und ξ_2, so ergiebt sich b_0 als ganze Zahl und zwar nur dann.

Da nun vermöge der Wahl von u und δ a_1 auch eine ganze Zahl wird, so ergiebt sich zunächst, dass, falls die Coefficienten P, Q, R in

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

der ersten der aufgestellten Bedingungen genügen — denn nur diese haben wir bisher benutzt — stets u, δ, ξ_1, ξ_2 so gewählt werden können, dass $a_0 b_0 a_1 b_1$ sich als ganze Zahlen ergeben.

Die Wahl von u und δ ist keine willkührliche. Eine Untersuchung ähnlicher Art, wie die vorhin angestellte, zeigt, dass sie eine eindeutig bestimmte ist.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass vermöge der zweiten Bedingung, denen die P, Q, R genügen, auch die Form von $a_0 b_0 a_1 b_1$ die ver-

langte ist. Eine näher eingehende Betrachtung zeigt die Richtigkeit dieser Behauptung. Wir wollen sie nur für einen Fall wirklich durchführen, da sie für alle übrigen Fälle ganz ähnlich ist.

Sei

$$\Delta = 16\,(3n-8\delta)\,(n-2\delta) = a^2 - n^2,$$

ferner

$$a \equiv -9n \bmod 16,$$

mithin

$$P \equiv 0 \bmod 4\,; \quad Q \equiv 4 \bmod 8\,; \quad R \equiv 8 \bmod 16\,.$$

Wir fanden:

$$u_1\delta b_1 = -(Q+16\xi_2\delta P_1) + a\,,$$
$$\delta_1 u a_0 = \quad (Q+16\xi_1 u P_1) + a\,,$$

also in unserem Falle:

$$u_1\delta b_1 \equiv 7n - Q \bmod 16\,,$$
$$\delta_1 u a_0 \equiv 7n + Q \bmod 16\,.$$

Sei nun:

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1\,,$$

ferner:

$$u = 8p_0 + k\,; \quad u_1 = 8p_1 + k_1\,; \quad \delta = 8p_2 + k\,; \quad \delta_1 = 8p_3 + k_1\,,$$

so folgt, wenn wir

$$b_1 = 8B + l$$

setzen:

$$8\,[p_1 kl + kp_2 l + k_1 kB] + lkk_1 \equiv 56\,[p_0 k_1 + p_1 k] + 7kk_1 - Q \bmod 16.$$

Vermöge der Bedingung, welcher Q unterworfen ist, ist diese Congruenz nur möglich, wenn:

$$l - 7 \equiv 4 \bmod 8, \text{ d. h. } l = 3$$

oder

$$b_1 = 8B + 3\,.$$

Ebenso würde sich ergeben:

$$a_0 = 8A + 3\,.$$

Addiren wir ferner die oberen Gleichungen, so wird:

$$u_1\delta b_1 + u\delta_1 a_0 \equiv 2a \bmod 32 \equiv 14n \bmod 32$$

oder

$$\delta^2 b_1 + a_0 u^2 \equiv 14\,u\delta \bmod 32\,.$$

Setzen wir hierin:

$$b_1 = 8B + 3\,; \quad a_0 = 8A + 3\,; \quad \delta = 8p_2 + k\,; \quad u = 8p_0 + k\,,$$

so ist diese Congruenz in die Form zu bringen:

$$4g - k(A+B-1) \equiv 0 \bmod 4, \text{ d. h. } A + B \equiv 1 \bmod 4.$$

Ferner folgt aus:

$$P = a_1\delta u$$
$$a_1 \equiv 0 \bmod 4\,,$$

aus:

$$b_0 = -\frac{R - 16[b_1\xi_1 u_1 - a_0\xi_2\delta_1] - 16\xi_1\xi_2 P_1}{\delta_1 u_1}$$

$$b_0 \equiv 8 \bmod 16 .$$

Vergleichen wir diese Resultate mit den in Formel (6) aufgestellten Bedingungen, so sehen wir, dass $a_0 b_0 a_1 b_1$ gerade diejenigen Formen haben, die sie nach jenen Formeln für

$$a \equiv -9n \bmod 16; \quad \left(\frac{2}{\delta}\right)\left(\frac{2}{u}\right) = +1; \quad k + k_1 \equiv 2 \bmod 4$$

haben müssen.

Also finden wir den *Lehrsatz:*

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit zu einer Wurzel von:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

eine Function $\varphi(\tau)$ gehöre, die Lösung der Discriminante

$$D = 0$$

ist, sind

1) Die Determinante der Gleichung muss sich in eine der beiden Formen:

$$\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta)$$

oder

$$\Delta' = -32\delta(n - 8\delta)$$

bringen lassen und negativ sein.

2) Falls $\Delta = 16(3n - 8\delta)(n - 2\delta)$ ist, muss sein:

$$P \equiv 0 \bmod 4; \quad Q \equiv 4 \bmod 8; \quad R \equiv 8 \bmod 16.$$

Falls $\Delta' = -32\delta(n - 8\delta)$ ist, muss sein:

$$P \equiv 2 \bmod 4; \quad Q \equiv 4 \bmod 8; \quad R \equiv 8 \bmod 16$$

oder

$$P \equiv 0 \bmod 2; \quad Q \equiv 0 \bmod 8; \quad R \equiv 0 \bmod 16 .$$

Zu gleicher Zeit sahen wir, dass stets zwei und nur zwei Wurzeln der zu dem Transformationsgrad n gehörigen Modulargleichung einander gleich werden, und fanden die Methode, dieselben zu bestimmen. Wir wollen letztere der Wichtigkeit der Sache wegen noch einmal angeben und zwar mit etwas veränderten Bezeichnungen.

Sei

$$Q^2 - RP = \Delta = a^2 - n^2 ,$$

$$n = a_0 \cdots a_m ,$$

$$P = b_0^{\beta_0} \cdots b_e^{\beta_e} P' ,$$

wo die $b_0 \cdots b_e$ sämmtlich Theiler von n sind und P' relativ prim zu n ist, ferner

$$Q + a = c_0^{\zeta_0} \cdots c_k^{\zeta_k} Q' ,$$

$$Q - a = d_0^{\delta_0} \cdots d_i^{\delta_i} Q'' ,$$

wo die $c_0 \cdots c_k\ d_0 \cdots d_i$ zu den $b_0 \cdots b_e$ gehören und Q' und Q'' relativ prim zu P sind.

Dann setzen wir:

$$u = c_0 \cdots c_k\,,$$
$$\delta = d_0 \cdots d_i\,,$$
$$u_1 = \frac{n}{u}\,; \quad \delta_1 = \frac{n}{\delta}$$

und bestimmen die Lösungen ξ_1 und ξ_2 der Congruenzen

$$\begin{cases} 16\,\xi_1 P_1 \equiv -\frac{Q-a}{u} \bmod \delta_1\,, \\ 16\,\xi_2 P_1 \equiv -\frac{Q+a}{\delta} \bmod u_1\,, \end{cases}$$

wobei $P_1 u \delta = P$.

Es ergeben sich q Lösungen ξ_2 und p Lösungen ξ_1, die nach dem Modul u_1 respective δ_1 incongruent sind, wenn q den grössten gemeinsamen Theiler von P_1 und u_1, p den grössten gemeinsamen Theiler von P_1 und δ_1 bedeutet. Die Lösungen haben die Form:

$$\xi_2' + \frac{k u_1}{q}\,; \quad \xi_1' + \frac{k_1 \delta_1}{p}\,; \quad \xi_2' < \frac{u_1}{q}\,; \quad \xi_1' < \frac{\delta_1}{p}\,,$$
$$k = 0 \cdots q-1\,, \qquad k_1 = 0 \cdots p-1\,.$$

Die Grössen k und k_1 ferner sind eindeutig bestimmt aus:

$$R - 16\,\frac{Q+a}{u}\,\xi_2' - 16\,\frac{Q+a}{u}\,\frac{k u_1}{q} \equiv 0 \bmod q\,,$$
$$R - 16\,\frac{Q+a}{\delta}\,\xi_1' - 16\,\frac{Q+a}{\delta}\,\frac{k \delta_1}{p} \equiv 0 \bmod p\,.$$

Sind auf diese Weise u, u_1, δ, δ_1, ξ_1, ξ_2 gefunden, so werden die beiden Wurzeln der Modulargleichung

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\varphi\left(\frac{\delta\tau - 16\xi_1}{\delta_1}\right) \text{ und } \left(\frac{2}{u}\right)\varphi\left(\frac{u\tau - 16\xi_2}{u_1}\right)$$

für diejenige Function $\varphi(\tau)$ einander gleich, deren zugehöriges τ eine Lösung der Gleichung:

$$P\tau^2 + 2Q\tau + R = 0$$

ist.

Aus diesen Resultaten folgen mit Leichtigkeit eine Menge von Sätzen, die eine Verallgemeinerung derjenigen Sätze sind, die Hermite in seinem schon citirten Werke p. 35 sq. für eine Primzahltransformation ohne Beweis aufgestellt hat, doch unterlassen wir die Ableitung derselben.

Heidelberg, den 21. März 1875.

Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Nach diesem Gesetz üben zwei elektrische Massen e und η in der Entfernung r eine repulsive Kraft R auf einander aus, welche den Werth hat:

$$(1^a) \qquad R = \frac{e\eta}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

wo c eine gewisse Constante und t die Zeit bezeichnet. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{2}{c^2} = A^2,$$

so lässst sich diese Kraft auch so darstellen:

$$R = \frac{e\eta}{r^2}\left[1 - \frac{A^2}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A^2 r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

oder auch so:

$$(1^b) \qquad R = e\eta\left[\frac{1}{r^2} + 4A^2\frac{d\sqrt{r}}{dr}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right],$$

oder endlich auch so:

$$(1^c) \qquad R = e\eta\left(-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right),$$

wo $\varphi = \frac{1}{r}$ und $\psi = \sqrt{r}$.

§ 1.

Transformation des Weber'schen Gesetzes.

Ebenso wie das Newton'sche Gesetz für *sehr kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedarf, ebenso erscheint es sehr möglich, dass einer analogen Modification vielleicht auch das Weber'sche Gesetz bedürftig ist. Der grösseren Allgemeinheit willen mögen daher im Folgenden unter φ und ψ Functionen verstanden sein, welche für *beträchtliche* Entfernungen mit $\frac{1}{r}$ und $\sqrt{r}$ identisch, für *sehr kleine* Entfernungen hingegen von noch unbekannter Beschaffenheit sind.

Sind x, y, z und ξ, v, ζ die Coordinaten von e und η, so haben die Componenten X, Y, Z der von η auf e ausgeübten Kraft R (1) die Werthe:

$$(2)\qquad \begin{cases} X = R\frac{\partial r}{\partial x} = e\eta\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 4A^2\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right), \\ Y = R\frac{\partial r}{\partial y} = e\eta\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + 4A^2\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right), \\ Z = R\frac{\partial r}{\partial z} = e\eta\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} + 4A^2\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right). \end{cases}$$

Um diese Ausdrücke in eine etwas andere und für viele Zwecke bequemere Form zu versetzen, bemerken wir zunächst, dass

$$(\alpha)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x}(x' - \xi') + \frac{\partial \psi}{\partial y}(y' - v') + \frac{\partial \psi}{\partial z}(z' - \zeta')$$

und ebenso

$$(\beta)\qquad \frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x}}{dt} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x' - \xi') + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(y' - v') + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}(z' - \zeta')$$

ist, wo die Accente Differentiationen nach t andeuten.

Aus (α) folgt durch partielle Differentiation nach x:

$$(\gamma)\qquad \frac{\partial \frac{d\psi}{dt}}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x' - \xi') + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(y' - v') + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}(z' - \zeta'),$$

und hieraus durch Vergleichung mit (β):

$$(\delta)\qquad \frac{\partial \frac{d\psi}{dt}}{\partial x} = \frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x}}{dt},\ \text{mithin*) auch:}\ \frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x} = 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x}}{dt}.$$

Andererseits folgt aus (α) durch partielle Differentiation nach x':

$$(\varepsilon)\qquad \frac{\partial \frac{d\psi}{dt}}{\partial x'} = \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \text{mithin auch:}\ \frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x'} = 2\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Nun ist offenbar:

$$\frac{d\left(2\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{dt} = 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x}}{dt} + 2\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen, welche in (δ), (ε) rechter Hand notirt sind:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x'} = \frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x} + 2\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

*) In (δ) und (ε) ergeben sich die Formeln rechter Hand aus denen linker Hand durch Multiplikation mit $2\frac{d\psi}{dt}$.

oder anders geordnet:

$$2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x'}; \tag{3}$$

hieraus folgt durch Multiplication mit $2A^2$:

$$4A^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x'}, \tag{4}$$

falls man nämlich die Bezeichnung einführt:

$$\varpi = 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \tag{5}$$

Substituirt man nun den Werth (4) in die erste der Formeln (2), so folgt sofort:

$$\begin{cases} X = e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x'}\right); \text{ und ebenso wird:} \\ Y = e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial y'}\right), \\ Z = e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial z'}\right). \end{cases} \tag{6}$$

Es mag im Folgenden $e\eta\varphi$ das *elektrostatische*, und $e\eta\varpi$ das *elektrodynamische Potential* der beiden Theilchen e, η genannt werden.

§ 2.

Das Princip der Energie.

Durch Multiplication der Formeln (6) mit x', y', z' und Addition folgt:

$$(Xx' + \cdot\cdot) = e\eta\left[\Pi - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}x' + \cdot\cdot\right)\right].$$

Hier hat Π die Bedeutung:

$$\Pi = \left(x'\frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x'} + \cdots\right) - \left(x'\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \cdots\right),$$

und kann daher auch so geschrieben werden:

$$\Pi = \frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial\varpi}{\partial x'} + \cdots\right) - \left(x''\frac{\partial\varpi}{\partial x'} + \cdots\right) - \left(x'\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \cdots\right).$$

Bezeichnen wir nun die Zeit t je nach ihrem Vorkommen mit verschiedenen Buchstaben, nämlich mit a insofern sie Argument der x, y, z, hingegen mit α insofern sie Argument der ξ, v, ζ ist, und beachten wir, dass φ nur von den Coordinaten, hingegen ϖ (5) von den Coordinaten und Geschwindigkeiten abhängt, so gewinnen die vorstehenden Formeln die einfachere Gestalt:

$$(Xx' + \cdot\cdot) = e\eta\left[\Pi - \frac{\partial\varphi}{\partial a}\right],$$

$$\Pi = \frac{d}{dt}\left(x'\frac{\partial\varpi}{\partial x'} + \cdot\cdot\right) - \frac{\partial\varpi}{\partial a}.$$

Hieraus folgt durch Elimination von Π sofort:

$$(7) \qquad (Xdx + \cdots) = e\eta \left[\frac{d}{dt} \left(x' \frac{\partial \varpi}{\partial x'} + \cdots \right) - \frac{\partial (\varpi + \varphi)}{\partial a} \right] dt.$$

Und in ähnlicher Weise ergiebt sich die analoge Formel:

$$(8) \qquad (\Xi d\xi + \cdots) = e\eta \left[\frac{d}{dt} \left(\xi' \frac{\partial \varpi}{\partial \xi'} + \cdots \right) - \frac{\partial (\varpi + \varphi)}{\partial \alpha} \right] dt.$$

Von diesen beiden Ausdrücken (7), (8) repräsentirt der eine die von η auf e, der andere die von e auf η ausgeübte Arbeit. Bezeichnet man die Summe beider Arbeiten mit dL:

$$(9) \qquad dL = (Xdx + \cdots) + (\Xi d\xi + \cdots),$$

und beachtet man, dass der Ausdruck ϖ (5) eine homogene Function zweiter Ordnung von x', y', z', ξ', v', ζ' ist, so erhält man durch Substitution der Werthe (7), (8) sofort*):

$$dL = e\eta \left[\frac{d(2\varpi)}{dt} - \frac{d(\varpi + \varphi)}{dt} \right] dt,$$

oder was dasselbe ist:

$$(10) \qquad dL = e\eta\, d(\varpi - \varphi).$$

Die von zwei elektrischen Massenpunkten während der Zeit dt auf einander ausgeübte Arbeit ist also ein vollständiges Differential. — Hieraus folgt, dass das unseren Betrachtungen zu Grunde gelegte Weber'sche Gesetz in vollem Einklange steht mit dem allgemeinen Princip oder Axiom der Energie.

§ 3.

Reduction des Weber'schen Gesetzes auf ein gewisses Potential, durch Anwendung des Hamilton'schen Princips.

Das Hamilton'sche Princip findet bekanntlich seinen Ausdruck in der Formel:

$$(1) \qquad \delta \int [(\text{Leb. Kraft}) - (\text{Potential})]\, dt = 0,$$

wo die Integration sich erstreckt über einen beliebig zu wählenden Zeitraum, und wo δ die *innere Variation*, nämlich eine Variation bezeichnet, welche nicht die Grenzen, sondern nur das Innere jenes Zeitraumes betrifft.

Es fragt sich, ob das Weber'sche Gesetz diesem Hamilton'schen Princip subordinirt werden kann. Mit andern Worten: Es fragt sich ob das Potential in der Formel (1) so *definirt* werden kann, dass

*) Denn zufolge der von uns eingeführten Bezeichnung ist offenbar:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \alpha}.$$

die aus dieser Formel resultirenden Differentialgleichungen identisch sind mit denen, die aus dem Weber'schen Gesetz sich ergeben.

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den Fall von nur zwei elektrischen Massenpunkten e und η. Bezeichnen wir die Trägheitszahlen dieser Punkte mit m und μ, ferner ihre Coordinaten mit x, y, z und ξ, v, ζ, und endlich das noch zu ermittelnde Potential mit w, so nimmt die Formel (1) folgende Gestalt an:

$$(2) \qquad \delta \int \left(\frac{m(x'^2+y'^2+z'^2)}{2} + \frac{\mu(\xi'^2+v'^2+\zeta'^2)}{2} - w \right) dt = 0.$$

Denken wir uns nun das Potential w als eine noch unbekannte Function von x, y, z, x', y', z', und $\xi, v, \zeta, \xi', v', \zeta'$, so ergeben sich aus (2), durch Ausführung der Variation δ im Ganzen 6 Differentialgleichungen, von denen die 3 ersten so lauten:

$$(3) \qquad \begin{cases} mx'' = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'}, \\ my'' = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial y'}, \\ mz'' = -\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial z'}, \end{cases}$$

während die 3 andern von analoger Gestalt sind.

Andererseits sind die bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes sich ergebenden Differentialgleichungen zufolge unserer früheren Untersuchungen [vergl. (6), S. 557] folgende:

$$(4) \qquad \begin{cases} mx'' = e\eta \left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial x'} \right), \\ my'' = e\eta \left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial y'} \right), \\ mz'' = e\eta \left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial z'} \right); \end{cases}$$

wo in der letzten Colonne statt ϖ auch $(\varphi + \varpi)$ gesetzt werden darf, weil φ von x', y', z' unabhängig ist.

Die aus dem Hamilton'schen Princip entspringenden Differentialgleichungen (3) werden also mit dem aus den Weber'schen Gesetz sich ergebenden Differentialgleichungen (4) identisch sein, sobald man für w den Werth nimmt:

$$(5^a) \qquad w = e\eta(\varphi + \varpi),$$

d. i.

$$(5^b) \qquad w = e\eta\left[\varphi + 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = e\eta\left[\varphi + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],$$

einen Werth, welcher für den Fall *beträchtlicher* Entfernungen übergeht in:

$$(5^c) \qquad w = e\eta\left[\frac{1}{r} + \frac{A^2}{2r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] = e\eta\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{c^2 r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

Wir können also sagen:

Bei Zugrundelegung des Hamilton'schen Princips ist die Annahme des Weber'schen Gesetzes äquivalent mit der Annahme eines gewissen Potentials. Dabei ist es einerlei ob man diesem Potential den Werth:

$$(6^a) \qquad w = e\eta\left[\varphi + \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],$$

oder den allgemeineren Werth:

$$(6^b) \qquad w = e\eta\left[\varphi + \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + e\eta\frac{d\lambda}{dt}$$

zuertheilt, wo λ eine willkührliche Function von r, r', r'', $\cdots$ sein kann.

Die Zufügung des Gliedes $e\eta\frac{d\lambda}{dt}$ bringt nämlich in der Formel (2) des Hamilton'schen Princips nicht die mindeste Aenderung hervor. Denn setzt man in dem Integral $\int[(\text{Leb. Kraft}) - w]\,dt$ für w successive zwei Werthe von der Form:

$$w = e\eta f,$$
$$w = e\eta f + e\eta\frac{d\lambda}{dt},$$

so werden die correspondirenden Werthe des Integrals durch $e\eta\int\frac{d\lambda}{dt}\,dt$, d. i. durch $e\eta\,(\lambda_2 - \lambda_1)$ von einander abweichen, wo λ_1 und λ_2 die Werthe von λ an den beiden *Grenzen* des Integrals vorstellen. Unterwirft man also das Integral der durch δ angedeuteten *inneren* Variation, so wird man in beiden Fällen zu demselben Resultat gelangen.

Die hier angegebene Reduction des Weber'schen Gesetzes auf ein gewisses Potential ist von mir im Jahre 1865 ausgeführt, und 1868 publicirt worden (Programm der Tübinger Universität vom Jahre 1868, p. 2 und p. 24—28).

§ 4.

Fortsetzung. Reduction des erhaltenen Potentials auf ein einfacheres, durch Annahme einer zeitlichen Transmission.

Bei Annahme gewisser Vorstellungen können wir das eben erhaltene Potential w durch ein einfacheres ersetzen. Diese Vorstellungen sind folgende:

Wir nehmen an, das Potential zweier elektrischer Massenpunkte e und η sei in Wirklichkeit:

$$(7) \qquad e\eta\varphi \quad \text{oder} \quad e\eta\varphi(r),$$

dieses Potential bedürfe aber einer gewissen Zeit, um vom einen Punkt zum andern überzugehen. Wir betrachten also dieses Potential als einen *Bewegungsantrieb* oder (besser ausgedrückt) als einen *Befehl*, der von dem einen Punkt gegeben und emittirt, von dem andern recipirt und befolgt wird, und nehmen an, dass dieser Befehl einer gewissen Zeit bedürfe, um vom Orte der Emission hinzugelangen zum Orte der Reception.

Die Entfernung der beiden Punkte mag zur Zeit t_0 bezeichnet werden mit r_0. Im Augenblicke t_0 wird von dem einen Punkt ein gewisser Befehl gegeben, und zwar gegeben mit Rücksicht auf die *augenblicklichen* Verhältnisse, d. i. mit Rücksicht auf die *augenblickliche* Entfernung r_0; demgemäss lautet der Befehl:

$$e\eta\varphi(r_0). \tag{8}$$

Gegeben und emittirt zur Zeit t_0, durchläuft dieser Befehl den Raum zwischen beiden Punkten, ohne unterwegs irgend welche Aenderung zu erleiden; er wird daher, weil zur Durchlaufung jenes Zwischenraumes eine gewisse Zeit erforderlich ist, von dem gehorchenden Punkte recipirt und befolgt werden nicht zur Zeit t_0, sondern zu einer etwas *spätern* Zeit t, also zu einer Zeit, wo die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte nicht mehr den Werth r_0, sondern bereits einen etwas *andern* Werth r besitzt.

Der Befehl oder Potentialwerth (8) kann demgemäss einerseits bezeichnet werden als das der Zeit t_0 entsprechende *emissive* Potential, und andererseits auch bezeichnet werden als das der Zeit t entsprechende *receptive* Potential. Zur Zeit t_0 wird der Befehl gegeben, zur Zeit t tritt er in Kraft.

Die Zwischenzeit $t - t_0$ ist diejenige, deren der Befehl bedarf, um den Raum zwischen beiden Punkten zu durchlaufen. In Betreff dieser Durchlaufung wollen wir diejenige Vorstellung zu Grunde legen, welche sich als die *einfachste* darbietet, nämlich annehmen, dass der Befehl mit der constanten Geschwindigkeit c vorwärts schreitet auf demjenigen Radiusvector, dessen Anfangspunkt der befehlende, und dessen Endpunkt der gehorchende Punkt ist. Die mit c benannte Geschwindigkeit bezieht sich also auf eine *relative* Bewegung; denn der Radiusvector, auf welchem der Befehl entlang geht, befindet sich *selber* in Bewegung, fortgetragen durch die auf irgend welchen Bahnen dahinlaufenden Punkte.

Der zur Zeit t vom gehorchenden Punkt recipirte Befehl (8) hat nun offenbar diejenige Radiusvector-Länge zu durchlaufen gehabt, welche vorhanden ist im Augenblick seiner *Reception*, also zu durchlaufen gehabt die zur Zeit t vorhandene Radiusvector-Länge r. Die hiezu erforderliche Zeit ist aber $\frac{r}{c}$; folglich:

(9) $$t - t_0 = \frac{r}{c}.$$

Bezeichnen wir also diesen *zur Zeit t recipirten und zur selben Zeit in Kraft tretenden Potentialwerth* (8) kurzweg mit w, so haben wir folgende Formeln:

(10) $$w = e\eta\varphi(r_0), \qquad t - t_0 = \frac{r}{c};$$

Diese Formeln aber nehmen, falls wir $t_0 = t - \Delta t$ und $r_0 = r - \Delta r$ setzen, folgende Gestalt an:

(11) $$w = e\eta\varphi(r - \Delta r), \qquad \Delta t = \frac{r}{c}.$$

Es handelt sich nun um eine nähere Bestimmung des Werthes w.

Setzt man

$$r = f(t),$$

so repräsentirt f eine Function, die ebenso unbekannt ist, wie überhaupt die Bewegung der beiden Punkte. Jedenfalls wird dann aber auch zu setzen sein:

$$r - \Delta r = f(t - \Delta t),$$

oder was dasselbe ist:

$$r - \Delta r = f(t) - \frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{1 \cdot 2} f''(t) - + \cdots$$

Diese letzte Formel nimmt mit Hülfe der aus $r = f(t)$ entspringenden Relationen

$$r' = f'(t), \qquad r'' = f''(t), \qquad r''' = f'''(t), \ldots$$

folgende Gestalt an:

$$r - \Delta r = r - \frac{\Delta t \cdot r'}{1} + \frac{(\Delta t)^2 \cdot r''}{1 \cdot 2} - + \cdots,$$

oder mit Rücksicht auf (11) folgende:

(12) $$r - \Delta r = r - \frac{rr'}{c} + \frac{r^2 r''}{2c^2} - + \cdots.$$

Dieser Werth von $r - \Delta r$ ist in dem Ausdruck w (11) zu substituiren. Vorher indessen sei bemerkt, dass jener Ausdruck so dargestellt werden kann:

(13) $$w = e\eta\left[\varphi - \frac{\Delta r}{1}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{(\Delta r)^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2\varphi}{dr^2} - + \cdots\right],$$

wo φ für $\varphi(r)$ steht. Substituirt man hier nun den aus (12) entspringenden Werth von Δr, und *vernachlässigt die dritte Potenz von* $\frac{r}{c}$, so folgt:

(14) $$w = e\eta\left[\varphi + \left(\frac{r^2 r''}{2c^2} - \frac{rr'}{c}\right)\frac{d\varphi}{dr} + \frac{r^2 r'^2}{2c^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right],$$

oder nach leichter Umgestaltung:

(15) $$w = e\eta\left[\varphi - \frac{rr'^2}{c^2}\frac{d\varphi}{dr}\right] + e\eta\frac{d}{dt}\left[\frac{(\int\varphi dr) - r\varphi}{c} + \frac{r^2 r'}{2c^2}\frac{d\varphi}{dr}\right];$$

wofür einfacher geschrieben werden mag:

$$w = e\eta\left[\varphi - \frac{rr'^2}{c^2}\frac{d\varphi}{dr}\right] + e\eta\frac{d\lambda}{dt}. \tag{16}$$

Soll nun dieser zur Zeit t in Kraft tretende Potentialwerth w die verlangte Form ($6^{a,b}$) besitzen, so muss zwischen φ und ψ die Relation stattfinden:

$$r\frac{d\varphi}{dr} + 4\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = 0. \tag{17}$$

Diese Relation wird aber wenigstens für *beträchtliche* Entfernungen in der That erfüllt; denn für solche ist $\varphi = \frac{1}{r}$ und $\psi = \sqrt{r}$. Mit andern Worten: Sie ist so weit erfüllt, als unsere Kenntniss über die Functionen φ, ψ überhaupt reicht. Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

Die complicirte Form des in ($6^{a,b}$) *gefundenen Potentials:*

$$w = e\eta\left[\varphi + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + e\eta\frac{d\lambda}{dt} \tag{18}$$

kann durch die Annahme erklärt werden, dass das Potential zu seiner Transmission vom einen Punkte zum andern einer gewissen Zeit bedürfe. Durch diese Annahme reducirt sich nämlich jenes Potential auf:

$$e\eta\varphi, \tag{19}$$

d. i. auf das gewöhnliche statische Potential.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Weber'sche Constante c (deren Werth über 59000 Meilen beträgt) *zugleich die Geschwindigkeit der genannten Transmission repräsentirt; ferner vorausgesetzt, dass* r *klein gegen* c *bleibt, und dass also die dritte Potenz von* $\frac{r}{c}$ *vernachlässigt werden dürfe; endlich vorausgesetzt, dass die zwischen den Functionen* φ *und* ψ *für beträchtliche Entfernungen stattfindende Relation*

$$r\frac{d\varphi}{dr} + 4\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = 0 \tag{20}$$

auch noch erfüllt sei für äusserst kleine Entfernungen.

Die hier über dies Potential gemachten Suppositionen zeigen den Gesetzen des Lichtes gegenüber eine überaus grosse Verschiedenheit. So fallen z. B., was die Emission, Transmission und Reception betrifft, unmittelbar folgende Differenzen ins Auge: Das von einem leuchtenden Körper emittirte Licht ist unabhängig von dem beleuchteten Körper; hingegen ist das in irgend einem Augenblick von einem anziehenden Punkt emittirte Potential *in strictester Weise abhängig von der augenblicklichen Lage des angezogenen Punktes;* es ist dasselbe nämlich

$= e\eta\varphi(r)$, respective $= \frac{e\eta}{r}$, wo r die augenblickliche Entfernung bedeutet. Ferner: Das von dem leuchtenden Körper in einem gegebenen Zeitaugenblick emittirte Licht verliert an Intensität, je weiter es sich vom Körper entfernt; das emittirte Potential hingegen läuft *ohne irgend welche Abänderung seines ursprünglichen Werthes* bis zum angezogenen Punkt. Endlich: Das von dem beleuchteten Körper recipirte (d. i. absorbirte) Licht ist im Allgemeinen ein Bruchtheil des auffallenden Lichtes; hingegen ist das von dem angezogenen Punkt recipirte Potential *identisch* (d. i. *gleichwerthig*) mit dem ankommenden Potential.

Die Gesetze, nach denen das Potential von einem Punkt zum andern transmittirt wird, sind also, zufolge der hier gemachten Suppositionen, von den entsprechenden Gesetzen des Lichtes so ausserordentlich verschieden, dass von einer Aehnlichkeit kaum die Rede sein kann. Wenigstens wäre nur *ein einziger* Umstand geltend zu machen, in Bezug auf welchen eine Art Aehnlichkeit stattfindet. Dieser besteht darin, dass Licht wie Potential mit einer *sehr grossen constanten Geschwindigkeit* sich fortpflanzen; und auch diese Aehnlichkeit ist keine vollkommene; denn jene constante Geschwindigkeit besitzt für Potential und Licht verschiedene Werthe, und bezieht sich beim Licht auf eine absolute, beim Potential aber auf eine relative Bewegung.

Ich habe mich im gegenwärtigen § bemüht, dasjenige einigermassen anschaulich zusammenzustellen, was früher schon bruchstückweise von mir veröffentlicht worden ist, theils in dem erwähnten Tübinger Programm von 1868, theils (als Erwiederung auf einen von Clausius erhobenen Einwand) in diesen Annalen Bd. I, p. 317.

§ 5.

Recapitulation. Bemerkung über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes.

Aus den angestellten Betrachtungen folgt, dass das Weber'sche Gesetz abgeleitet werden kann aus der Annahme eines gewöhnlichen *nur von der Entfernung* abhängenden Potentiales, unter Voraussetzung einer gewissen *nichtmomentanen Transmission* und unter Voraussetzung des *Hamilton'schen Princips*. In der That haben wir gezeigt, dass das Weber'sche Gesetz:

$$R = e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right] \tag{21}$$

reducirt werden kann auf das Potential

$$e\eta\varphi(r), \tag{22}$$

sobald man annimmt, dass die Functionen φ, ψ durch die Relation

$$r\frac{d\varphi}{dr} + 4\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = 0 \tag{23}$$

mit einander verbunden sind.

Wir können nun die Formel (21) auch so schreiben:

$$R = e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dr^2}r'^2 + \frac{8}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 r''\right],$$

wo r', r'' die Ableitungen von r nach der Zeit vorstellen. Substituiren wir hier für $\frac{d\psi}{dr}$ den aus (23) entspringenden Werth, so gelangen wir zu folgendem Endresultat:

Unter Annahme einer gewissen nichtmomentanen Transmission und unter Annahme des Hamilton'schen Princips kann das Weber'sche Gesetz abgeleitet werden aus einem gewöhnlichen, nur von der Entfernung abhängenden Potential:

$$e\eta\varphi(r); \tag{24}$$

und zwar ergiebt sich dabei jenes Gesetz in folgender Gestalt:

$$R = -e\eta\left[\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)r'^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d\varphi}{dr}r''\right], \tag{25}$$

wo c die Geschwindigkeit der Transmission bezeichnet. — Dabei ist vorausgesetzt, dass r klein gegen c sei.

Dieses Gesetz (25), welches für *beträchtliche* Entfernungen, d. i. für $\varphi = \frac{1}{r}$ in die bekannte von Weber selbst gegebene Formel:

$$R = e\eta\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r'^2}{c^2r^2} + \frac{2r''}{c^2r}\right]$$

übergeht (vgl. S. 555), stimmt merkwürdiger Weise vollkommen überein mit demjenigen Gesetz, welches ich schon viel früher im Jahre 1858, zur Erklärung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, für die Wirkung zwischen einem *elektrischen Theilchen* η und einem *Aethertheilchen* e supponirt habe. Denn schon damals sah ich mich aus bestimmten und naheliegenden Gründen zu der Annahme veranlasst, dass das Weber'sche Gesetz für *sehr kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedürfe. Demgemäss nahm ich jenes Gesetz in folgender Form an:

$$R = e\eta\left[F + \Psi r'^2 + \Phi r''\right], \tag{26a}$$

wo F, Ψ, Φ, Functionen von r sein sollen; alsdann aber ergab sich die Nothwendigkeit, zwischen den beiden Functionen Ψ und Φ die Relation zu supponiren:

$$\Psi = \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dr}. \tag{26b}$$

Vergleicht man nun diese Formeln (26a, b) *mit der Formel* (25), *so*

zeigt sich volle Uebereinstimmung; denn jene Relation zwischen Ψ *und* Φ *ist in* (25) *erfüllt.*

In Betreff der Gründe, welche damals zur Annahme einer Modification des Weber'schen Gesetzes, sowie zur Annahme der Relation (26^b) mich nöthigten, verweise ich auf meine betreffenden Publicationen, nämlich auf meine Habilitationsschrift: *Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur*, Halis Saxonum, 1858, und ferner auf meine ausführlichere Schrift: *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes*, Halle, Verlag des Waisenhauses, 1863. Dabei sei bemerkt, dass in letzter Schrift zwischen den Functionen F, Ψ, Φ noch eine zweite, mit (25) *nicht* übereinstimmende Relation: $F = -\frac{c^2}{2}\frac{d\Phi}{dr}$ supponirt wurde: zugleich aber sei betont, dass die Annahme dieser Relation dort (wie man sehr leicht erkennen wird) ganz *unnöthig* war, und nur durch den Wunsch, in der äussern Form eine grössere Einfachheit zu erzielen, herbeigeführt wurde.

Es sei noch bemerkt, dass jene schon im Jahre 1858 von mir für nothwendig befundene Modification des Weber'schen Gesetzes in gleicher Weise sich auch vorfindet in meinem Tübinger Programm von 1868.

Ueber Lissajous' Curven.

Von Wilhelm Braun in Passau.

In der folgenden Mittheilung sollen in Kürze die Resultate angegeben werden, die sich bei meiner Untersuchung über die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelcurven (Inauguraldissertation, Erlangen 1875) ergeben haben.

Die Coordinaten der behandelten Curven lassen sich, nachdem man die möglichste Vereinfachung in den Annahmen vorgenommen hat (vgl. S. 4 u. ff.), in folgender Form schreiben:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \sin nt, \\ y = \sin(mt + \delta), \end{cases}$$

wo δ proportional dem Phasenunterschied der beiden Schwingungen, und $n : m$ das Verhältniss der Schwingungszahlen ist (vorausgesetzt wird, dass $n > m$).

Die Constante δ, die als solche jeden beliebigen Werth haben kann, ist indessen (abgesehen von der Beschränkung zwischen 0 und 2π) in sehr begrenzter Weise beweglich, wenn sich die Curve nicht repetiren soll. Wir erhalten nämlich immer eine mit der ursprünglichen identische Curve, wenn sich δ in folgende Werthe ändert:

1) für m ungerade um die $2n - 1$ Werthe

$$\frac{n}{\pi}, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{2n-1}{n}\pi,$$

2) für m gerade um die $n - 1$ Werthe

$$\frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{2n-2}{n}\pi.$$

Die Ordnung unserer Curve ist $= 2n$, wie man sich nach Einführung des Parameters

$$\lambda : \mu = \cos t + i \sin t,$$

wodurch die Curvencoordinaten rational dargestellt werden, leicht überzeugen kann. Die Ausdrücke für die Coordinaten lauten dann mit Benutzung eines Proportionalitätsfactors ϱ also:

$$(2)\qquad \begin{cases} \varrho x = \lambda^{2n} - \mu^{2n}, \\ \varrho y = e^{\delta i}\lambda^{n+m}\mu^{n-m} - e^{-\delta i}\lambda^{n-m}\mu^{n+m}, \\ \varrho z = 2i\lambda^n\mu^n. \end{cases}$$

Für gewisse Werthe von δ artet die allgemeine Lissajouscurve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung aus in eine doppeltzählende Curve n^{ter} Ordnung (S. 9).

Diese Werthe von δ sind:

1) für den Fall, dass n und m ungerade,

$$0, \quad \frac{\pi}{n}, \quad \frac{2\pi}{n}, \cdots,$$

2) für den Fall, dass n oder m gerade,

$$\frac{\pi}{2n}, \quad \frac{3\pi}{2n}, \quad \frac{5\pi}{2n}, \cdots.$$

Das Polynom der in cartesischen Coordinaten hergestellten Curvengleichung (Entwickelung, vgl. S. 10 u. ff.) besteht aus folgenden Gliedern:

Absolutes Glied:

$$(-1)^{n-1}\sin^2 n\delta,$$

Glieder, die nur gerade Potenzen von y enthalten:

$$\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^{m+r}2^{2n-2r-2}A_{2n-2r}y^{2n-2r},$$

Glieder, die nur gerade Potenzen von x enthalten:

$$\sum_{r=0}^{r=m-1}(-1)^{m+r}2^{2m-2r-2}B_{2m-2r}x^{2m-2r},$$

Glieder, die Potenzen von x und y zugleich resp. ungerade Potenzen von x oder y enthalten (beim Anschreiben dieser Glieder haben wir 2 Fälle zu unterscheiden, und bedienen uns dabei der imaginären Einheit i zur präcisen Angabe der Vorzeichen):

1. Fall

n und m ungerade:

$$\sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2}}\ \sum_{s=0}^{s=\frac{m-1}{2}} -i^{\alpha+\beta}\cdot C_{\alpha,\beta}\cdot 2^{\alpha+\beta-1}\cdot\cos n\delta\cdot y^\alpha x^\beta,$$

2. Fall

n oder m gerade:

$$\sum_{r=0}^{r=\begin{cases}\frac{n}{2}\\ \text{resp.}\\ \frac{n-1}{2}\end{cases}}\ \sum_{s=0}^{s=\begin{cases}\frac{m-1}{2}\\ \text{resp.}\\ \frac{m}{2}\end{cases}} -i^{\alpha+\beta-1}\cdot C_{\alpha,\beta}\,2^{\alpha+\beta-1}\sin n\delta\cdot y^\alpha x^\beta,$$

wobei
$$\begin{cases} \alpha = n - 2r, \\ \beta = m - 2s. \end{cases}$$

Die Coefficienten A, B, C sind Abkürzungen für folgende Zahlenausdrücke:

$$A_{2n} = 1,$$
$$A_{2n-2r} = \frac{2n}{r}(2n-r-1)_{(r-1)},$$
$$B_{2m} = 1,$$
$$B_{2m-2r} = \frac{2m}{r}(2m-r-1)_{(r-1)},$$
$$C_{n-2r,m-2s} = \frac{n}{r}(n-r-1)_{(r-1)} \cdot \frac{m}{s}(m-s-1)_{(s-1)},$$

wobei $\frac{n}{r}(n-r-1)_{(r-1)}$ und $\frac{m}{s}(m-s-1)_{(s-1)}$ für $r=0$ resp. $s=0$ die Einheit bedeuten.

Die Coefficienten C sind unter sich durch die Relation verknüpft

$$C_{n-2r,\,m-2s} = C_{n-2r,\,m} \cdot C_{n,\,m-2s}.$$

Die Gleichung für die ausgearteten Lissajouscurven berechnet sich aus der allgemeinen durch Substitution des entsprechenden Werthes von δ und Ziehung der Quadratwurzel; sie heisst:

$$0 = \sum (-1)^r 2^{n-2r-1} \cdot \frac{n}{r}(n-r-1)_{(r-1)} y^{n-2r}$$
$$+ \begin{Bmatrix} (-1)^{\frac{n-m+2}{2}} \\ \text{resp.} \\ (-1)^{\frac{n-m+1}{2}} \end{Bmatrix} \sum (-1)^s 2^{m-2s-1} \cdot \frac{m}{s}(m-s-1)_{(s-1)} x^{m-2s}.$$

Die beiden in der allgemeinen Gleichung unterschiedenen Fälle geben ihre Besonderheit in dieser Gleichung nur durch das Vorzeichen der zweiten Summe kund. Im ersten Fall gilt der obere, im zweiten Fall der untere Factor.

Da unsere Curven rational durch 2 homogene Parameter darstellbar sind, so sind sie von dem Geschlecht $p=0$, und besitzen die Maximalzahl von Doppelpunkten, nämlich

$$(n-1)(2n-1).$$

Von diesen sind reell und im Endlichen gelegen

$$m(n-1) + (m-1)n;$$

die anderen kommen auf einen unendlich weit auf der X-Axe gelegenen isolirten Punkt, der noch weiter unten untersucht wird.

Die Gesammtheit der im Endlichen gelegenen Doppelpunkte spaltet sich in zwei charakteristisch von einander verschiedenen Gruppen;

$m(n-1)$ von ihnen liegen auf festen, vom Phasenunterschied (von δ) unabhängigen zur X-Axe parallelen Geraden; die übrigen $n(m-1)$ auf eben solchen zur Y-Axe parallelen Geraden. Jede dieser Gruppen zeigt aber auch eine von δ abhängige Gruppirung auf Geraden, die zur andern Axe parallel sind (die Entwickelung und nähere Angabe dieser Eigenschaften s. S. 18 ff.).

Für die Liniencoordinaten unserer Curven ergiebt sich folgende Darstellung:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho u_1 = -\frac{mi}{2}\,(e^{\delta i}\lambda^{n+2m}\mu^n + e^{-\delta i}\lambda^n\mu^{n+2m}). \\ \varrho u_2 = \frac{ni}{2}\,(\lambda^{2n+m}\mu^m + \lambda^m\mu^{2n+m}). \\ \varrho u_3 = (m-n)\{e^{\delta i}\lambda^{2(n+m)} - e^{-\delta i}\mu^{2(n+m)}\} \\ \quad + (m+n)\{e^{-\delta i}\lambda^{2n}\mu^{2m} - e^{\delta i}\lambda^{2m}\mu^{2n}\}. \end{cases}$$

Die Classe der Curve ist demnach $2(n+m)$. Als Gesammtzahl der Doppeltangenten berechnet sich daraus

$$2(n+m)^2 - 3(n+m) + 1.$$

Reell und im Endlichen (S. 28) sind nur 2 n-fache zur Y-Axe parallele und 2 m-fache zur X-Axe parallele Tangenten, welche ein der Lissajouscurve umschriebenes Quadrat bilden.

Die Untersuchung der Wendepunkte (S. 29) führt auf folgende Curve 4. Ordnung, auf der die Wendepunkte liegen müssen:

$$(4)\qquad (n^2-m^2)x^2y^2 + n^2x^2 - m^2y^2 = 0,$$

eine Gleichung, die von δ unabhängig ist.

Diese Gleichung würde auch uneigentliche Lösungen liefern, die eigentlichen genügen nur der irrationalen Gleichung

$$(5)\qquad nx\sqrt{1-y^2} - my\sqrt{1-x^2} = 0,$$

wo die Vorzeichen der Quadratwurzeln so zu wählen sind, dass sie bez. mit $\cos(mt+\delta)$ und $\cos(nt)$ übereinstimmen.

Eine rationale Gleichung, die nur eigentliche Lösungen liefert, und die sich aus der Darstellung der Coordinaten durch den rationalen Parameter λ, μ ergiebt, ist die folgende

$$(6)\qquad \begin{aligned} &(n-m)\{e^{\delta i}\lambda^{2(n+m)} - e^{-\delta i}\mu^{2(n+m)}\} + \\ &+ (n+m)\{e^{-\delta i}\lambda^{2n}\mu^{2m} - e^{\delta i}\lambda^{2m}\mu^{2n}\} = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung $2(n+m)^{\text{ten}}$ Grades liefert indess nicht alle Wendepunkte, da bei der Bildung der Wendepunktsbedingung ein Factor weggeworfen werden musste. Die fehlenden werden sich bei Untersuchung des $2(n-m)$fachen Punktes im Unendlichen auf der X-Axe

ergeben, der auch die sämmtlichen Doppelpunkte mit Ausnahme der oben gewonnenen absorbirt.

Zum Zweck dieser Untersuchung wurde der Verlauf der Curve in der Nähe dieses vielfachen Punktes festgestellt. Als Glieder niederster Dimension der auf den fraglichen Punkt als Coordinatenursprung reducirten homogenen Curvengleichung ergeben sich bei Anwendung der Cramer'schen Regel und unter Benutzung selbstverständlicher Symbole für die Coefficienten:

$$a_{2n}y^{2n} + c_{n,m}y^n z^{n-m} + b_{2m}z^{2(n-m)} = 0, \tag{7}$$

eine reducible Curve, die in folgende 2 zerfällt:

$$y^n = \frac{-c_{n,m} \pm \sqrt{c_{n,m}^2 - 4a_{2n}b_{2m}}}{2a_{2n}} z^{n-m}, \tag{8}$$

oder vermöge der Bedeutung der Coefficienten a, b, c

$$y^n = \frac{-1 \pm 2^{n+m-1} i \begin{cases} \sin n\delta \\ \text{resp.} \\ \cos n\delta \end{cases}}{2} z^{n-m}. \tag{9}$$

Hiebei gilt $\sin n\delta$ im ersten Fall, $\cos n\delta$ im zweiten Fall.

Die 2 Curvenäste, welche durch den unendlich fernen Punkt gehen, sind also im Allgemeinen imaginär. Reell werden sie für $\delta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots$ im ersten Fall, und für $\delta = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \cdots$ im zweiten Fall.

Diese Werthe von δ entsprechen der Ausartung der allgemeinen Lissajouscurven in doppeltzählende von der n^{ten} Ordnung. Die 2 Aeste im Unendlichen fallen dann ebenfalls in einen zusammen.

Die Gleichung (9) sagt ausserdem noch aus, dass die Riemann'sche Fläche der Curve (in Bezug auf y als abhängige und z als unabhängige Variable mit dem unendlich fernen Punkt als Anfangspunkt) aus $2n$ Blättern besteht, die 2 Parthieen von je n nach einem Verzweigungsschnitt um diesen Punkt herum zusammenhängenden Blättern bilden.

Dieser Zusammenhang um den unendlich fernen Punkt wird nachweislich (S. 33) nicht geändert, wenn man zur ursprünglichen Curvengleichung zurückkehrt, und die Riemann'sche Fläche in Bezug auf y als abhängige und x als unabhängige Variable bestimmt.

Die übrigen Verzweigungspunkte gewinnen wir, indem wir die Curvengleichung durch geeignete Elimination von λ, μ, ϱ aus den Gleichungen (2) in folgender Form herstellen:

$$y = \frac{1}{2i}\left(e^{\delta i}\sqrt[n]{(ix \pm \sqrt{1-x^2})^m} - \frac{1}{e^{\delta i}\sqrt[n]{(ix \pm \sqrt{1-x^2})^m}}\right), \tag{10}$$

wobei die $\sqrt[n]{}$ die n möglichen Werthe repräsentirt, so dass für y aus (10) im Ganzen $2n$ Werthe resultiren.

Aus (10) ergiebt sich, dass $x = +1, -1, \infty$ Verzweigungspunkte sind, und zwar hängen die Blätter in jedem der Punkte $x = \pm 1$ paarweise zusammen, d. h. man kommt nach 2 Umläufen ins Anfangsblatt zurück; und zwar hängen im Endlichen gerade solche Blätter zusammen, die im Unendlichen getrennt sind (S. 35).

Die nähere Untersuchung ergiebt, dass der Zusammenhang der Riemann'schen Fläche $= 1$ (im Riemann'schen Sinn), also das Geschlecht $= 0$, wie es sein muss.

Aus den Gleichungen (9) berechnet sich die Anzahl der Doppelpunkte, welche der unendlich ferne Punkt repräsentirt, in folgender Weise. Die Gesammtzahl derselben = der Summe der Doppelpunkte der beiden einzelnen Aeste + ihren Durchschnittspunkten, d. h.

$$= (n-m-1)(n-1) + n(n+m) = 2n^2 - 2nm - 2n + m + 1 .$$

Addirt man hiezu $2nm - (n+m)$, die Anzahl der Doppelpunkte im Endlichen, so gelangt man zur Gesammtzahl $(n-1)(2n-1)$ zurück, so dass keine weiteren Doppel- resp. vielfache Punkte mehr vorhanden sein können.

In der Zahl der Doppelpunkte im Unendlichen sind $2(n-m-1)$ Spitzen mit inbegriffen, und ferner repräsentirt der vielfache Punkt auch noch $2(m-1)$ Wendepunkte, welche zu den aus Gleichung (6) sich ergebenden $2(n+m)$ Wendepunkten hinzutreten.

Reell und im Endlichen gelegen sind $2(n-m)$ Wendepunkte.

Zum Schluss sei bemerkt, dass die ausgearteten Lissajouscurven das einfachste Mittel abgeben, um die Anzahl der Wende-, Doppel- und Rückkehrpunkte der Curve $y^n = az^m$, welche die höhere Singularität des Punktes $y = 0$, $z = 0$ zusammensetzen, durch blosses Abzählen zu gewinnen. Man zeichnet die ausgeartete Lissajouscurve für das Intervall $n : m$, und zählt ihre reellen Doppel- und Wendepunkte ab; ebenso gross ist dann die betreffende Anzahl für die Curve $y^n = az^m$; die in der Anzahl der Doppelpunkte mit inbegriffenen Spitzen erhält man durch Abzählen der vorhandenen Schleifen.

Der Grund dieses einfachen Verfahrens beruht darin, dass die Curve $y^n = az^m$ einfach durch Degeneration aus der Lissajouscurve hervorgeht; die fragliche Singularität ist mit einem Knoten zu vergleichen, der durch Zusammenziehen der betreffenden Lissajouscurve entstanden ist (S. 41 und zur Veranschaulichung Tabelle I).

Zum Schluss seien die Hauptergebnisse bezüglich der Singularitäten in folgender Tabelle niedergelegt.

	Für die allgemeinen Curven.	Für die ausgearteten Curven.
Ordnung	$2n$	n
Doppelpunkte	$\frac{(2n-1)(2n-2)}{2}$	$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$
Hievon Spitzen	$2(n-m-1)$	$(n-m-1)$
Doppelpunkte im Endlichen	$2nm-(n+m)$	$\frac{(m-1)(n-1)}{2}$
Doppeltangenten	$\frac{(2n+2m-1)(2n+2m-2)}{2}$	$\frac{(n+m-2)(n+m-3)}{2}$
Hievon Wendetangenten	$2(n+m)+2(m-1)$	$(n+m-3)+(m-1)$
Wendetangenten im Unendlichen	$2(m-1)$	$(m-1)$
Wendetangenten im Endlichen	$2(n+m)$	$(n+m-3)$
Hievon reelle	$2(n-m)$	$(n-m-1)$
Classe	$2(n+m)$	$(n+m-1)$
Geschlecht	0	0

Passau, im April 1875.

Nachträge zur Abhandlung: Ueber asymptotische Werthe etc.

Diese Annalen S. 363.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

---

1. In der Anmerkung zu Seite 370 muss statt $lf \sim x$, $lf < x$, $lf \gtrsim x$ stehen $lf \sim lx$, $lf < lx$, $lf \gtrsim lx$, und die dritte eingerückte Formel S. 371 muss lauten

$$e^{\mu x} > f(x) > e^{-\mu x}.$$

2. Die infinitäre Auflösung der Gleichung $\psi(\alpha+\delta)-\psi(\alpha)-\delta\psi'(\alpha) = C$ (Art. 29 der cit. Abh.), im Falle $\psi(\alpha) > l\frac{1}{\alpha}$, lautet:

$$\delta = u\sqrt{\frac{2C}{\psi''(\alpha)}}.$$

Die Bestimmung von δ lässt sich leicht noch etwas weiter treiben, indem man, $u = 1 + v$ gesetzt, die Grösse der Null von v angiebt.

Wir gehen aus von Gleichung (34) l. c.:

$$\frac{\delta^2}{1\cdot 2}\psi''(\alpha) + \frac{\delta^3}{6}\psi'''(\alpha+\delta_1) = C, \quad 0 \leqq \delta_1 \leqq \delta. \tag{37}$$

Um die obige Lösung zu beweisen, reichte es aus zu zeigen, dass

$$\frac{\delta}{6}\psi'''(\alpha+\delta_1) \sim \frac{\psi'''(\alpha+\delta_1)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

mit α verschwindet. Für die gesuchte weitere Bestimmung von v in $u = 1 + v$ ist es nöthig, vom zweiten Factor in:

$$\frac{\psi'''(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\psi'''(\alpha+\delta_1)}{\psi'''(\alpha)} = \frac{\psi'''(\alpha+\delta_1)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$

zu zeigen, dass sein Limes Eins ist.

Wir geben ihm die Form:

$$\frac{\psi'''(\alpha+\delta_1)}{\psi'''(\alpha)} = 1 + \delta_1\frac{\psi^{IV}(\alpha+\delta_2)}{\psi'''(\alpha)}, \quad 0 \leqq \delta_2 \leqq \delta_1.$$

Nun ist:

$$\delta_1\frac{\psi^{IV}(\alpha+\delta_2)}{\psi'''(\alpha)} < \delta_1\frac{\psi^{IV}(\alpha+\delta_2)}{\psi'''(\alpha+\delta_2)} < \delta\frac{\psi^{IV}(\alpha+\delta_2)}{\psi'''(\alpha+\delta_2)} < \frac{\psi^{IV}(\alpha+\delta_2)\cdot\sqrt{2C}}{\psi''^{\frac{1}{2}}(\alpha+\delta_2)\psi'''(\alpha+\delta_2)}.$$

Also ist zu zeigen:

$$\frac{\psi^{IV}}{\psi''^{\frac{1}{2}}\psi'''} < 1.$$

Um die Theoreme über die Typen anwenden zu können, führen wir statt der Null werdenden Variabeln α die unendlich werdende x durch die Beziehung $\alpha x = 1$ ein, und setzen: $\psi''(\alpha) = \varphi(x)$, folglich:

$$\frac{\psi^{IV}}{\psi''^{\frac{1}{2}}\psi'''} = x \cdot \frac{2\varphi' + x\varphi''}{\varphi^{\frac{1}{2}}\varphi'}.$$

Hierin ist $\varphi(x) = \frac{\mu(\alpha)}{\alpha^2}$, also $\succ x^2$, da $\mu(\alpha) \succ 1$. Es ist also das Unendlich von

$$\frac{x^2\varphi''(x)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\varphi'}$$

zu untersuchen, da im Zähler $2\varphi' + x\varphi''$, wie durch Integration zu constatiren, $x\varphi'' \asymp \varphi'$ ist. Wir kommen diesem Ausdruck bei mit Hülfe des Theorems Art. 6 der Abh. Borch. Journ. Bd. 74, p. 294: Da, unter t den Typus von $\varphi(x)$ verstanden, man erstens hat $t \gtrsim x$, zweitens $\varphi(x) = x^2\varphi_1(x)$, $\varphi_1(x) \succ 1$, so hat man auch nach dem citirten Theorem:

$$\varphi \sim t\varphi' \sim t^2\varphi''.$$

D. i. wir können das Unendlich von φ' und φ'' ersetzen durch das von $\frac{\varphi}{t}$ und $\frac{\varphi}{t^2}$. Daraus folgt:

$$\frac{x^2\varphi''(x)}{\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\,\varphi'(x)} \sim \frac{x^2}{t\,\varphi^{\frac{1}{2}}(x)}.$$

Ersetzen wir hierin noch t durch $\frac{\varphi}{\varphi'}$, so folgt:

$$\frac{x^2\varphi''(x)}{\varphi^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'} \sim \frac{x^2\varphi'}{\varphi^{\frac{3}{2}}}.$$

Nehmen wir jetzt an:

$$\frac{x^2\varphi'}{\varphi^{\frac{3}{2}}} \gtrsim 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\varphi'}{\varphi^{\frac{3}{2}}} \gtrsim \frac{1}{x^2},$$

so folgt durch Integration

$$\frac{1}{\varphi^{\frac{1}{2}}} \gtrsim \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad \varphi \gtrsim x^2$$

gegen die Voraussetzung, dass $\varphi \succ x^2$. Also ist:

$$\frac{x^2\varphi''(x)}{\varphi^{\frac{1}{2}}\varphi'} \sim \frac{\psi^{IV}}{\psi''^{\frac{1}{2}}\psi'''} \prec 1$$

und damit ist auch bewiesen, dass:

$$\delta \frac{\psi^{IV}(\alpha+\delta_1)}{\psi'''(\alpha)} \prec 1$$

ist.

Durch Einführung des Ausdruckes $\delta = u\sqrt{\frac{2C}{\psi''(\alpha)}}$ und Berücksichtigung des vorstehenden Ergebnisses geht (37) über in:

$$u^2C + u^3\frac{(2c)^{\frac{3}{2}}}{6} \cdot \frac{\psi'''(\alpha)}{\psi'(\alpha)^{\frac{3}{2}}} \cdot w = C, \quad w \overline{\infty} 1.$$

Hierin setzen wir $u = 1 + v$ und finden:

$$v = -\frac{(2c)^{\frac{3}{2}}}{12} \cdot w \cdot \frac{(1+v)^3}{1+\frac{v}{2}} \cdot \frac{\psi'''(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}} = -u_1 \frac{(2c)^{\frac{3}{2}}}{12} \frac{\psi'''(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}}, \quad u_1 \overline{\overline{\infty}} 1,$$

welches das angekündigte Resultat ist. Man hat also:

$$\delta = \frac{(2c)^{\frac{1}{2}}}{\psi''(\alpha)^{\frac{1}{2}}} \left(1 - u_1 \frac{(2c)^{\frac{3}{2}}}{12} \frac{\psi'''(\alpha)}{\psi''(\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right), \quad u_1 \overline{\overline{\infty}} 1.$$

Tübingen, Februar 1875.

Verbesserungen.

S. 326 Zeile 7 v. o. fehlt: $d\vartheta$.

S. 332 Zeile 6 v. o. st. $\frac{q\pi c^2}{2}$ lies $\frac{q\pi c^2}{4}$.

S. 350 Z. 11 v. u. ∂ durch d zu ersetzen.

S. 352(3) müssen (A), (B), (C), (D) je eine Zeile tiefer stehen.

S. 357 Zeile 12 v. u. st. lo lies log.

ibid. Zeile 2 v. u. st. $\log \frac{e_3 c}{2}$ lies $\log \frac{e^{\vartheta} c}{2}$.

S. 358 Zeile 4 v. o. st. $\sin n^{\omega}$, lies $\sin n\overline{\omega}_1$.

ibid. Zeile 10 v. o. st. $e^{n\Theta_2}$ lies $e^{n\Theta_1}$.

ibid. Zeile 1 v. u. st. $e^{2n\Theta_2} - e^{-2n\Theta_1}$ lies $e^{2n\Theta_2} - e^{2n\Theta_1}$.

Nachträgliche Verbesserungen zu dem Aufsatze: Ueber cubische ternäre Formen, Band VI.

S. 460 Zeile 16 v. o. lies: $\frac{1}{8} S\Sigma$ statt $\frac{1}{3} S\Sigma$.

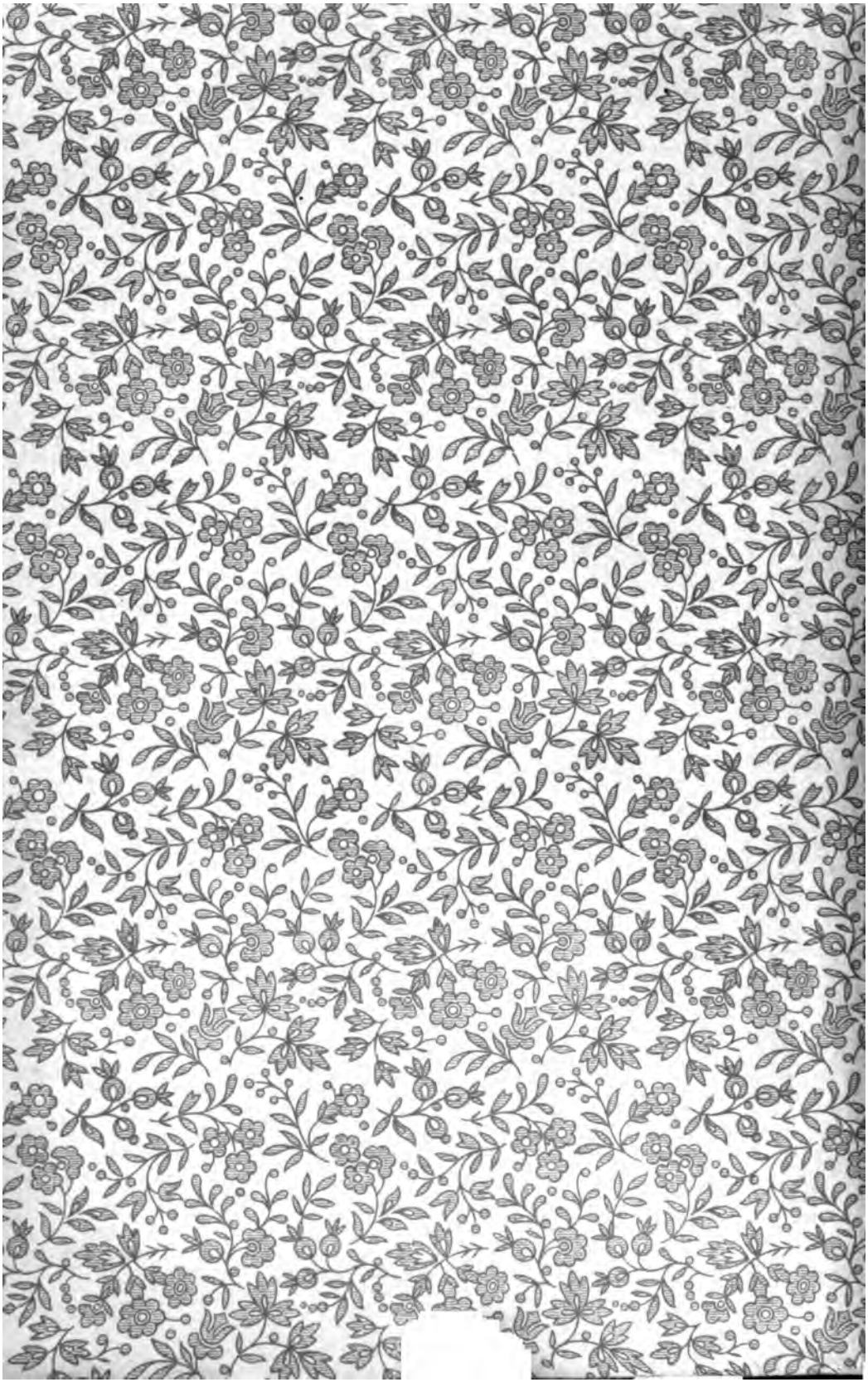
S. 481 Zeile 6 v. o. lies: $\varphi'' = -\frac{1}{2}\psi + \frac{2Tf^2}{9} - \frac{S\Delta f}{6}$.

S. 485 Zeile 4 v. u. lies: $(K\Theta - H^2)$ statt $(K\Theta - M^2)$.

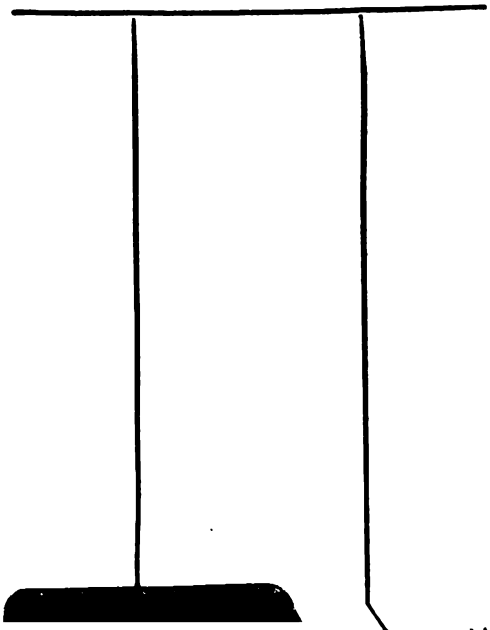
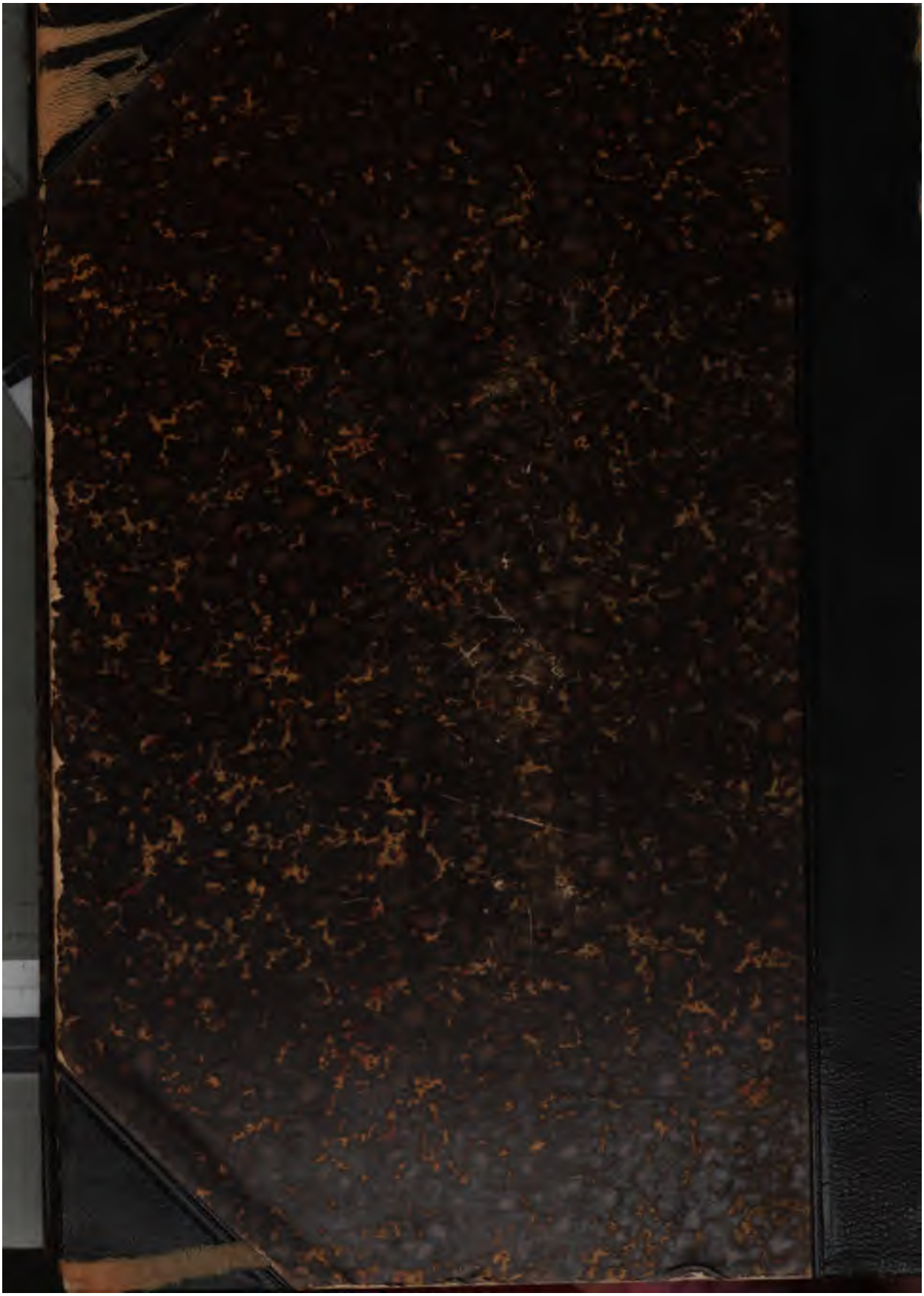
S. 487 Zeile 4 v. o. lies: $\Lambda = +\frac{1}{4}(a\alpha u)(b\alpha u)(ab u)^2 \alpha_x - \frac{1}{4} T u_x$.

S. 510 Zeile 4 v. o. und Zeile 8 v. o. lies: $[\vartheta k] = +\frac{8}{3}\psi + \frac{2}{3} Tf^2$.

S. 510 Zeile 8 v. o. lies: $[\eta\eta] = -\frac{4}{3}\psi + \frac{2}{3} Tf^2$.



MATHEMATICS STATISTICS
LIBRARY
STORAGE AREA

Stanford University Libraries
Stanford, California

Return this book on or before date due.